Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Professor: Jones Colombo

Gabarito da P2 de Álgebra Linear II

05/01/2017

1. $[2,0pts]$ Se $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortogonal, prove que:

   a) α é LI.

   b) $|u_1 + u_2 + \cdots + u_n|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2$.

   Solução: a) Precisamos verificar que a única solução para a equação

   $$x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n = 0$$

   é $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Para ver isso, faça o produto interno do vetor por u_i, com $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ e temos $\langle x_i, x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n\rangle = \langle u_i, 0\rangle = 0$, mas

   $$\langle x_i, x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n\rangle = x_1\langle u_i, u_1\rangle + \cdots + x_i\langle u_i, u_i\rangle + \cdots + x_n\langle u_i, u_n\rangle$$

   Para cada i, com $i = 1, 2, \ldots, n$ temos $x_i = 0$, uma vez que $\langle u_i, u_i\rangle \neq 0$. Demonstrando o que queríamos.

   b) Veja que

   $$\begin{aligned} |u_1 + u_2 + \cdots + u_n|^2 &= \langle u_1 + u_2 + \cdots + u_n, u_1 + u_2 + \cdots + u_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle u_i, u_j\rangle \\ &= \langle u_1, u_1\rangle + \langle u_2, u_2\rangle + \cdots + \langle u_n, u_n\rangle \\ &= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 . \end{aligned}$$

$[3,0pts]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + 2y - z, x + 4y - 5z).$$

a) [0,6] Encontre uma base para $W = \mathrm{Im}(T)$ (a imagem de T).
b) [1,2] Seja $v = (19, -3, -6, 2)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.
c) [0,6] Resolva o sistema $T(x, y, z) = u$.

d) [0,6] Se $v' = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\text{Proj}_W v'$.

Solução: Pelo desenvolvimento da teoria existem duas formas de fazermos esta questão. Vamos iniciar utilizando a matriz de projeção M.

a) Considere as bases canônicas $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ e $\beta \subset \mathbb{R}^4$, então a matriz

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Escalonando por colunas, visto que são as colunas da matriz que geram a $\text{Im}(T)$, descobrimos que $c_3 = 3c_1 - 2c_2$. Portanto, a terceira coluna é combinação das outras duas e pode ser descartada. $\gamma = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 4)\}$ é uma base de W.

b) Considere

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e calculando obtemos

$$M^t M = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow M\left(M^t M\right)^{-1} M^t = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

fazendo $M\left(M^t M\right)^{-1} M^t(19, -3, -6, 2) = (5, 5, 3, -1)$. Portanto, $u = \text{Proj}_W(v) = (5, 5, 3, -1)$.

c) Observe que $\dim \text{Im}(T) = 2$, pelo teorema do núcleo e da Imagem, $\dim \text{N}(T) = 1$. Portanto, ao resolver $T(x, y, z) = u$ sempre encontraremos infinitas soluções, e o grau de liberdade das soluções é 1. É fácil de ver que $(x, y, z) = (7, -2, 0)$ é uma solução para o sistema. Uma questão interessante seria descobri aquela solução que esta mais próximo do $\text{N}(T)$ e desta forma impor uma condição para unicidade da solução.

d) Para resolver este item basta

$$M\left(M^t M\right)^{-1} M^t v' = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5x + 5y + 3z - t \\ 5x + 5y + 3z - t \\ 3x + 3y + 3z + 3t \\ -x - y + 3z + 11t \end{bmatrix}.$$

A outra maneira de fazer esta questão é utilizando os operadores de projeção Proj. Ao invés de fazer o item a) comece pelo item b)

b) Considere $\{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2, 4), u_3 = (1, 1, -1, -5)\}$ e aplique o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 - \text{Proj}_{v_1} u_2 = (1, 1, 2, 4) - 2(1, 1, 1, 1) = (-1, -1, 0, 2)$

$v_3 = u_3 - \text{Proj}_{v_1} u_3 - \text{Proj}_{v_2} u_3 = (1, 1, -1, -5) - (-1)(1, 1, 1, 1) - (-2)(-1, -1, 0, 2) = (0, 0, 0, 0)$.

