

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA

UMA PROPOSTA DA **OBMEP**
PARA CAPACITAÇÃO
DE PROFESSORES EM
ESTRATÉGIAS DE ENSINO DA
MATEMÁTICA, VOLUME 1

Yuriko Yamamoto Baldin
Aparecida Francisco da Silva

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA

UMA PROPOSTA DA **OBMEP**
PARA CAPACITAÇÃO
DE PROFESSORES EM
ESTRATÉGIAS DE ENSINO DA
MATEMÁTICA, VOLUME 1

OBMEP NA ESCOLA

Resolução de problemas na sala de aula

Uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de Ensino da Matemática

Yuriko Yamamoto Baldin

Aparecida Francisco da Silva

Resolução de problemas na sala de aula

Uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de Ensino da Matemática

Copyright© 2016 by Yuriko Yamamoto Baldin
e Aparecida Francisco da Silva.

Direitos reservados, 2016 pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Projeto Gráfico: Ampersand Comunicação Gráfica

Baldin, Yuriko

Francisco, Aparecida

Resolução de problemas na sala de aula

Uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de Ensino da Matemática

Rio de Janeiro, IMPA, 2016

93 páginas

ISBN 978 - 85 - 244 - 0424 - 5

Distribuição

IMPA/OBMEP

Estrada Dona Castorina, 110

22460-320 Rio de Janeiro, RJ

E- mail: cad_obmep@obmep.org.br

www.obmep.org.br

AGRADECIMENTOS

As autoras desejam registrar agradecimentos para:

Companheiros do Comitê Coordenador do Projeto PROF-OBMEP nos anos 2012 a 2014, que participaram da concepção das atividades e da elaboração do material didático, pela colaboração, solidariedade e amizade: professor José Carlos Rodrigues, professoras Monica Fürkotter, Débora de Jesus Bezerra e Margarete Teresa Zanon Baptistini.

Coordenadores regionais, professores-orientadores, moderadores do fórum e monitores dos polos que aplicaram o material do PROF, pela confiança no Projeto e a colaboração na divulgação, nos anos 2013 e 2014.

Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), na pessoa do senhor secretário, professor Hermann Voorwald por ter acolhido, em 2012, a proposta do projeto-piloto do PROF, oferecendo total apoio dos seus órgãos: Coordenadoria Geral de Educação Básica (CEGEB) e Escola de Formação de Professores (EFAP), com reconhecimento de capacitação para os professores da Rede Pública Estadual.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada – Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (IMPA-OBMEP), na pessoa do seu coordenador-geral, professor Claudio Landim pela confiança ao Projeto PROF e todo suporte logístico que resultou nesta publicação.

Novembro de 2014.

As autoras.

APRESENTAÇÃO

O presente material, oriundo do PROF – Programa Oficinas de Formação, visa apresentar alternativas de desenvolvimento de questões da OBMEP e outras correlatas, em consonância com os currículos oficiais, na forma de atividades práticas e utilizando a metodologia de Resolução de Problemas para trabalho em sala de aula.

Este é um material em construção que apresenta o resultado das atividades do Projeto PROF – Programa Oficinas de Formação, em execução desde 2012. As atividades das oficinas realizadas nas edições do Projeto contribuíram para validar as formas de trabalho propostas uma vez que os professores participantes aplicaram parte do material em suas salas de aula.

Para facilitar a identificação do problema que está sendo proposto, o enunciado de cada problema se apresenta em caixa de texto com letra diferenciada daquela utilizada no texto com recomendações de procedimentos, atividades ou questionamentos.

As primeiras atividades propõem a abordagem de conteúdos de Geometria com ênfase inicial em construções com régua e compasso e manipulações de material concreto. Para iniciar o trabalho são discutidos os instrumentos: régua e compasso. Os problemas que se seguem abordam a Geometria sem medida, isto é, exploram as propriedades das figuras antes de trabalhar com dados numéricos a elas relacionados. A proposta é trabalhar Geometria com Geometria e não apresentar apenas problemas cujas soluções demandam algebrização dos seus dados. Mesmo para alguns problemas cujas abordagens tradicionalmente se faz por meio de algebrização, há proposta de sequência de atividades e questionamentos que levem à solução sem que seja necessário recorrer à ferramenta Algébrica.

Na Parte 2 são explorados problemas que fazem uma transição entre o tema Geometria e problemas de contagem e combinatória. Todos os problemas abordados têm forte apelo geométrico, mas o último já traz uma transição para a Aritmética.

Na sequência são propostos problemas com conteúdo de Álgebra, mas com um olhar diferenciado sobre possíveis abordagens relacionadas com os exercícios dos parágrafos anteriores. Por exemplo, o Problema 1, da Parte 3 mostra como um raciocínio organizado com a técnica de árvore de possibilidades trabalhada nos problemas de contagem auxilia a resolução de problemas que envolvem a lógica. Partindo do pressuposto que a introdução ao raciocínio algébrico constitui uma das dificuldades na matemática escolar, na transição entre a aritmética das operações e a linguagem de equações, ela é abordada, neste material, adaptando as vantagens oferecidas pelo Método de Barras, presente na proposta de livros didáticos de Singapura. A condução dos problemas propostos explora a essência deste método na resolução de problemas.

Em todo o material é enfatizado a importância de questionamentos estratégicos que ampliam o significado dos conteúdos matemáticos.

Como a Álgebra tem aspectos abstratos, as atividades propostas para a abordagem dos problemas não se prendem ao uso de material concreto, mas fazem uso da representação pictórica como uma ferramenta para auxiliar a aprendizagem de conceitos.

Na Parte 3 são apresentados exemplos de problemas abordados segundo esta importante ferramenta metodológica para a aprendizagem da Álgebra, com significado para o aluno.

Os problemas estão apresentados na mesma ordem em que foram trabalhados nas Oficinas do PROF, mas as recomendações foram adaptadas de modo a desvincular a sequência em que os problemas aparecem e, desta forma, podem ser escolhidos por tema, na sequência desejada pelo professor, na maior parte do tempo.

Novembro de 2014

1	GEOMETRIA E CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO	10
1.1.	Atividade Básica de Construção Geométrica.....	10
1.2.	Problema 1	13
1.3.	Problema 2 – Construindo Triângulos	15
1.4.	Problema 3 – BQ – OBMEP 2012 – Questão 35 – Nível 1	18
1.5.	Problema 4 – Recortes do Retângulo	20
1.6.	Problema 5 – Dividindo uma torta.....	25
1.7.	Problema 6 – BQ – OBMEP 2012 – Questão 36 – Nível 1	27
1.8.	Problema 7 – BQ – OBMEP 2012 – Questão 37 – Nível 1	29
1.9.	Problema 8 – Questão 12 – Nível 1 – 1ª Fase – OBMEP 2012	31
1.10.	Problema 9 – Questão 8 – Nível 3 – 1ª Fase – OBMEP 2012.....	33
2	CONTAGEM E COMBINATÓRIA	34
2.1.	Problema 1 – BQ – OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 21 (Parte 1).....	35
2.2.	Problema 2 – BQ – OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 21 (Parte 2).....	37
2.3.	Problema 3 – Questão 13 – Nível 1 – 1ª Fase – OBMEP 2012.....	39
2.4.	Problema 4 – BQ – OBMEP 2012 – 1 – Questão 21 – Nível 1 – Variação	40
2.5.	Problema 5 – OBMEP 2012 – 1ª Fase – Questão 18 – Nível 3	41
2.6.	Problema 6 – Questão 16 – Nível 2 – 1ª Fase – OBMEP 2012	42
2.7.	Problema 7 – BQ – OBMEP 2012 – Questão 26 – Nível 1.....	44

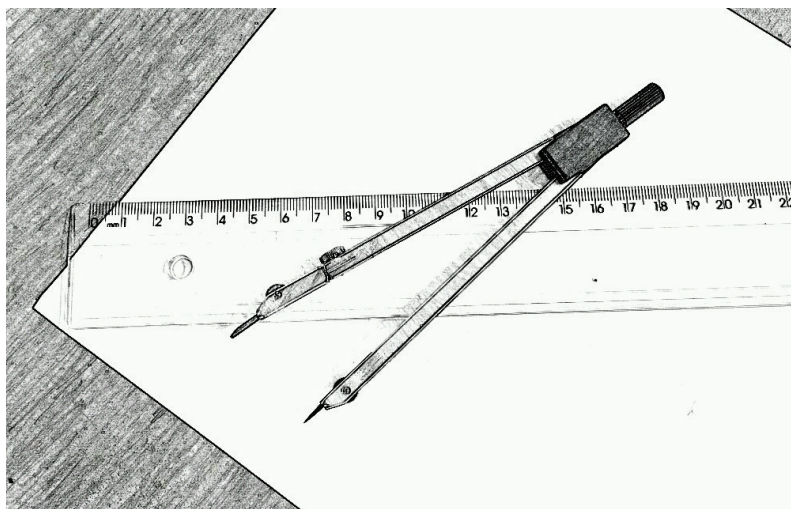
3	LÓGICA E ÁLGEBRA	46
3.1.	Problema 1 – Questão 20 – Nível 1 – 1ª Fase – OBMEP 2012	46
3.2.	Problema 2 – Questão 19 – Nível 1 – 1ª Fase – OBMEP 2012.....	51
3.3.	Problema 3 – Adaptado de PIC OBMEP – Apostila 2 (p. 12-13)	53
3.4.	Problemas 4 e 5 e o Modelo de Barras	54
3.5.	Problema 6 – OBMEP 2012 – 1ª Fase – Questão 11 – Nível 1	56
3.6.	Problema 7 – Questão 9 – Nível 1 – 1ª Fase – OBMEP 2012	60
3.7.	Problema 8 – OBMEP 2012 – 1ª Fase – Questão 10 – Nível 2	61
3.8.	Problema 9 – Questão 7 – Nível 2 – 1ª Fase – OBMEP 2012.	63
ANEXO A		64
	Aparente contradição	64
ANEXO B		65
1.	Conhecendo o significado da Geometria Dinâmica como recurso didático	65
2.	Conhecendo a linguagem da Geometria Dinâmica: objetos livres, objetos dependentes (condicionados e vinculados).....	67
3.	Outras Construções Básicas	70
4.	Atividades de Construção e Exploração	74
	Referências Bibliográficas	77
ANEXO C		78
1.	Compasso Colapsante (p. 12)	79
2.	Problema 4 – Recortes do Retângulo	80
3.	Problema 6 – BQ – OBMEP 2012 – Questão 36, Nível 1 (p. 27)	83
4.	Variação Exploratória do Problema 6 (p. 29)	85
5.	Problema 7 – BQ – OBMEP 2012 – Problema 37 – Nível 1 (p. 30).....	87

1. GEOMETRIA E CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

Muitos conceitos e problemas de Geometria podem ser explorados a partir de construções com régua e compasso, e manipulações de material concreto. Para iniciar o trabalho com problemas de Geometria entendemos ser interessante explorar algumas atividades iniciais nas quais possam ser discutidos os instrumentos básicos de construção: a régua e o compasso.

1. 1. ATIVIDADE BÁSICA DE CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Material necessário: régua, compasso, tesoura, folhas brancas.



1ª PERGUNTA: *Para que serve uma régua?*

É um instrumento que serve para “traçar segmentos de reta”.

Embora uma primeira resposta, por impulso habitual, possa ser “a régua serve para medir”, motivada pela graduação em centímetros e milímetros da régua escolar, é importante entender que o objeto (segmento de reta) que será medido deve existir antes da medição. Desta forma, as graduações em centímetros e milímetros, na régua escolar, são secundárias diante do objetivo essencial de um instrumento que serve para traçar linhas retas definida por dois pontos.

Recomenda-se a discussão sobre os conceitos: reta, semirreta e segmentos de reta, introduzindo a notação e repre-

sentação. Uma alternativa real para o uso de régua e compasso é apresentada no Anexo B, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

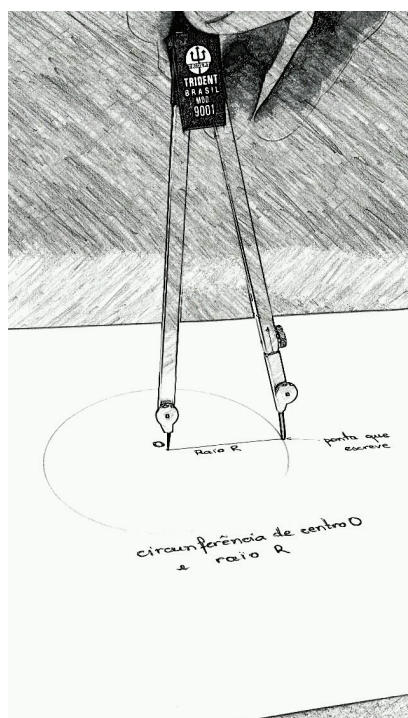
2ª PERGUNTA: *Para que serve um compasso?*

Compasso é um instrumento para desenhar círculos e arcos de círculo, ele serve para transferir distâncias entre dois pontos e para comparar medidas de segmentos distintos.

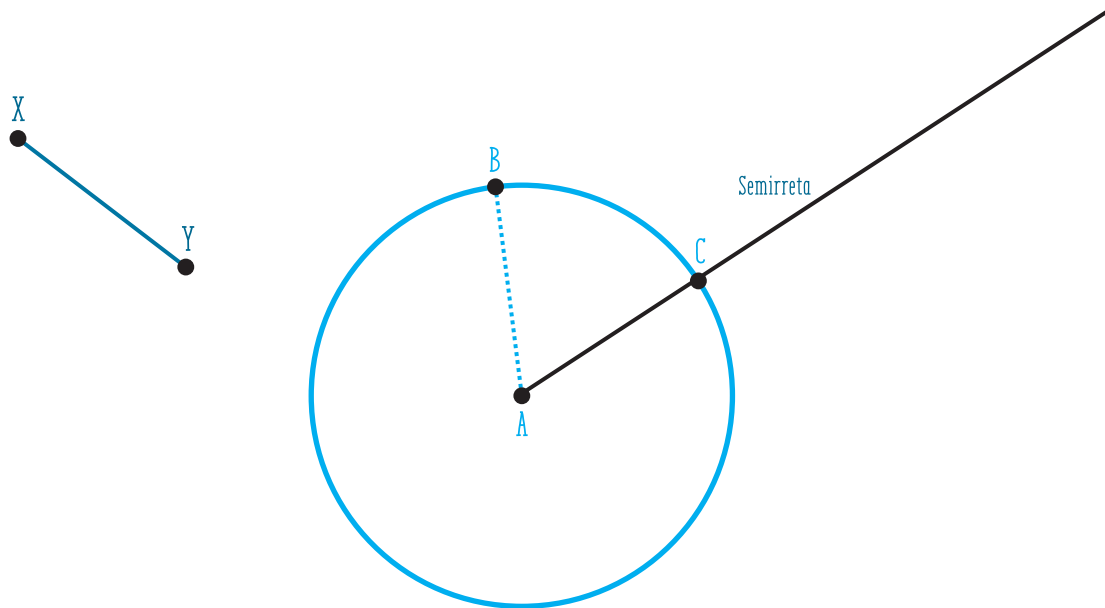
Com ele, é possível desenhar uma circunferência ou parte de uma circunferência, que se chama arco. Para desenhar uma circunferência de “centro” em um ponto e uma medida de “raio”, fixa-se a parte pontuda do compasso (chamada ponta-seca) no ponto dado, abre-se o compasso até que a ponta que escreve esteja à distância igual à medida do raio, e, então, mantendo o compasso em posição vertical em relação ao papel, gira-se o compasso para desenhar (vide figura).

Todos os pontos de uma determinada circunferência estão à mesma distância fixada (pela abertura do compasso) a partir do centro O , um ponto também fixado, *a priori*.

Com essa funcionalidade, o compasso é um instrumento que serve para “transportar medidas” de um lugar para outro. Por exemplo, dado um segmento cujas extremidades são os pontos X e Y , pode-se obter um segmento de “mesma medida” a partir de um ponto qualquer A , usando o compasso para esta tarefa: basta abrir o compasso, usando a medida do segmento XY e, com cen-



tro em A, traçar a circunferência. Esta distância pode ser marcada sobre uma semirreta com origem em A como o ponto C de intersecção da circunferência com a semirreta.



QUESTIONAMENTO: É preciso saber quanto mede XY em centímetros ou milímetros para realizar esta tarefa?

A resposta é “não”. A ideia de comprimento de um segmento na Geometria não precisa de medida, enquanto dado numérico. As medidas de dois segmentos podem ser comparadas utilizando o compasso. O dado numérico, se necessário, pode vir *a posteriori*, como na figura do Problema 1, a seguir.

Mas, dadas as medidas numéricas, usando, por exemplo, uma régua graduada para ler as medidas, é possível desenhar segmentos de 2,4cm ou medir o lado de um quadrado e notar que ele mede 4,3cm, por exemplo. Neste caso, associa-se a Aritmética à Geometria.

OBSERVAÇÃO: No tempo dos gregos, o compasso não parava aberto quando se tirava o apoio do papel, chamando-se compasso “colapsante”. Entretanto, eles sabiam transferir a distância entre dois pontos usando este compasso “deficiente”.

Veja no anexo C (p. 79) deste texto, arquivo disponibilizado, que utiliza recurso de Geometria Dinâmica, no qual é apresentada uma construção que realiza o transporte de medidas, simulando um compasso colapsante (Compasso Colapsante).

1.2. PROBLEMA 1

Desenhar dois segmentos distintos de comprimentos 5,5cm e 3,7cm, respectivamente. Sobre uma reta dada, marcar pontos A, B e C de modo que AB meça 5,5cm, BC meça 3,7cm e AC tenha medida igual à soma “(5,5 + 3,7)cm”.

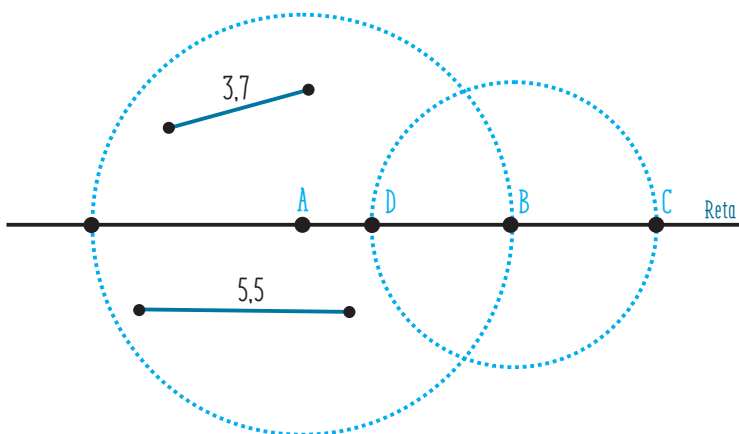
Para iniciar o trabalho com problemas, em geral, é evidente a necessidade da leitura e compreensão do problema para responder a contento às perguntas:

- O que é dado?
- O que é pedido?
- Que instrumentos você pode utilizar para desenhar?

No entanto, a formulação de questionamentos que possam levar à investigação de uma resposta também é importante. A seguir, são apresentados alguns questionamentos que podem conduzir a uma exploração da resolução:

- Os pontos encontrados são únicos? Discuta.
- Encontre D sobre a reta tal que AD tenha medida “(5,5 – 3,7) cm”.
- O ponto D é único? Discuta.
- Confira se as soluções encontradas estão de acordo com as condições dadas.
- Que outros questionamentos podem levar à solução do problema proposto?

Na ilustração apresentada, a seguir, podem-se identificar pontos que são soluções das questões levantadas (pontos C e D, respectivamente). Nesta figura aparece apenas uma solução para cada, mas podemos encontrar outra solução, tomando como ponto B, o outro ponto de intersecção da circunferência de raio 5,5cm e centro A, com a reta dada. Neste caso teremos uma figura simétrica em relação ao ponto A.



Mas, a pergunta pode ser mais geral, retirando-se a condição do ponto pertencer à reta. Esta situação abre espaço para discussão mais ampla do problema, o mesmo ocorrendo com os questionamentos apresentados na sequência:

- Existem outros pontos X tais que AX tenha medida igual à diferença “ $(5,5 - 3,7)$ cm”?
- Considerando os pontos A e B da primeira solução do Problema 1, construa duas circunferências; uma com centro em A e raio 5,5cm e outra com centro em B e raio 3,7cm. Sejam E e J os pontos de encontro das duas circunferências. Pergunta-se:
 - a) Qual o perímetro do triângulo ABJ?
 - b) Qual o perímetro do triângulo ABE?
 - c) Qual é o comprimento do maior segmento na reta dada que é determinado pelas duas circunferências?

A sequência dos questionamentos mostra que, trabalhando Metodologia de Resolução de Problema, apresentar uma resposta para a pergunta inicial é apenas uma parte do trabalho com os conceitos. O problema abre possibilidades para uma compreensão em profundidade dos conceitos matemáticos, por meio de exploração, investigação e descoberta de novos conceitos e propriedades.

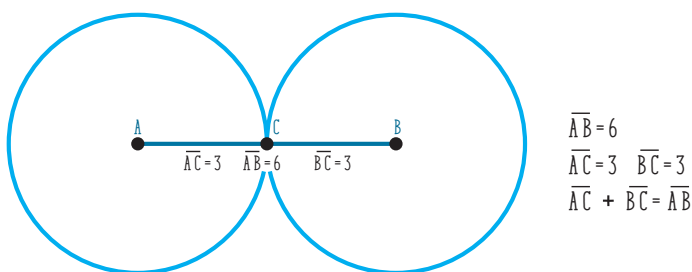
Os questionamentos dados permitem discutir a comparação entre o comprimento obtido no item c) e os perímetros dos triângulos construídos. Podemos investigar se o resultado da comparação poderia ser ou não esperado a partir das construções iniciais. Este é um passo importante, antes mesmo de sistematizar o que foi trabalhado.

1.3. PROBLEMA 2 – CONSTRUINDO TRIÂNGULOS

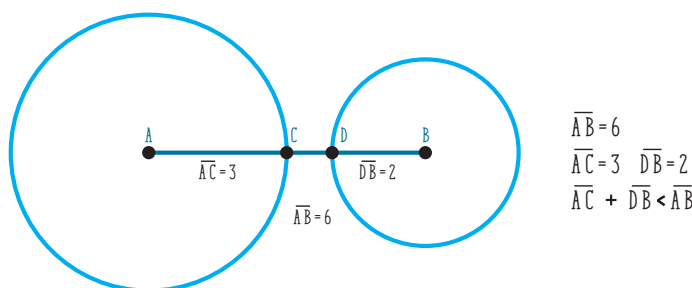
Usando a régua, construa três segmentos com as medidas 3cm, 4cm e 6cm. Desenhe um ponto A fora dos segmentos e construa um triângulo com um dos vértices em A e que tenha lados com as medidas dadas. O resultado é único?

Algumas atividades para investigar a possibilidade de construção com certas medidas dadas podem ser feitas, por exemplo:

a) Experimentar, usando o método de construção de segmentos do Problema 1, construir um triângulo com as medidas 3cm, 3cm e 6cm. O que ocorre? Pode explicar o que observa?



b) Experimentar, novamente, construir um triângulo com as medidas 3cm, 2cm e 6cm. O que ocorre? Pode explicar o que observa?



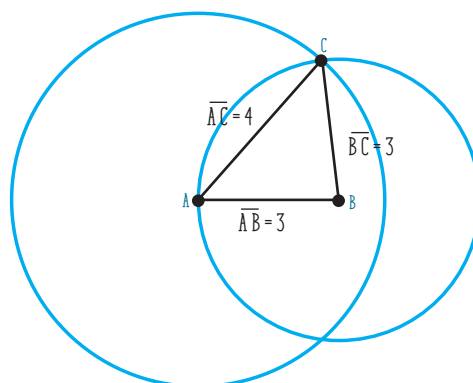
A finalização da discussão, com as variações que serão apresentadas a seguir, prepara o terreno para a exploração de um importante conceito em Geometria, a saber: a possibilidade de construção de triângulos dadas as medidas dos lados.

VARIAÇÕES:

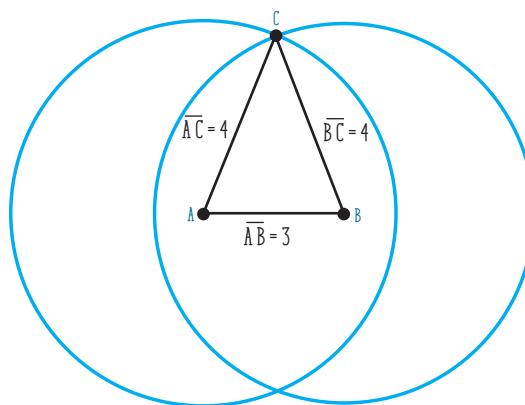
- Dadas duas medidas, 3cm e 4cm, achar todos os valores possíveis em números inteiros para que um triângulo possa ser construído.

- Construa os triângulos, descreva-os e explore as propriedades especiais que eles apresentam.
- Quais as medidas mínima e máxima de perímetro que os triângulos construídos podem ter?

Observe as construções de alguns casos para a terceira medida:



Medidas 3, 3 e 4



Medidas 3, 4 e 4

A terceira medida pode ser 5, 6 ou 7cm? Justifique sua resposta.

A discussão deve ser conduzida de modo a justificar a possibilidade de construção de um triângulo pela existência do terceiro vértice como intersecção não vazia de círculos.

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: É importante destacar que, ao estimular esta investigação na sala de aula, o professor deve levar todos os alunos à percepção da condição que irá sistematizar ao final como “a desigualdade triangular”. Esta condição é necessária e suficiente para a construção de triângulos e é um resultado de Geometria do currículo do Ensino Fundamental.

Uma possível abordagem é conduzir um experimento no qual os alunos constroem tabelas em que se registram, em diferentes linhas, escolhas de três medidas e a possibilidade ou não da construção de um triângulo com tais medidas (tabelas com duas colunas, uma para as medidas de possíveis lados e outra para indicar a possibilidade ou não da construção do triângulo com as medidas dadas). Depois de montada a tabela, discutir, com a participação de todos os alunos, as possibilidades, as impossibilidades e o caso-limite com 3cm, 4cm e 7cm, que é interpretado como o caso de colinearidade.

Com os dados organizados, o professor pode estimular os alunos a enunciar suas conjecturas. Somente depois de os alunos expressarem, com suas próprias palavras, a desigualdade triangular é que se recomenda, ao professor, sintetizar a discussão, apresentando a propriedade na sua forma tradicional. É importante registrar no caderno as desigualdades que corroborem a conclusão para cada caso estudado.

A sequência proposta é, ainda, adequada para explorar perímetro de triângulos em diferentes abordagens, por exemplo: Qual é o perímetro de um triângulo conhecidos os seus lados? É possível construir um triângulo de perímetro 18 e lados 6 e 3?

1.4. PROBLEMA 3 – BQ – OBMEP 2012 – QUESTÃO 35 –
NÍVEL 1

Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3cm, 4cm e 6cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo temos duas figuras que ele fez.