Portanto, v_3 é combinação linear de v_1, v_2 e daí, u_3 é combinação linear de u_1, u_2. No item a) uma base para W pode ser $\{u_1, u_2\}$. Continuando o item b) temos

$\text{Proj}_W(v) = \text{Proj}_{v_1}(19, -3, -6, 2) + \text{Proj}_{v_2}(19, -3, -6, 2) = (3, 3, 3, 3) + (2, 2, 0, -4) = (5, 5, 3, -1)$.

Os outros itens se resolvem de maneira semelhante.

$[1,5pts]$ Verifique se o operador $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por $T(z,w)=(z+iw,z+(2+i)w)$ é um operador normal ($A^*A=AA^*$).

Solução: Considere $\alpha=\{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{C}^2$.

$$A=[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & 2+i\end{bmatrix}\Rightarrow A^*=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & 2-i\end{bmatrix}.$$

Veja que

$$A^*A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & 2-i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & 2+i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2+2i\\ 2-2i & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & 2+i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & 2-i\end{bmatrix}=AA^*.$$

$[2,0pts]$ Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$3x^2-4\sqrt{3}xy-y^2+20y-25=0.$$

Solução: Reescrevendo a equação obtemos

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\end{bmatrix}.$$

Precisamos diagonalizar o operador $A=\begin{bmatrix}3 & -2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$. O polinômio característico é $\Delta_A(x)=x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$. Para $\lambda=5$ temos o autovetor $(-\sqrt{3},1)$ e para $\lambda=-3$ temos o autovetor $(1,\sqrt{3})$. Escolhendo a base $\beta=\left\{\frac{1}{2}(-\sqrt{3},1),\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})\right\}$ e considere $\alpha\subset\mathbb{R}^2$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Então

$$P^{-1}=[I]_\alpha^\beta=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow P=P^t=P^{-1},\ \text{daí },\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

Fazendo esta mudança de coordenadas e voltando para a equação temos

$$5x'^2-3y'^2+10x'+10\sqrt{3}y'=25\Leftrightarrow 5(x'^2+2x'+1-1)-3\left(y'^2-\frac{10\sqrt{3}}{3}y'+\frac{25}{3}-\frac{25}{3}\right)=25$$

Portanto, depois de completar quadrados obtemos

$$\begin{aligned}5(x'+1)^2-3(y'-\frac{5}{\sqrt{3}})^2-5+25&=25\\ \Rightarrow 5(x'+1)^2-3(y'-\frac{5}{\sqrt{3}})^2&=5\\ \Rightarrow (x'+1)^2-\frac{3(y'-\frac{5}{\sqrt{3}})^2}{5}&=1.\end{aligned}$$

O ponto $B'=(-1,\frac{5}{\sqrt{3}})$ na coordenadas (x',y') correspondem ao ponto $B=(\frac{5}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2},2)$ no sistema (x,y). portanto, obtemos uma hipérbole com estes pontos no B no centro. E os eixos principais as direções $\frac{1}{2}(-\sqrt{3},1)$ e $\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$.

$[1,5pts]$ Sejam E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$ e considere o operador linear projeção ortogonal $\operatorname{Proj}_u : E \to E$ sobre um vetor não nulo u. Se $H_u : E \to E$ é dado por $H_u(v) = (I - 2\operatorname{Proj}_u)v$. Mostre que:

a) $H_u^2 = I$.

b) Se v e w são vetores distintos de mesmo comprimento, então $H_{v-w}(v) = w$.

Solução: a) Recorde que $\operatorname{Proj}_u(v) = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$u, e

$$\begin{aligned}
H_u(H_u)(v) &= H_u((v - 2\operatorname{Proj}_u(v))) \\
&= H_u\left(v - 2\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u\right) \\
&= v - 2\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - 2\frac{\left\langle v - 2\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u, u\right\rangle}{\langle u,u\rangle}u \\
&= v - 2\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - 2\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u + 4\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\frac{\langle u,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u \\
&= v
\end{aligned}$$

b) Sabemos que $|v| = |w| \Rightarrow \langle v,v\rangle = \langle w,w\rangle$ e,

$$\begin{aligned}
H_{v-w}(v) = (I - 2\operatorname{Proj}_{v-w})(v) &= v - 2\frac{\langle v, v-w\rangle}{\langle v-w, v-w\rangle}(v-w) \\
&= v - 2\left(\frac{\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle}\right)(v-w) \\
&= v - 2\left(\frac{\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle}{2\left(\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle\right)}\right)(v-w) \\
&= v - (v-w) = v - v - +w = w.
\end{aligned}$$