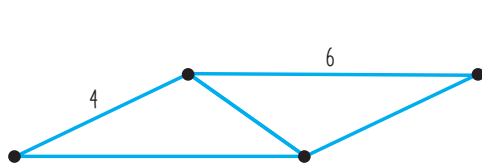


Figura I

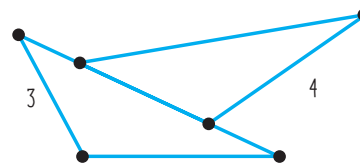


Figura II

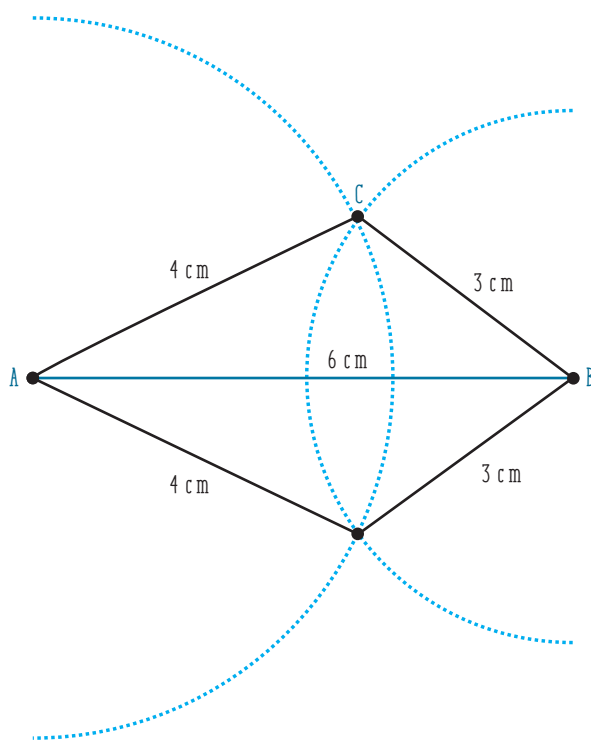
- Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?
- Calcule os perímetros das Figuras I e II.
- Qual é o “menor” perímetro de uma figura que Miguilim pode formar?
- Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.

Na exploração deste problema, aproveita-se o trabalho realizado, anteriormente, com destaque para a possibilidade de conduzir a discussão para o paralelismo entre os lados correspondentes dos triângulos na formação da Figura 1. Recomenda-se que a atividade seja iniciada com a utilização de triângulos recortados em papel sulfite, ou outro tipo de papel para estimular a investigação a ser realizada pelos alunos. Atenção deve ser dada, se possível, nas diferentes figuras e no registro dos resultados obtidos, tanto das formas quanto de seus perímetros.

Além dos questionamentos já apresentados outros poderão ser acrescentados, especialmente os que fazem refletir sobre as figuras que podem ser obtidas como, por exemplo:

- Sempre que colamos dois lados de mesma medida obtemos um paralelogramo?
- Quais figuras podem ser obtidas quando juntamos as duas figuras por lados de mesma medida?

A discussão sobre a figura que se obtém quando se justapõem dois lados de mesma medida (em alguns casos se obtém um paralelogramo, mas em outros não), abre a possibilidade de exploração do que caracteriza um paralelogramo e a diferença entre um paralelogramo e outras figuras que são possíveis de formar (pipa, entre elas). A figura a seguir, mostra a pipa que é obtida pela junção dos dois triângulos do problema pelo lado de medida 6 cm.



Uma observação importante sobre uma pipa é a propriedade de suas diagonais: elas são perpendiculares pelo ponto médio da diagonal “menor”.

QUESTIONAMENTO: Por que esta propriedade é válida?

1.5. PROBLEMA 4 – RECORTES DO RETÂNGULO

De quantas maneiras distintas podemos dividir um retângulo em duas partes de igual área, utilizando um segmento de reta?

Na abordagem do Problema 4 – Recortes do Retângulo está proposta a utilização de diversos recursos: material concreto (dobradura e recorte de papéis coloridos) e de *software* livre de Geometria Dinâmica, especificamente o *software* GeoGebra¹.

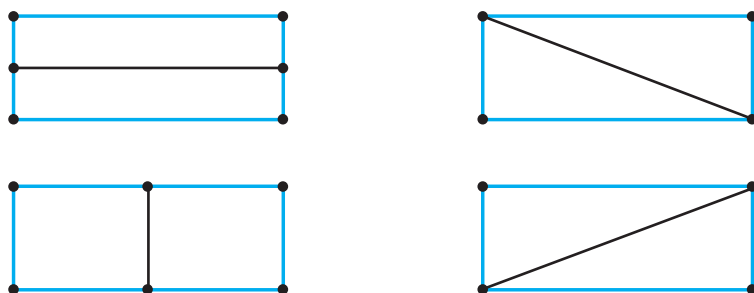
Inicialmente está proposta uma atividade investigativa com dobraduras. O material necessário é composto de *kit* de papéis retangulares coloridos, tesoura, régua e transferidor. Mais especificamente, a proposta para a atividade é a seguinte: usando retângulos de papel colorido, solicitar ao aluno que produza, em cada um dos retângulos, uma dobra no papel de modo que as duas partes resultantes fiquem com mesma área. Indagar como pode garantir que as áreas sejam iguais, lembrando que no caso das dobras pelos pontos médios de lados opostos isto é fácil por sobreposição, mas no caso de dobra pela diagonal isto não é evidente. Ou seja, nas primeiras dobraduras o aluno pode conferir, sem recorte, que as partes têm mesma área, e comparar as medidas dos lados, por superposição, mesmo sem utilizar unidade de medida, ou usando instrumentos como o compasso para efetuar a comparação.

Para aprofundar estas noções de igualdade de área e de comprimento (ainda por sobreposição das partes destacadas das figuras), recomenda-se utilizar o recurso de recortar a figura pelo vinco da dobra produzida.

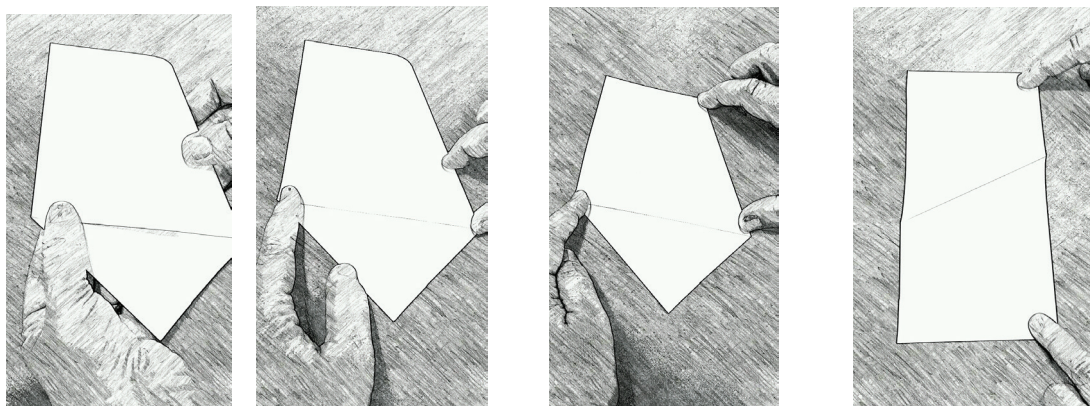
¹ Aplicativo de Matemática Dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra. Escrito em linguagem Java. Permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de Geometria com outras mais adequadas à Álgebra e ao Cálculo, tendo uma vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>>. Acesso em: 24 jun. 2013. Para baixar e instalar o programa acesse http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

A partir das dobraduras e recortes, indagar se há outras dobraduras e recortes possíveis. É possível responder quantas(os) são?

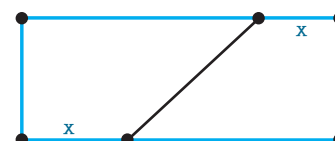
Em geral, a resposta inicial dos alunos se reduz a quatro casos: dois correspondendo à divisão perpendicular a um dos lados pelo ponto médio, e dois pelas diagonais, como pode ser visto na figura a seguir.



Caso não tenham surgido outras dobras, pode-se indagar o que ocorre quando se dobra pela linha que se obtém ao sobrepor dois vértices opostos (a sequência de fotos a seguir, apresenta o que ocorre e como proceder).



Lembrando a importância dos questionamentos ao conduzir uma aula, em que se utiliza a Metodologia de Resolução de Problemas, deve-se elaborar perguntas que levem os alunos a criarem uma generalização desta situação, como, por exemplo: Considere sobre lados paralelos do retângulo, segmentos de medida x a partir de vértices opostos dos lados escolhidos. Veja a figura com um corte ou dobra deste tipo:



Questionamentos em sequência que podem ser feitos a partir deste recorte:

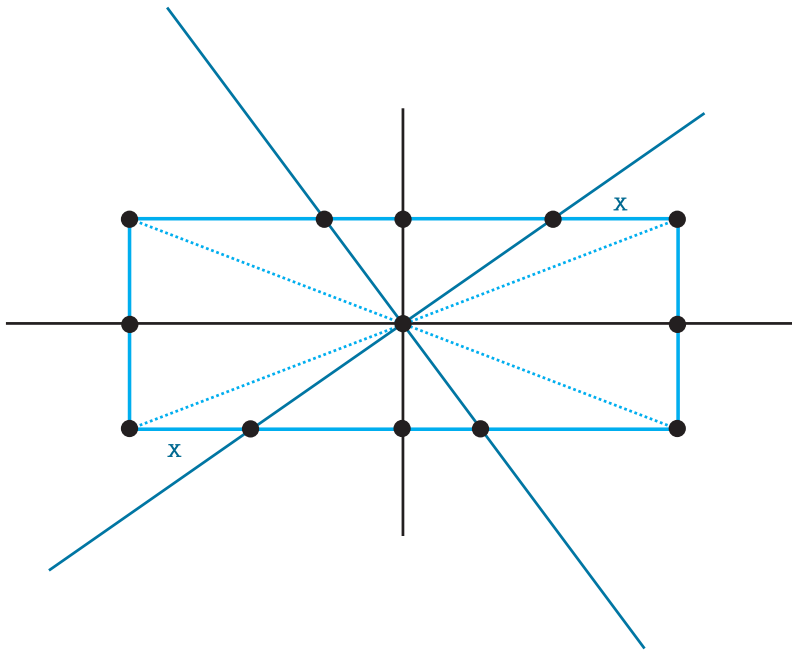
- A medida x tem que ser conhecida? Justificar a resposta.
- Quais figuras são obtidas com o recorte?
- Qual a propriedade do retângulo que garante que as partes obtidas são trapézios?
 - Podemos afirmar que os dois trapézios são congruentes? Como justificar a resposta?
 - Podemos afirmar que os dois trapézios possuem a mesma área? Quais as áreas dos trapézios?
 - É preciso saber o valor numérico das medidas das figuras para responder às perguntas anteriores?

Todos estes questionamentos podem ser explorados por meio de uma atividade investigativa utilizando o *software* GeoGebra cujos comandos para produção de arquivo para exploração encontra-se no Anexo C 2.2.

Depois de realizada a atividade manipulativa, podemos retomar o problema e indagar se já existem condições para dar uma resposta para o problema proposto inicialmente.

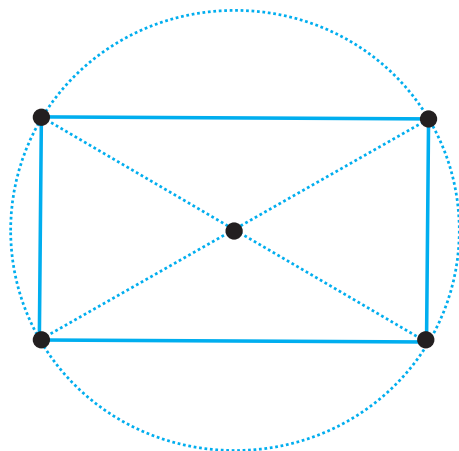
RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Observe que a manipulação vivenciada, usando dobraduras, recortes ou o *software* GeoGebra, além de permitir a constatação de propriedades geométricas, por visualização, fornece elementos para um raciocínio dedutivo que elucida os pontos essenciais da justificativa rigorosa da resposta intuída.

Mais ainda, é possível constatar, a partir das atividades, que as diagonais do retângulo se encontram num ponto que é também o encontro da reta vertical com a horizontal que repartiu o retângulo em duas metades. Nota-se que uma reta que divide o retângulo em dois trapézios de mesma área, como proposto para discussão, “também” passa por este ponto. Para se chegar a esta conclusão é importante encaminhar a atividade de sobreposição das partes recortadas anteriormente, ou seja, solicitar que os alunos tomem uma das partes de cada recorte produzido e sobreponha-os observando o que ocorre.

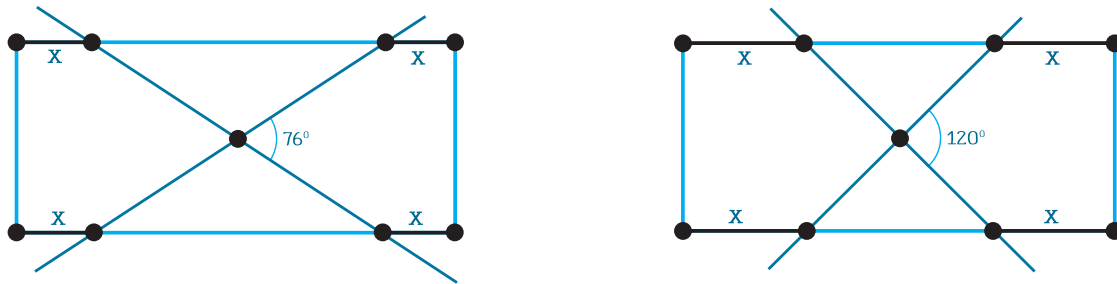


Outra constatação é que qualquer reta perpendicular a uma reta que divide o retângulo em duas partes de mesma área e passa pelo ponto destacado anteriormente, também produz duas figuras de mesma área, sendo importante experimentar por dobradura, recorte ou no arquivo do GeoGebra.

No Anexo C é apresentada uma animação com papéis coloridos que constituem uma experimentação importante deste fenômeno. O ponto especial, assim obtido, é chamado, justamente, de “centro” do retângulo, e observa-se que é sempre possível colocar um retângulo em um círculo cujo centro é exatamente este ponto e com vértices sobre o mesmo. Como justificar matematicamente esta afirmação? Sendo este um dos principais conteúdos matemáticos a ser explorado a partir do problema, recomenda-se atenção especial para as devidas justificativas.



Outro fato que pode ser sistematizado a partir das explorações anteriores é que o ângulo entre as diagonais de um retângulo, em geral, não é reto e nem tampouco é reto o ângulo entre as retas transversais que cortam o retângulo segundo uma mesma medida x , distante dos vértices, nos lados paralelos, portanto vale a pena investigar: Quando isto pode ocorrer?



Este é o momento em que a exploração com software de Geometria Dinâmica se torna eficaz como auxiliar na atividade de investigação. Uma possibilidade de uso é o arquivo disponível no Anexo C. Sabemos que os passos da resolução de problemas passam por investigação, exploração e descoberta, que podem ser feitos neste problema também por meio de recortes e sobreposição de figuras.

Indo além, na investigação, ainda são pertinentes os seguintes questionamentos:

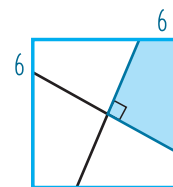
- Aumentando o tamanho x do segmento na ilustração anterior, o que acontece com as divisões?
- Diminuindo o tamanho x , como fica?
- As soluções simples iniciais correspondem a alguma posição especial da reta que faz a divisão? E a algum valor especial de x ?

Estes são alguns questionamentos que nos permitem caracterizar **o quadrado como sendo um retângulo cujas diagonais são perpendiculares.**

Uma variação interessante para trabalhar com os alunos é o problema seguinte:

1.6. PROBLEMA 5 – DIVIDINDO UMA TORTA

Na hora do lanche, a mãe do Pedrinho dividiu uma torta salgada de formato quadrado de 20cm de lado entre Pedrinho e seus três amigos, cortando-a a partir de 6cm das pontas, como na figura. Ela foi justa?



Assim como o problema anterior, há alguns questionamentos que podem ser feitos para levar os alunos a construir uma estratégia e resolver o problema:

- O que deve acontecer com os pedaços resultantes da divisão da torta, para que esta seja justa?
- Como podemos proceder para verificar se os pedaços têm todos o mesmo tamanho?
- Se ela tivesse feito os cortes a cinco centímetros das pontas, em vez de seis, ainda assim, a divisão seria justa?
- Quais são os valores que podem substituir 6 e ainda a divisão ser justa?
- Verifique se os cortes passam pelo centro do quadrado. Este resultado já era esperado? Por quê?
- Existe alguma relação deste problema com o problema do recorte do retângulo?
- Qual é o ângulo entre as diagonais de um quadrado?
- O que ocorre com os cortes da torta se as duas diagonais forem giradas simultaneamente com mesmo ângulo em torno do centro?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: É importante, num trabalho com Resolução de Problemas, que se registrem, explicitamente, na lousa, os dados do problema e as respostas dos participantes em cada momento para propiciar condições para uma discussão. E é a partir da discussão que se deve formalizar os conceitos envolvidos e destacar as principais propriedades envolvidas.

O conjunto de ações, realizadas pelo aluno, constitui um processo, em que, é claro, surgem naturalmente os mais diversos erros. Alguns tipos de erros:

- de leitura e interpretação de enunciados;
- de estratégias;
- de aplicação de algoritmos ou de técnicas;
- de verificação da solução enquanto estratégia e não enquanto algoritmo etc.

O trabalho do professor deve levar o aluno a reconhecer e superar os erros cometidos, sem que o erro seja explicitado pelo professor. É na discussão com o grupo que o aluno deve refazer sua estratégia e validá-la. Destaque-se que é sempre possível explorar didaticamente os erros considerando as seguintes premissas:

- Respeitar o aluno, devolvendo a ele a tarefa de fazer a discussão dos resultados, com o objetivo de explorar suas potencialidades e seus conhecimentos.
- Planejar estratégias para trabalhar com conteúdos em que há maior incidência de erros, propondo questões que envolvam o interesse dos alunos.
- Aproveitar recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de formas variadas, explorando habilidades de formular hipóteses, testá-las e discuti-las.
- Para cada questão proposta ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem, com o grupo de alunos, para aproveitar todas as oportunidades de fazê-los pensar sobre seu próprio pensamento (CURY, 2004).

Em última instância, o erro deve ser visto positivamente, como uma oportunidade única para refletir mais sobre o enunciado do problema, o que é dado e o que é pedido, as estratégias utilizadas e as soluções obtidas, para serem investigadas.

1.7. PROBLEMA 6 – BQ – OBMEP 2012 – QUESTÃO 36 – NÍVEL 1

Uma folha retangular de 20cm por 30cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços, dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura ao lado. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos:

- Qual é o comprimento do segmento AB?
- Qual é a área de um triângulo?
- E de um pedaço de cinco lados?
- Com os quatro pedaços, podemos montar um quadrado com um buraco no meio como na Figura II. Qual é a área do buraco?

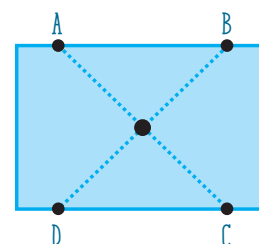


Figura I

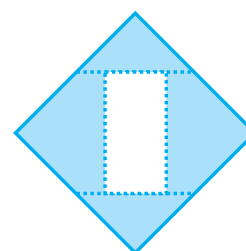


Figura II

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Recomenda-se que a abordagem deste problema seja iniciada com um resgate do problema do retângulo e a leitura cuidadosa, com destaque dos dados não numéricos do problema, quais sejam: folha retangular; segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento; A e C, B e D estão respectivamente em lados opostos; dois triângulos iguais; dois polígonos (de 5 lados) são iguais; AC e BD se encontram no centro do retângulo formando um ângulo reto.

O arquivo, que pode ser gerado no GeoGebra a partir de comandos encontrados no Anexo C (p. 84), permite ampliar o entendimento do problema. Recomenda-se, fortemente, não iniciar a resolução do problema enquanto as propriedades geométricas dos dados não estiverem totalmente compreendidas e pelo menos uma estratégia não tenha sido verbalizada.

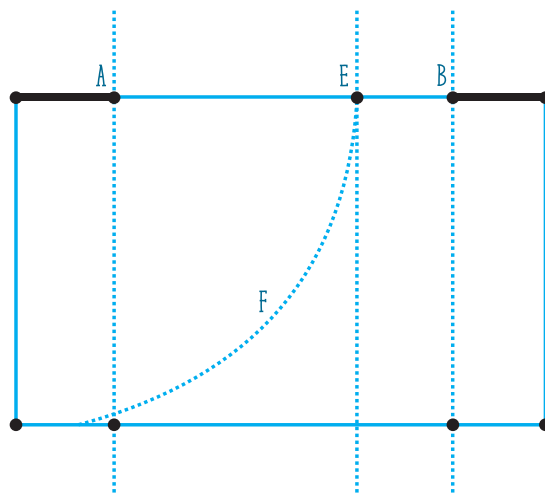
Esta é uma atividade investigativa, em que o “papel” do professor é “muito” importante para guiar a percepção do aluno. Se o professor impõe aos alunos o que quer que eles enxerguem, esses não serão autores da sua aprendizagem. Todo cuidado, na proposição de questionamentos, é pouco.

É por meio da discussão e questionamentos que o professor pode levar seus alunos a explorarem a composição da figura do problema para reconhecer as partes que a compõem. Sem este reconhecimento dos dados geométricos, o aluno não tem condições de elaborar uma estratégia que leve à solução do problema. Começar o trabalho indagando quais são as partes que compõem a Figura II do problema e por que as junções dão certo, conduzindo a construção da figura com dobradura de papel é a proposta apresentada para início da abordagem do problema. Isto pode facilitar a compreensão do problema e a proposição de estratégias de resolução. Deve-se evitar a dica tradicional, na qual já apresenta-se o raciocínio e finaliza a apresentação com uma pergunta “...é assim, não é?”.

Este problema tem conexão com o conhecimento desenvolvido nas atividades dos problemas anteriores, e para estabelecer esta conexão, por meio de um olhar para as propriedades geométricas, é importante manipular material concreto para deduzir as propriedades necessárias para resolver o problema.

Um resultado importante que deve ser sistematizado é o reconhecimento de que os dados do problema levam ao fato que o quadrilátero ABCD que é construído dentro do retângulo da Figura I é um quadrado (fato que deve ser provado, utilizando como hipótese os dados do problema).

A seguir apresentamos passos e questionamento para construir um modelo da Figura I com dobradura de papel:



1. Dobrar uma folha de papel retangular de modo a levar o canto inferior esquerdo sobre o lado superior para transferir a medida do lado menor sobre o maior e obter um ponto que denotaremos por E.
2. Obter o ponto médio da parte que sobrou no lado maior, dobrando o vértice superior direito sobre o ponto E, que será denotado por B.
3. Dobrar a folha perpendicularmente ao lado maior do retângulo pelo ponto B.
4. Transferir a medida entre o vértice superior direito e o ponto B, para a outra extremidade superior da folha e, em seguida, fazer a dobra perpendicular ao lado do retângulo, pelo ponto obtido (A).
5. Observar que a figura central obtida, desconsiderando-se os dois retângulos congruentes das extremidades da folha é um quadrado.
6. Dobrar o quadrado pelas diagonais para obter os dois triângulos e os dois pentágonos.

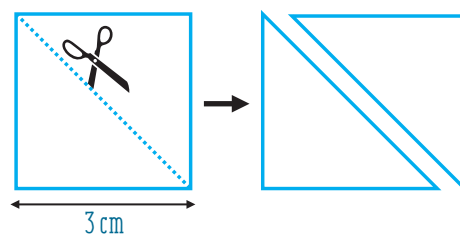
Usando a construção indicada no Anexo C (p. 85) os alunos podem ser instigados a responder os questionamentos a seguir:

- O que estamos usando para garantir a descoberta das medidas que resolvem o problema?
- O buraco sempre existe, ainda que as medidas do retângulo original não tenham sido dadas?
- O problema seria diferente se não houvesse a simetria do segmento AB em relação aos vértices do lado maior?

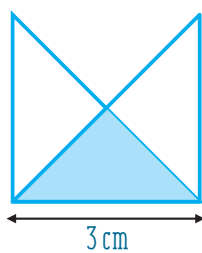
1.8. PROBLEMA 7 – BQ – OBMEP 2012 – QUESTÃO 37 – NÍVEL 1

Este problema complementa o problema 6 e apresenta uma possibilidade de ampliação da investigação inicial sobre as propriedades geométricas envolvidas. Para tanto recomenda-se a apresentação em partes (duas) como estão nos quadros a seguir:

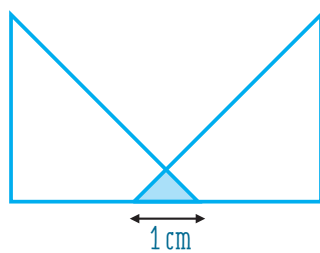
Um quadrado de lado 3 cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos como na figura:



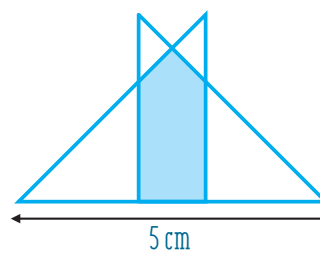
Com estes triângulos formamos as figuras dos itens (a), (b) e (c), nas quais destacamos, em azul, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região azul.



(a)



(b)



(c)

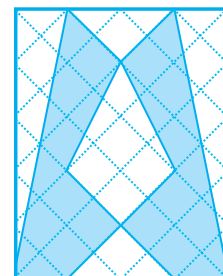
RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: A abordagem deste problema deve levar os alunos à compreensão das propriedades geométricas que deve anteceder à compreensão da simbologia algébrica e ao uso de fórmulas. Mais, o uso de fórmulas deve ser a síntese do trabalho realizado, quando a simbologia algébrica estiver revestida de significado para o aluno. Iniciar o trabalho com ênfase no raciocínio geométrico e sem utilizar fórmulas para o cálculo das áreas é de fundamental importância.

Os questionamentos referentes a este problema podem e devem ser explorados a partir do arquivo [Problema37_triângulosSobreposto.ggb](#) (Anexo C, p. 87). A atividade dinâmica permite descobrir e explorar as propriedades geométricas do problema em um quadrado qualquer, ampliando a compreensão do fenômeno.

Ainda, numa abordagem da Geometria pela Geometria e não a partir da algebrização das medidas, propõe-se o seguinte problema:

**1.9. PROBLEMA 8 – QUESTÃO 12 – NÍVEL 1 – 1ª FASE –
OBMEP 2012**

O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado mede 4cm de largura por 5cm de altura. Qual é a área da região azul?



A figura como proposta não permite a contagem dos quadradinhos, mas a área pode ser obtida facilmente por comparação de partes que compõem uma figura. Como a proposta de trabalho é de abordar a Geometria sem, necessariamente, precisar de medidas para explorar o problema, sugere-se o uso de modelo reproduzido em papel-cartão para recorte (ver material na página 90), levando o aluno à percepção de variadas formas que podem ser produzidas por recortes na figura que permitem adequada sobreposição para comparação de suas áreas. Inicialmente são entregues aos participantes duas cópias da figura - uma para ser recortada e outra para ser usada de base para a sobreposição dos recortes obtidos.

Uma sugestão de sequência das atividades é a seguinte:

1. Propor o recorte de uma das figuras separando as partes brancas das azuis, podendo produzir recortes nas partes de mesma cor. (Uma possibilidade interessante é produzir cortes verticais pelos vértices da figura azul no lado superior do retângulo e pelos vértices de contato entre as figuras azuis.)
2. Solicitar que se sobreponham as partes azuis às brancas, produzindo novos recortes, se necessário.
3. Registrar o que ocorreu e que tipo de recorte os alunos fizeram. Solicitar que os próprios registrem com suas palavras o que fizeram, observaram e concluíram.
4. Sistematizar o conteúdo.

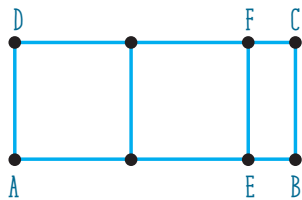
Na sistematização do conteúdo constatar que se uma figura fica dividida em duas que podem ser sobrepostas de alguma forma, então, a área de cada figura resultante é a metade da área da figura original. Dependendo dos cortes produzidos pode-se explorar quais figuras têm a mesma área, com os desdobramentos possíveis, além, é claro, da exploração de simetrias na figura (A dobradura pelo eixo vertical médio mostra perfeita simetria da figura e a percepção de que as partes brancas e azuis podem ser sobrepostas também por simetria axial). A discussão sobre simetrias pode ser conduzida com questões como as apresentadas a seguir:

- Quando falamos que duas figuras são simétricas, quais dados são necessários para definir tal situação?
 - O que é eixo de simetria de uma figura?
 - O que é um ponto de simetria?
 - É possível sobrepor o triângulo branco inferior à figura azul, girando-o no plano, em torno do seu vértice superior?
 - Há outras figuras que compõem a figura no retângulo, que podem ser “sobrepostas” por movimentos de giros (rotação)? Identifique e explique.

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Nos questionamentos apresentados é necessário tomar cuidado com a linguagem utilizada e a formalização matemática que deve segui-la. O conceito de isometria (como transformação no plano) e a sua relação com a congruência de figuras deve ser explorado como uma restrição de uma correspondência biunívoca do plano sobre si mesmo que leve à comparação entre duas figuras, e não apenas como regras para comparação de dois triângulos, sem um significado geométrico mais amplo.

Devemos trabalhar claramente a diferença entre o conceito de simetria e o fato de uma figura apresentar simetria de alguma forma. Este conceito é fundamental para a compreensão da atividade proposta. Aqui é essencial abordar os elementos para trabalhar simetrias no plano, e o problema mostra a importância de trabalhar as definições matemáticas para esclarecer conceitos que são aprendidos intuitivamente e precisam de adequada sistematização.

**1.10. PROBLEMA 9 – QUESTÃO 8 – NÍVEL 3 – 1ª FASE –
OBMEP 2012**



A figura mostra um retângulo ABCD decomposto em dois quadrados, e um retângulo BCFE. Quando BCFE é semelhante a ABCD, dizemos que ABCD é um retângulo de prata e a razão AB/AD é chamada razão de prata. Qual é o valor da razão de prata?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: O objetivo principal para o trabalho com este problema é discutir o significado de uma “definição matemática” e sua interpretação. O questionamento deste problema deve levar ao rompimento da ideia comum de que na Matemática os conceitos já estão “definidos” e na sala de aula trabalham-se apenas exemplos e exercícios derivados da matemática “pronta”.

Além de trabalhar o que é uma definição, a abordagem deste problema permite compreender o papel da interpretação dos dados para o estabelecimento de estratégias adequadas para sua resolução, incluindo a validação da resposta obtida. O problema foi proposto como Questão 8 da Prova da 1ª Fase da OBMEP 2012, Nível 3, mas o conteúdo matemático envolvido é basicamente semelhança, que é abordado nos anos finais do Ensino Fundamental.

Este problema propicia oportunidade de trabalhar técnicas algébricas modeladas em uma situação geométrica. A expressão fracionária surge da proporção da semelhança, sendo a ideia subjacente a de comparação, e não de divisão.

Considere a recomendação: Esta atividade “não” deve ser realizada nem com material concreto nem com Geometria Dinâmica. Como pode ser justificada esta recomendação?

Alguns questionamentos para a reflexão do professor sobre este problema:

- Como analisar o uso de uma situação geométrica para resgatar e consolidar o significado de uma expressão fracionária?
- Podemos dizer que a razão de prata é um número racional porque está numa forma fracionária?

2. CONTAGEM E COMBINATÓRIA

Nesta parte apresentamos problemas que fazem uma transição entre o tema Geometria e problemas de Contagem e Combinatória. Todos os problemas abordados têm forte apelo geométrico, mas o último traz uma referência à Aritmética.

Em alguns problemas optou-se por apresentação parcial ou de variação que facilita o trabalho de compreensão do principal conteúdo e o estabelecimento de estratégias de solução. Assim, os primeiros problemas que estão relacionados com o BQ – OBMEP 2012, não se apresentam como está nesta obra, mas já com o formato para aplicação em sala de aula. Todavia, sempre que a exploração envolver a situação proposta no problema será destacado na apresentação do mesmo.

Vale destacar que as atividades em sequência como exposto, já foram trabalhadas com sucesso em diferentes escolas e grupos de alunos (sala de aula ou preparatório para participação em Olimpíadas).

**2.1. PROBLEMA 1 – BQ – OBMEP 2012 – NÍVEL 1 –
QUESTÃO 21 (PARTE 1)**

Ana quer colorir as bolinhas, da Figura 1, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.
(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 1?

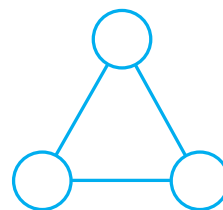
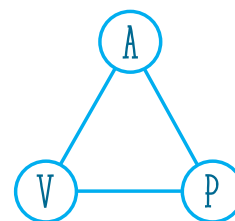
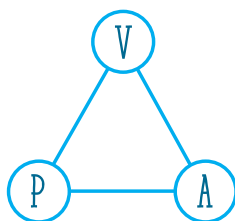


Figura 1

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Este é um dos problemas em que se optou pela apresentação diferenciada da constante no BQ. A apresentação parcial e quebrada em várias partes visa à compreensão do enunciado do problema, focando nas ideias essenciais do conteúdo abordado. Para uma abordagem em sala de aula, onde se deseja que o aluno possa, por si, chegar à compreensão do enunciado e adquirir independência para formular hipóteses para resolução, especialmente nas séries iniciais, é importante iniciar por casos mais simples para compreender os conceitos fundamentais. Com este procedimento é possível discutir que o dado inicial mais importante é a figura ter o formato triangular com seus vértices como posições a serem coloridas e não o tipo de triângulo em questão, pois se problemas que envolvem a simetria das figuras já tiverem sido trabalhados, é comum, no início da discussão, que a atenção seja voltada para este aspecto. Uma discussão cuidadosa possibilita a conclusão de que o fato relevante contido nos dados do problema consiste na ligação entre as bolinhas, duas a duas e não a aparente simetria da figura. Somente depois da discussão da apresentação do primeiro quadro é que se recomenda a apresentação do restante, como segue:

Vejam duas maneiras diferentes de colorir a Figura 1.



Observa-se que a interpretação dos exemplos anteriores, que fazem parte do enunciado do problema da OBMEP, é, na nossa recomendação, deliberadamente adiada para momento posterior à análise dos dados, para permitir um trabalho que valorize a discussão das diferentes interpretações, e, a partir delas, se possa construir a interpretação que aparece no enunciado do problema com a colocação das figuras. Mais precisamente, se os exemplos ilustrativos da situação-problema forem apresentados junto com o enunciado, perde-se uma oportunidade para exercitar a compreensão do mesmo.

Após a discussão, e antes mesmo de definir estratégias para a resolução do problema, é importante que se experimente pintar figuras em uma folha, com mais desenhos do que o necessário, de modo que quem faz a coloração possa perceber *per si* uma estratégia para contagem. Um modelo de folha para esta atividade encontra-se na página 93.

Ao executar a tarefa de colorir as várias figuras da folha de atividade, percebe-se que uma maneira de organizar as várias possibilidades como solução é a tomada de decisões sobre a cor em cada vértice da figura. A sistematização deste trabalho leva à estratégia de utilização da árvore de possibilidades como um procedimento que pode e deve ser introduzido como uma técnica de aprendizagem desde o 6º ano do Ensino Fundamental. A estrutura da árvore de possibilidades permite perceber o princípio multiplicativo de contagem, pela observação de que todos os “ramos” têm o mesmo número de possibilidades e é importante sistematizar este conteúdo para posteriormente diferenciá-lo do princípio aditivo, presente no próximo problema escolhido.

2.2. PROBLEMA 2 – BQ – OBMEP 2012 – NÍVEL 1 – QUESTÃO 21 (PARTE 2)

Ana também quer colorir as bolinhas da Figura 2, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 2? Vejam duas maneiras de colorir as bolinhas:

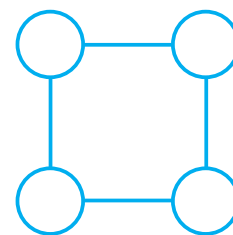
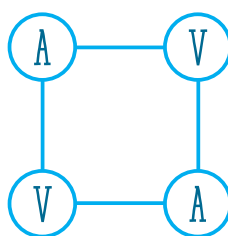
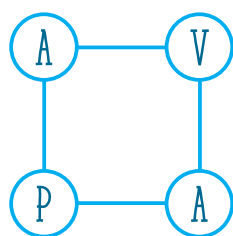


Figura 2



RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: A abordagem proposta para este problema segue as mesmas recomendações do problema anterior: colorir os vértices de quadrados em uma folha impressa em que constem mais quadrados do que o resultado da contagem e, montar a árvore de possibilidades. Depois de montada a árvore, identificar e destacar os casos, separando-os quando se utilizar duas ou três cores, assim estabelecendo a conexão do princípio de adição com a utilização do conectivo “ou”. É importante finalizar a abordagem do problema com sistematização organizada dos princípios de contagem (aditivo e multiplicativo) trabalhando a diferença entre os conectivos “e” e “ou”. Uma exploração didática do problema que leva à compreensão dos elementos importantes envolvidos no problema, consolidando as ideias que foram desenvolvidas por meio da resolução do problema, pode ser vista nos próximos quadros apresentados, os quais, recomendamos, sejam trabalhados um a cada vez:

Retomando as Figuras 1 e 2 ...

(c) Qual a diferença fundamental entre as Figuras 1 e 2 que produz resultados diferentes nas duas contagens?

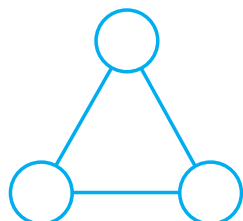


Figura 1

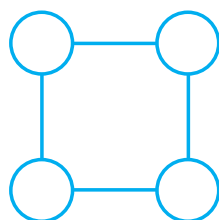


Figura 2

Ainda contando...

(d) O que ocorre se acrescentarmos uma das diagonais do quadrado? Altera o resultado da contagem das maneiras de colorir a Figura 2?

(e) E se unirmos as bolinhas diagonalmente opostas por um caminho fora da figura?

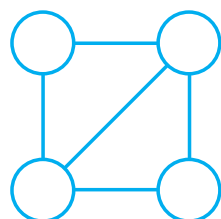


Figura 3

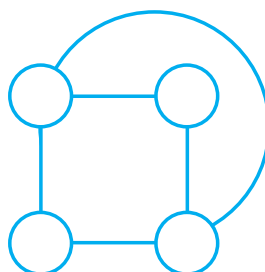


Figura 4

(f) De quantas maneiras diferentes podemos colorir a figura a seguir?

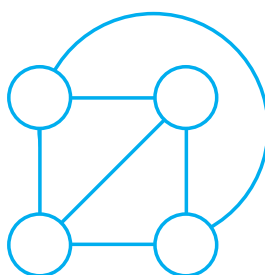


Figura 5

(g) Qual o número mínimo de cores que devemos usar para unir as bolinhas, diagonalmente opostas, para que um caminho, fora da figura tenha solução?

O fato mais importante na exploração das diferentes figuras é perceber que o caso com uma diagonal é equivalente ao do triângulo, e que o ponto principal não é a forma da diagonal, mas, sim, o fato dos dois vértices opostos estarem ligados

entre si (como mostra a Figura 4). A proposta seguinte em que os dois pares de vértices opostos estão ligados tem como objetivo reforçar esta ideia e levar à conclusão que, para este caso, o problema só tem solução se acrescentarmos mais uma cor. Neste caso é importante que sejam realizadas colorações com quatro cores.

Recomenda-se registrar por escrito as conclusões alcançadas.

Lembramos que, para usar a Resolução de Problemas como estratégia de ensino e aprendizagem, uma atividade importante é a fase que segue à solução do problema. É a oportunidade de investigação que não apenas valida a solução obtida, mas que permite estender a compreensão do conteúdo trabalhado por meio de questionamentos adequados para as variações do problema original.

2.3. PROBLEMA 3 – QUESTÃO 13 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – OBMEP 2012

De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura ao lado com uma das cores preto (P), azul (A) e vermelho (V), de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: A proposta é seguir o padrão de abordagem adotado, até o momento, com os problemas precedentes: a primeira atividade sendo a de colorir réplicas da figura em uma folha, lembrando-se da importância de haver mais figuras do que as diferentes formas de colorir para se chegar à conclusão de que o problema de colorir esta figura é equivalente ao caso do triângulo do Problema 1. Um questionamento que pode ser feito para conduzir à conclusão desta equivalência é indagar se existe alguma bolinha que possa estar ligada a outras duas coloridas com a mesma cor.

Ainda neste caso é interessante construir uma árvore de possibilidades e discutir a dificuldade que este trabalho requer, preparando o terreno para a postura de busca por estratégias de contagem advindas de casos mais simples.

O fechamento da discussão deste problema deve ser conduzido para o reconhecimento de que não importa de qual bolinha se começa a contagem, e comparar, caso tenha sido trabalhado o Problema 2, a estratégia da contagem com os do quadrado com uma diagonal ou sem uma diagonal. Observe o texto a seguir de P. C. Carvalho sobre estratégias para resolver problemas de contagem.

Qual é a estratégia para resolver problemas de contagem?

Postura • Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

Divisão • Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão.

Não adiar dificuldades • Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, esta é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Carvalho, P.C. – Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC – OBMEP, p. 7

2.4. PROBLEMA 4 – BQ – OBMEP 2012 – 1 – QUESTÃO 21 – NÍVEL 1 – VARIAÇÃO

Para compreender e, também, ilustrar os princípios listados no último parágrafo, o Problema inicia com uma variação de um problema do BQ, investigando um caso simplificado para preparar a abordagem do problema em si.

Como já destacado anteriormente, ao conduzir a Resolução de Problemas é importante fazer questionamentos adequados para propiciar o desenvolvimento do raciocínio. Também, considerando que o melhor ao resolver um problema de contagem é não adiar dificuldades, os primeiros questionamentos devem ser no sentido de conduzir à identificação da “maior dificuldade” na contagem, que aparece na bolinha com maior número de conexões (maior grau de incidência no grafo

correspondente). Pelos princípios descritos, é por esta bolinha que iniciamos a contagem.

A proposição do problema como aparece no BQ da OBMEP, enfatiza o princípio trabalhado e a importância da abordagem de casos mais simples.

Ana ainda quer colorir as bolinhas da Figura 6, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que as bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.
(h) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 6?

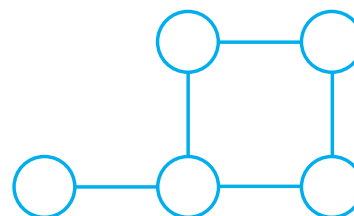


Figura 6

Após explorar a variação mais simples, o problema do BQ se torna mais claro. Agora, basta decidir, qual seria a escolha natural da bolinha por onde devemos montar o esquema de contagem.

Ana ainda quer colorir as bolinhas da Figura 7, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que as bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.
(i) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 7?

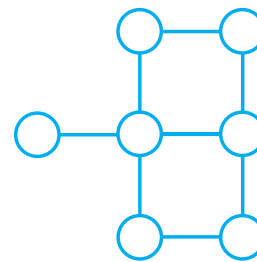
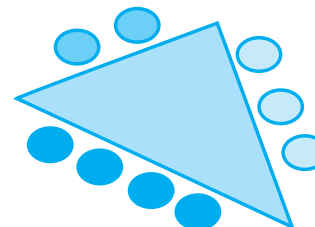


Figura 7

2.5. PROBLEMA 5 – OBMEP 2012 – 1ª FASE – QUESTÃO 18 – NÍVEL 3

Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras estes amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Os questionamentos iniciais para atacar este problema são:

1. Por onde é melhor começar a contagem? O que leva a observar a mesa com 3 lados que sugerem ser considerados caso a caso para o casal sentar?
2. Facilita a contagem pensar no casal agrupado? A informação do problema sugere que o casal seja contado como uma unidade?

A estratégia de considerar os lados da mesa para as posições em que o “casal” pode se sentar, como casos distintos que podem ser computados, pelo princípio aditivo, surge de maneira natural. Logo $(1 + 2 + 3) = 6$, é o número de maneiras que o casal pode sentar-se em cada um dos lados da mesa. Depois que o casal se sentar, para cada caso sobram 7 lugares que devem ser ocupados por 4 amigos restantes, e o princípio multiplicativo fornece a contagem de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras. Como o casal pode trocar de lugar entre si, o número total de maneiras que os amigos podem se sentar à mesa é $\{2 \times [6 \times 840]\} = 10080$.

2.6. PROBLEMA 6 – QUESTÃO 16 – NÍVEL 2 – 1ª FASE – OBMEP 2012

Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

Neste problema a dificuldade de apresentar uma listagem, resultante da contagem caso a caso, deve servir de motivação para questionamentos que levem à discussão de quais são as restrições mais significativas. Como sempre, o trabalho deve ser conduzido tendo em vista generalizações que não devem ser propostas no momento em que o problema está sendo pensado. O foco precisa estar, inicialmente, sobre os questionamentos que levem à reflexão sobre os dados e se a posição que os algarismos 2 ou 3 ocupam na escrita dos números é

importante ou não, o que pode conduzir à percepção de estratégia adequada de contagem. Para levar os alunos a perceberem o que ocorre, uma sugestão é iniciar com os números de 1 a 99, identificando os argumentos que justificam as respostas, neste caso simplificado. Após isto, ampliar para a primeira centena, de modo a perceber o padrão na argumentação e descobrir qual é a restrição que implica a solução.

A partir da discussão de casos mais simples pode-se discutir se é mais conveniente começar com a restrição “não ter o algarismo 3” ou com a restrição “ter o algarismo 2”. Começando com não ter o algarismo 3, pode-se, a seguir, retirar os que não tem o algarismo 2, ficando com os que não tem o algarismo 3 e tem o algarismo 2: o total de números entre 0 e 999 que não possui o algarismo 3 é: $9 \times 9 \times 9$, retirando-se, dentre estes, os que não tem o algarismo 2 ficamos com $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$. Por outro lado, se começamos com a contagem considerando ter o algarismo 2, teremos mais casos a analisar: “ter apenas um algarismo 2” (que se divide em estar na casa das unidades, das dezenas, ou das centenas) ou “ter dois algarismos 2” (unidade e dezena, unidade e centena, ou dezena e centena) ou “ter três algarismos 2”, o que nos conduz à expressão: $(3 \times 8 \times 8) + (8 + 8 + 8) + 1 = 192 + 24 + 1 = 217$. Destaque-se que na primeira forma de contagem trabalha-se com uma dupla negação, que nem sempre é fácil de ser percebida por alunos do Ensino Fundamental. Para este nível de ensino, a contagem pode ser por identificação de casos. Assim, com grupos de alunos do Ensino Fundamental, pode ser abordada a contagem direta separando caso a caso, uma vez que é nestas séries que se discute o sistema decimal posicional e as operações com números naturais. Para os alunos de Ensino Médio, que já trabalham com a ideia de conjunto complementar, a primeira forma é a mais direta (e não adia nenhuma dificuldade): conta-se quantos não tem o algarismo 3 e retira-se (dupla negação) os que não tem o algarismo 2, chegando-se aos que não tem o algarismo 3 e tem o algarismo 2, diretamente.

2.7. PROBLEMA 7 – BQ - OBMEP 2012 – QUESTÃO 26 – NÍVEL 1

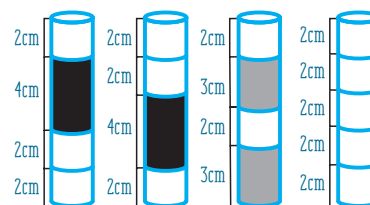
Este é um problema em que a exploração das propriedades da aritmética está contextualizada em uma situação geométrica. Recomenda-se, nas séries iniciais, que a abordagem seja feita por meio de simulações empíricas que conduzam ao argumento completo.

Caroba tem várias peças em forma de cilindro de três tipos:

a) brancas de 2cm de altura

b) cinzas de 3cm de altura

c) pretas de 4cm de altura



Com estas peças ela pode montar torres de 10cm.

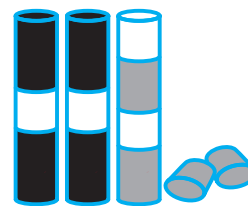
Descrevemos cada torre listando as alturas de suas peças, debaixo para cima; por exemplo, as torres da figura anterior, da esquerda para a direita, são descritas por $(2,2,4,2)$, $(2,4,2,2)$, $(3,2,3,2)$ e $(2,2,2,2)$:

a) Descreva todas as diferentes torres de 10cm que a Caroba pode fazer com três peças.

b) Com 12 peças, sendo 4 de cada uma das cores, a Caroba conseguiu montar 3 torres de 10cm, tendo sobrado duas peças de 2cm, como na figura abaixo.

Descreva como a Caroba pode montar 7 torres de 10cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.

c) Explique porque a Caroba não vai conseguir montar 8 torres de 10cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.



Seguem alguns questionamentos que podem ser feitos para estimular o raciocínio dos alunos:

- É possível montar as 7 torres utilizando todas as peças?
- Você consegue descrever uma situação em que sobre um menor número de peças? Quais são estas peças?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: É importante lembrar que a dinâmica de uma aula de Resolução de Problemas

depende de se proporcionar tempo apropriado para que cada aluno possa explorar e utilizar seu próprio conhecimento na compreensão do problema e montagem das estratégias de resolução. O papel do professor deve ser o de instigar o raciocínio, fornecendo, oportunamente, perguntas-chave que auxiliem no caminho da descoberta do aluno, sem, no entanto, oferecer a solução. Ao explorar o problema com os alunos, o professor poderá manipular modelos concretos, por exemplo, usando tiras coloridas de papel com medidas correspondentes, para explorar propriedades aritméticas como: decomposição de um número em diferentes parcelas; comutatividade e associatividade da adição; divisibilidade, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; algoritmo da divisão.

O registro de resultados de cada experiência manipulativa que os alunos tenham realizado é uma rica oportunidade de exercitar a sistematização das propriedades algébricas das operações aritméticas que preparam o pensamento algébrico nos anos seguintes do Ensino Fundamental.

3. LÓGICA E ÁLGEBRA

A Parte 3 aborda problemas que envolvem conteúdos de Lógica e Álgebra. O Problema 1 mostra como um raciocínio organizado com a técnica de árvore de possibilidades trabalhada nos problemas de Contagem e Combinatória pode auxiliar a resolução de problemas que envolvem a lógica.

Sabendo que a introdução ao raciocínio algébrico constitui uma das dificuldades na matemática escolar na transição entre a aritmética das operações e a linguagem de equações, os problemas propostos são abordados com o Método de Barras, presente na proposta de livros didáticos de Singapura. Na abordagem dos Problemas 4 e 5, introduz-se a essência deste Método. A importância de questionamentos estratégicos que ampliam o significado dos conteúdos matemáticos continuam a ser enfatizados nos questionamentos, como mostrado na estratégia de resolução do Problema 3. Nos problemas propostos não há utilização de material concreto, mas da representação pictórica como uma ferramenta para auxiliar a aprendizagem de conceitos abstratos.

3.1. PROBLEMA 1 – QUESTÃO 20 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – OBMEP 2012

O Problema 1 é trabalhado com a técnica de árvore de possibilidades para organizar o raciocínio.

Três casais fizeram compras em uma livraria. Vitor comprou 3 livros a mais do que Lorena e Pedro comprou 5 livros a mais do que Claudia. Cada um dos homens comprou 4 livros a mais do que a respectiva esposa. Lorena e Claudia compraram mais livros do que Bianca, que só comprou 3 livros. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- a) Vitor comprou mais livros do que Pedro.*
- b) Pedro é marido de Claudia.*
- c) Pedro foi o marido que comprou o maior número de livros.*
- d) Claudia comprou um livro a mais do que Lorena.*
- e) Vitor é marido de Bianca.*

A solução do problema requer saber quem está casado com quem para determinar a veracidade de cada item proposto.

No quadro seguinte estão destacadas as informações no enunciado que são consideradas dados do problema:

1. *Cada homem comprou 4 livros a mais do que a respectiva esposa.*
2. *Bianca comprou somente 3 livros.*
3. *Vitor comprou 3 livros a mais do que Lorena.*
4. *Pedro comprou 5 livros a mais do que Claudia.*
5. *Lorena e Claudia compraram mais livros do que Bianca.*

Ao organizar os dados sob a forma de árvore de possibilidades pode-se construir uma rede de deduções que permitirá a análise final.

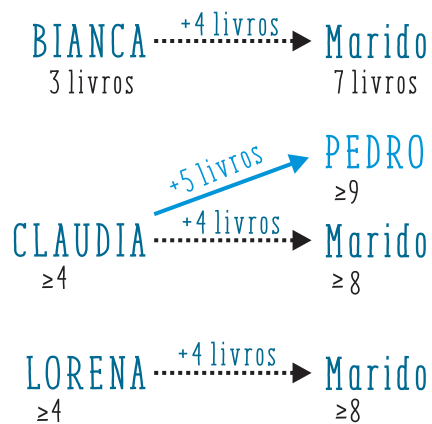
A primeira decisão é “Por onde começar o registro desses dados na forma de uma árvore de possibilidades?”. O raciocínio se inicia com um questionamento básico da tomada de decisões: **“Qual é a informação definitiva que temos sobre as pessoas envolvidas (dados do problema)?”**

A informação definitiva de que dispomos é de que Bianca comprou exatamente 3 livros (2), as outras são dados relativos às pessoas envolvidas no problema e que precisam ser organizados e analisados. Usando esta informação, podemos “iniciar com as mulheres”, a partir das quais registramos a informação de que seus maridos, que em princípio não sabemos quem sejam e sim que compraram 4 livros a mais que cada uma delas (1), como ilustrado a seguir.



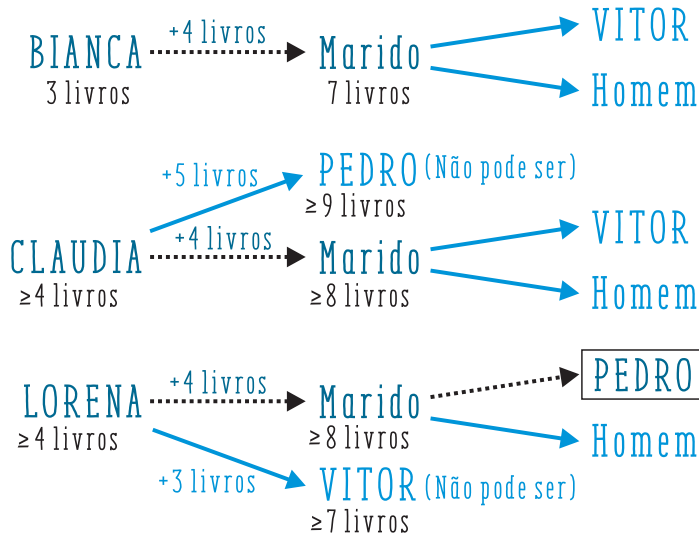
A primeira dedução é imediata e os próprios alunos participarão no registro: **O marido da Bianca comprou 7 livros.**

Combinando a informação de que Claudia e Lorena compraram mais livros que Bianca (5) com a de que Pedro comprou 5 livros a mais que Claudia (4), deduz-se que Claudia e Lorena compraram 4 ou mais livros e elimina-se a possibilidade do Pedro ser o marido da Claudia assim como da Bianca. Pelo fato da análise de cada dado promover um diálogo, toda dedução pode ser trabalhada por meio de questionamentos para que os próprios alunos deduzam e registrem as respostas na árvore, como no diagrama a seguir.



O registro agora passa para as possibilidades de número de livros que cada marido pode ter comprado. Denotando simplesmente por 'Homem', o 3º homem de nome não fornecido, e completando a informação (3) de que Vítor comprou 3 livros a mais que Lorena, conclui-se que Vítor não pode ser o marido de Lorena.

As possibilidades para analisar os nomes de maridos para cada mulher são representadas no diagrama da árvore com setas e são lidas com o conectivo **OU**.



O registro da árvore conduz à etapa de decidir, por meio de dedução, “quem é o marido da Lorena”, entre Pedro e Homem. Já havíamos deduzido que Pedro não poderia ser marido nem da Claudia nem da Bianca, logo o marido da Lorena tem que ser Pedro. Mas, podemos conduzir ainda mais a dedução. A informação já deduzida de que Pedro comprou 5 livros a mais que Claudia combinada com (1), a de que ele comprou 4 livros a mais que sua esposa, permite deduzir que “**Claudia comprou menos livros que Lorena**” além do que “**Pedro é o marido da Lorena**”. Esta etapa crucial trabalhada com a classe por meio de questionamentos é facilitada se todas as etapas anteriores estiverem organizadas e visualizadas como no diagrama acima.

O registro até agora fornece condições suficientes para analisar cada um dos itens do problema, lendo os dados no diagrama, exceto o item E:

- a) Vítor comprou mais livros que Pedro. **FALSO**.
- b) Pedro é marido de Claudia. **FALSO**.
- c) Pedro foi o marido que mais comprou livros. **VERDADE**
- d) Claudia comprou um livro a mais que Lorena. **FALSO**.
- e) Vítor é marido de Bianca.

Como o item C) se mostrou verdadeiro, como resposta ao problema proposto já poderia parar. Porém, completar a análise faz parte da investigação de um problema. Para a análise do item E), deve ser observado que a árvore construída até o momento deixa em aberto os nomes dos maridos, exceto Pedro. Raciocina-se agora que, **SE** Vítor fosse marido de Bianca, ele teria comprado exatamente 7 livros. Neste caso, como ele comprou 3 livros a mais que Lorena, esta teria comprado exatamente 4 livros. Como Pedro é marido de Lorena, ele teria comprado exatamente 8 livros, o que é uma **CONTRADIÇÃO**, pois ele comprou mais que 9 livros.

Este é um exemplo de raciocínio lógico por redução ao absurdo, que com uso estratégico de visualização de todas as etapas da dedução, se torna acessível e compreensível mesmo para níveis escolares elementares do 6º e 7º anos.

Podemos deduzir também, como exploração do problema, quem são os casais, que não foi informado nem solicitado, observando-se que nem o nome do 3º marido foi dado, e que não foi necessário sabê-lo para a resolução do problema.

Os casais são: Bianca e Homem; Claudia e Vítor; Lorena e Pedro.

3.2. PROBLEMA 2 – QUESTÃO 19 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – OBMEP 2012

Este problema aborda o conteúdo de contagem num problema que é essencialmente de raciocínio lógico, no qual a leitura dos dados sugere imagens pictóricas para auxiliar a compreensão do contexto do problema. A solução é conduzida utilizando o Método de Barras na resolução de problemas.

A forte sugestão proporcionada pela visualização pictórica dos dados do problema estimula a descoberta dos caminhos para a resolução pelos próprios alunos.

Para decoração da festa junina, Joana colocou em fila 25 bandeirinhas azuis, 14 brancas e 10 verdes, sem nunca deixar que duas bandeirinhas de mesma cor ficassem juntas. O que podemos concluir com certeza desta informação?

Alternativas:

- A) Nas extremidades da fila aparecem uma bandeirinha azul e uma branca.*
- B) Há cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparece a cor verde.*
- C) Há pelo menos uma bandeirinha branca ao lado de uma verde.*
- D) Pelo menos quatro bandeirinhas azuis têm uma branca de cada lado.*
- E) Não existe um grupo de três bandeirinhas consecutivas todas de cores diferentes.*

O argumento passa por perceber a estratégia em raciocinar separando as bandeirinhas azuis, por ser de maior número. Como um caso simplificado para auxiliar, pode ser sugerido uma sequência como segue:

1. Considerando apenas duas cores, se houver 5 bandeiras azuis e 3 verdes, existe possibilidade de distribuição que não tenha duas de mesma cor juntas? Quantas distribuições existem?

2. Com apenas duas cores, azul e verde, e 5 bandeiras azuis qual é o número mínimo de bandeiras de modo que duas de mesma cor não fiquem juntas?

3. No problema proposto, para separar as bandeirinhas azuis qual é o número mínimo de bandeirinhas que precisamos utilizar? Experimente uma representação.

4. Qual é o número total de bandeirinhas, no problema proposto? (A representação, como no diagrama a seguir, pode ajudar na visualização.)

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B												
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V																

5. Qual é o número total de bandeirinhas verdes ou brancas?

6. Com o total de bandeirinhas verdes ou brancas, é possível separar todas as bandeirinhas azuis? Por quê?

Com as respostas obtidas podemos analisar as alternativas:

A) Nas extremidades da fila aparecem uma bandeirinha azul e uma branca.

FALSA.

Para a afirmação ser verdadeira o número total de espaços entre duas bandeirinhas azuis deve ser menor que o número total de bandeirinhas brancas ou verdes, o que não ocorre.

B) Há cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparece a cor verde.

VERDADEIRA.

Como são 10 bandeirinhas verdes e 14 bandeirinhas brancas em algum momento existirão dois espaços "consecutivos" que serão ocupados por bandeirinhas brancas. Assim a distribuição será A B A B A, ou seja, serão cinco bandeirinhas consecutivas sem bandeirinha verde intercalada.

C) Há pelo menos uma bandeirinha branca ao lado de uma verde. FALSA.

Como para separar as bandeirinhas azuis precisamos de exatamente 24 bandeirinhas e o total de bandeirinhas verdes ou brancas é 24, elas serão sempre usadas para separar as azuis, ou seja serão sempre ladeadas por bandeirinhas azuis.

D) Pelo menos quatro bandeirinhas azuis tem uma branca de cada lado. FALSA.

Isso pode ocorrer em alguma distribuição, mas numa distribuição que intercala 2 brancas e uma verde, por sete vezes, entre duas azuis, sobrarão, ainda, 3 verdes para intercalar, e isso não ocorrerá.

E) Não existe um grupo de três bandeirinhas consecutivas de cores todas diferentes. FALSA.

Qualquer que seja a distribuição das bandeirinhas, em algum momento haverá uma azul, uma branca, outra azul, uma verde, pois temos exatamente 24 bandeirinhas verdes ou brancas e queremos separar 25 bandeirinhas azuis.

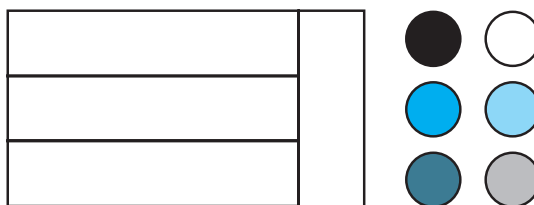
3.3. PROBLEMA 3 – ADAPTADO DE PIC OBMEP – APOSTILA 2 (p. 12-13)

O Problema 3 explora a transição entre a Aritmética e a visualização com representação pictórica, como um meio de consolidação das técnicas já estudadas nos problemas de contagem em situação geométrica.

Para pintar a bandeira abaixo estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.

(a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?

(b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?



RECOMENDAÇÃO PARA O PROFESSOR: Este é um problema que pode ser abordado depois dos anteriores que trabalham a contagem, pois o reconhecimento da situação de contagem, fazendo uma análise comparativa com situações abordadas em problemas anteriores, serve como uma avaliação da compreensão efetiva dos princípios de contagem que nortearam as suas resoluções.

3.4. PROBLEMAS 4 E 5 E O MODELO DE BARRAS

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: O Modelo de Barras, como estratégia que auxilia a transição do pensamento aritmético com dados numéricos concretos para a abstração requerida nos problemas de Álgebra, por meio da compreensão da atribuição de significados aos símbolos no lugar de valores numéricos, é uma das técnicas de ensino e aprendizagem da Matemática em nível básico no currículo de Singapura que se revela um valioso auxiliar na transição entre a Aritmética e a Álgebra do Ensino Fundamental, especialmente no 6º e 7º ano.

Neste texto, trabalhamos alguns problemas para explorar o Modelo de Barras como uma estratégia de resolução, destacando os significados das deduções a partir da análise de dados que conduzem à solução do problema proposto e sua validação.

O Modelo de Barras tem o papel de minimizar o salto existente entre o ensino de Aritmética e a Álgebra, com abordagem puramente abstrata, oferecendo oportunidades de trabalhar com modelo pictórico como representação visualmente concreta de situações abstratas, antes de partir para a representação simbólica com letras e/ou expressões e equações.

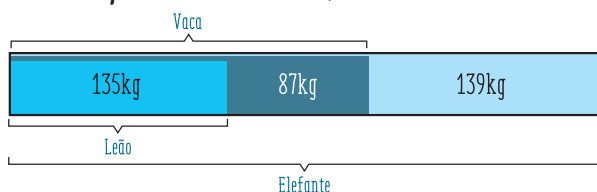
Os Problemas 4 e 5 são exemplos retirados da Matemática de Singapura e são usados para mostrar como o Modelo de Barras pode ser trabalhado desde o 2º ano para associar significados a situações-problema.

PROBLEMA 4. Exemplo criado por professor (2º ano elementar) Escola Primária Telok Kurau, Singapura

(Exemplo de Modelo de Barras, Matemática de Singapura, Ban Har Yeap, para NCTM 2010. Problema de 2º ano Escola Telok Kurau)

Um leão pesa 135kg. Uma vaca pesa 87kg a mais do que o leão. Um elefante pesa 139kg a mais do que a vaca.

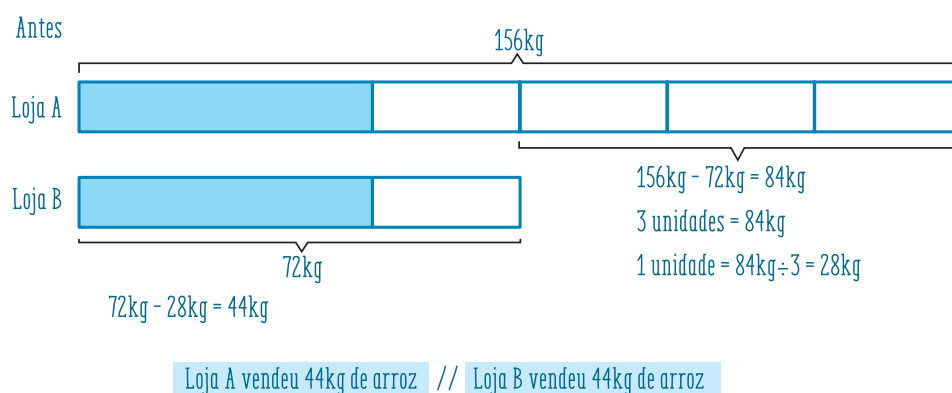
Quanto pesa o elefante (Qual é a massa do elefante?)



A representação pictórica de valores numéricos dos dados por meio de barras colocadas juntas para identificar a “junção” (adição de valores) é uma estratégia que os alunos assimilam integrando os significados para as primeiras operações básicas da Aritmética.

PROBLEMA 5. Antes, a loja A tinha 156kg de arroz para vender e a loja B 72kg. Depois de venderem a mesma quantidade de arroz, verificou-se que a loja A tinha ainda 4 vezes a quantia que havia restado na loja B. Qual foi a quantia que a loja A vendeu?

(Exemplo de Modelo de Barras, Matemática de Singapura, Ban Har Yeap, para NCTM 2010. Problema de 6º ano elementar)



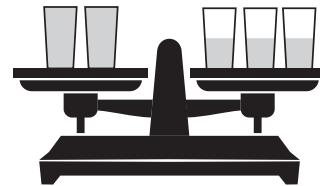
Podemos observar que a representação pictórica por barras possui a vantagem de registrar todos os dados do problema com sua interpretação, de modo que permite rastrear os argumentos e raciocínios passo a passo, durante e após a reso-

lução do problema, permitindo inclusive validar a solução. A identificação de uma “unidade”, chave para justificar a operação a ser efetuada, está no cerne da estratégia de resolução.

3.5. PROBLEMA 6 – OBMEP 2012 – 1ª FASE – QUESTÃO 11 – NÍVEL 1

Para compreender melhor a Metodologia apresentada acima, adaptamos seus princípios para trabalhar as noções de Álgebra que estão subjacentes no seguinte problema da OBMEP.

A balança da figura está equilibrada. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400 gramas de farinha. Os copos do prato da esquerda estão completamente cheios e os copos do prato da direita estão cheios até a metade de sua capacidade. Qual é o peso, em gramas, de um copo vazio?



Para começar o problema é preciso inicialmente entender os dados e o que está sendo solicitado, como destacado a seguir:

- Há dois tipos de objetos na balança: copos e seu conteúdo, a farinha.
- O peso total da farinha é dado.
- O número de copos em cada lado da balança é dado. O modo como a farinha está distribuída nos copos é dado.
- Sabe-se que a balança “está equilibrada”. (O que significa está equilibrada?)
- É solicitado calcular o peso de 1 copo.

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: O questionamento sobre a interpretação da balança estar equilibrada, leva a analisar o significado das diversas formas em que o sinal da igualdade (=) é usado no contexto elementar da Matemática (ver quadro a seguir).

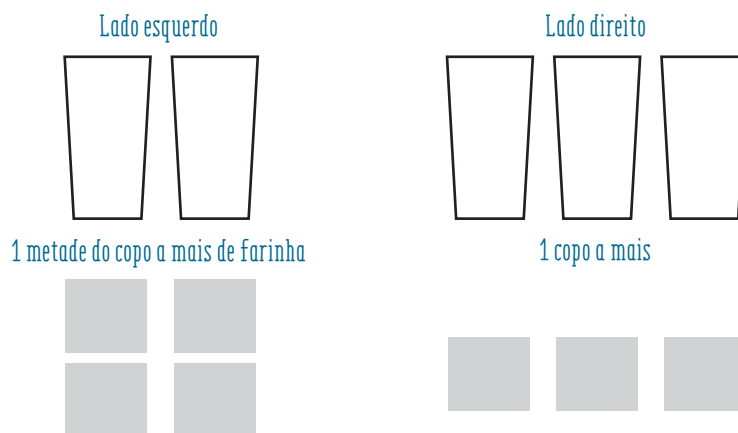
ENTENDER O CONCEITO DE EQUAÇÃO E O SIGNIFICADO DE =

1. Quando operamos números, por exemplo, somamos 13 e 18, o resultado 31 é representado como $13 + 18 = 31$, significando que a expressão $(13 + 18)$ tem valor igual a 31.
2. Quando comparamos duas quantidades/expressões que são iguais, usamos o sinal = e temos uma igualdade, por exemplo, $8 - 2 = 3 \times 2$.
3. Resolver uma equação, como $3 + X = 8$, significa encontrar um número X que torna a equação uma igualdade.

Com o problema apresentado, podemos interpretar e representar os dados visualmente por figuras pictóricas, que estimulem o reconhecimento das operações que necessitam ser executadas, após a identificação da incógnita adequada para a estratégia de resolução. O reconhecimento do conceito de equação no problema proposto, é um dos primeiros resultados alcançados pela modelagem pictórica. Observa-se que o pensamento algébrico é desenvolvido antes de introduzir a linguagem simbólica com letras para a incógnita.

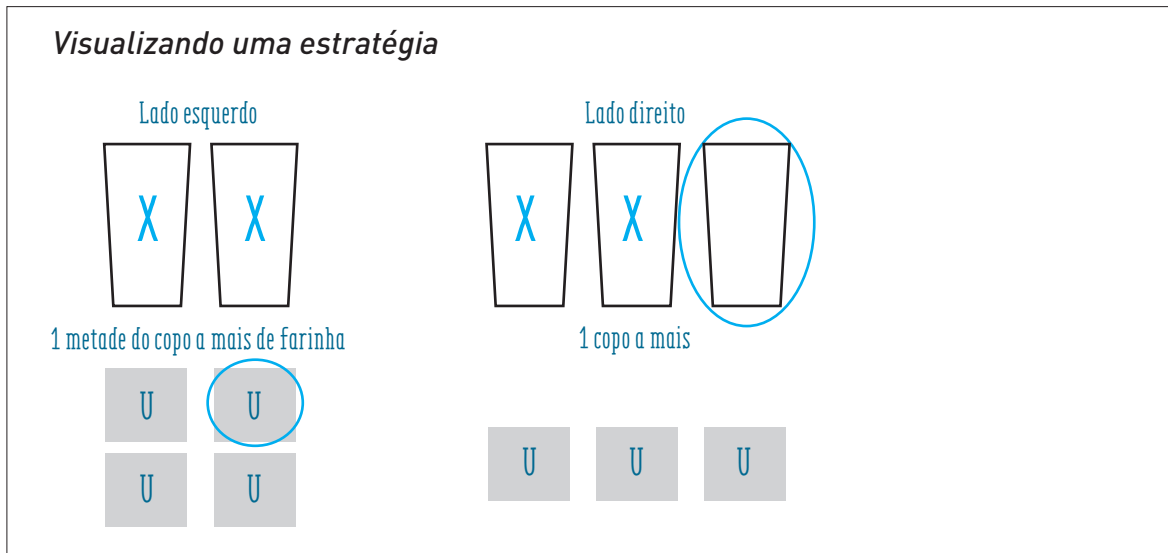
Visualizando o Problema 5:

Uma balança de dois pratos (cada quadro representa um prato)



Comparando os dois lados da balança, o lado esquerdo tem $1/2$ copo de farinha a mais que o lado direito, que por sua vez tem um copo a mais, representado na parte inferior do quadro anterior, para facilitar a identificação da metade. Esta diferença, resultante da comparação, permite concluir que, como a balança está "equilibra-

da”, a massa de 1 copo é igual à de $\frac{1}{2}$ copo de farinha. Assim, para se chegar à resposta, precisamos saber a massa de meio copo de farinha. Na figura “vemos” que $\frac{1}{2}$ copo de farinha pode ser utilizado como “unidade de contagem” e observar que existem 7 unidades no “total”, que é um dado do problema (1400 gramas). Agora, podemos calcular o valor da “unidade” desta modelagem, e a comparação dos lados da balança permite obter o solicitado.



RESOLVENDO O PROBLEMA SEGUINDO A ESTRATÉGIA:

CALCULANDO A UNIDADE:

$$7 \text{ unidades} = 1400$$

$$1 \text{ unidade} = 1400 \div 7 = 200$$

1 unidade = massa de $\frac{1}{2}$ copo de farinha

Massa de $\frac{1}{2}$ copo de farinha é igual à massa de 1 copo

Logo temos:

RESPOSTA: 1 copo pesa 200g

VALIDANDO O RESULTADO OBTIDO:

LADO ESQUERDO DA BALANÇA: 2 copos cheios

$$\text{Massa dos copos: } 2 \times 200 = 400$$

$$\text{Massa da farinha: } 4 \times 200 = 800$$

$$\text{Massa total do lado direito: } 400 + 800 = 1200 \text{ (g)}$$

LADO DIREITO DA BALANÇA: 3 copos com farinha pela metade

$$\text{Massa dos copos: } 3 \times 200 = 600$$

$$\text{Massa da farinha: } 3 \times 200 = 600$$

Massa total do lado esquerdo: $600 + 600 = 1200$ (g)

Massa total do lado esquerdo = Massa total do lado direito

Balança está equilibrada, confere com o dado.

Peso total da farinha: $800 + 600 = 1400$ (g). Confere com o dado.

Uma observação importante após ter vivenciado a Metodologia do Modelo de Barras (pictórico), na resolução de um problema da OBMEP, é sobre a “validação” do resultado obtido dentro da Metodologia de Resolução de Problemas.

É frequente, alunos interpretarem a validação de um resultado obtido como “conferência” da operação realizada, isto é, se o cálculo foi realizado corretamente. É necessário muita atenção para elevar esta percepção a um novo patamar em que a validação do resultado deva envolver também a análise da coerência da resposta em relação ao requerido pelo problema. Isto quer dizer que devemos verificar se o resultado realmente atende, sem contradições, aos dados solicitados pelo problema. A fase de investigação apontada por Polya se faz presente sob esta perspectiva.

REFLEXÃO:

A introdução à resolução de equações pode ser feita, nos anos elementares e no início do 2º ciclo, sem usar abstração do registro formal com o uso de letras para representar ‘valores numéricos’ das variáveis.

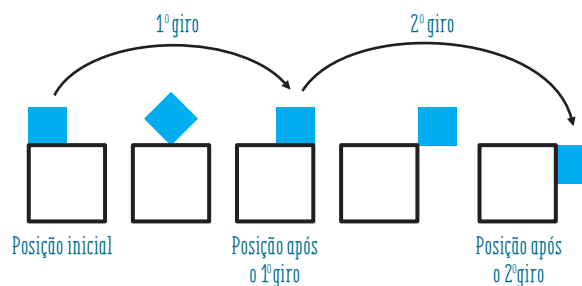
A compreensão do problema e o raciocínio por trás da estratégia, que são facilitados pela representação por modelos pictóricos, auxiliam a transição para a linguagem abstrata da Álgebra nos últimos anos do Ensino Fundamental.

A reflexão acima se refere à constatação de que é possível, com uma metodologia adequada, desenvolver raciocínio algébrico resgatando o conhecimento prévio construído de maneira mais direta por visualização concreta, antes de associar este raciocínio à abstração da simbologia da Álgebra, uma das dificuldades de aprendizagem no final do Ensino Fundamental.

3.6. PROBLEMA 7 – QUESTÃO 9 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – OBMEP 2012

O Problema 7 aborda tópicos de Aritmética e de Álgebra cuja resolução envolve fortemente a compreensão da situação do problema por meio de propriedades geométricas dos dados para modelar uma equação algébrica. Os questionamentos apropriados fazem parte da estratégia de resolução deste problema.

Um quadrado de lado 1cm roda em torno de um quadrado de lado 2cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior. Qual é a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



ALGUNS QUESTIONAMENTOS POSSÍVEIS:

- Quantos giros são necessários para o quadrado menor mudar de lado?
- Quantos giros são necessários para o quadrado menor voltar à posição inicial?
- O que acontece de 8 em 8 giros?
- Qual é a posição do quadrado menor após o 40º giro?
- E após o 41º giro?
- E após o 2012º giro?

Os questionamentos levam a um reconhecimento do conceito de algoritmo da divisão na modelagem contextualizada em uma situação-problema geométrica. Problemas de Matemática que integram áreas distintas trazem uma variação rica para o material que pode ser trabalhado em sala de aula. Um problema correlato é apresentado no quadro a seguir:

*Em que dia da semana
caiu 7 de setembro de 1822?*

SETEMBRO 2016						
SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB	DOM
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

3.7. PROBLEMA 8 – OBMEP 2012 – 1ª FASE – QUESTÃO 10 – NÍVEL 2

O próximo problema requer raciocínio algébrico, mas o conteúdo matemático envolve apenas a representação decimal posicional e a distinção que existe entre algarismo e o valor numérico do algarismo na representação posicional.

Se A e B representam algarismos diferentes e o valor de $A \times A + A$ é o número de dois algarismos AB , qual é o valor de $B \times B + B$?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Este é um problema que pode ser usado para a transição entre Aritmética e Álgebra no 2º ciclo do Ensino Fundamental, promovendo o desenvolvimento do raciocínio abstrato. Para isso, é importante ter em mente qual é o objetivo deste problema e por que ele é importante dentro do conteúdo curricular. Observar que o problema se relaciona com a competência de desenvolver pensamento algébrico, isto é, perceber o significado das propriedades algébricas das operações básicas na estrutura da representação decimal, um conteúdo básico da Matemática nos anos iniciais do Ciclo Fundamental, é importante para abordagem em sala de aula.

A seguir estão destacados os dados e a resolução do problema.

Dados do problema:

- São dados dois algarismos diferentes A e B.
- A expressão $A \times A + A$ calculada com o valor de A, fornece como resultado o número AB.
- **Solicitado:** O valor da expressão $B \times B + B$.
- **Compreendendo os dados:**
- Significado da representação AB no sistema decimal: O número registrado (representado) como AB significa A na casa das dezenas e B na casa das unidades, logo o valor de AB é: $10 \times A + B$.
- A igualdade de valores entre a expressão fornecida e o valor de AB se torna uma equação.

Estratégia que emerge da compreensão dos dados:**RESOLVER A EQUAÇÃO****Colocando a estratégia em ação para resolver:**

$AB = (10 \times A) + B$ (compreensão da representação decimal)

$A \times A + A = AB$ (dado do problema) conduz a:

$A \times A + A = (10 \times A) + B$, produzindo uma equação

a resolver em B

$A \times A + A - (10 \times A) = (10 \times A) - (10 \times A) + B$ (princípio

da balança para a igualdade numa equação),

$(A \times A) - (9 \times A) = B$ (valor de B depende do valor

do algarismo A)

$(A \times A) - (9 \times A) = (A - 9) \times A$ (propriedade distributiva da mul-

tiplicação em relação à adição ou, em linguagem escolar, co-

locando A em evidência)

Logo temos $A \times (9 \times A) = B$

Questionamento: Qual é o valor de A? Existem muitas soluções? Afinal, o problema diz que A é um algarismo qualquer... sendo diferente de B.

Raciocinando: Afinal, A pode mesmo ser um algarismo qualquer? Sendo B um algarismo, seu valor como número precisa ser não negativo. B é dado como produto de dois “números”: A e $(A - 9)$, onde o valor numérico de A também é não negativo. O que os alunos sabem sobre produto de dois números inteiros? Para obter um número não negativo multiplicando um número não negativo, o outro fator tem que ser também não negativo!

Isto é, deduzimos que $0 \leq A$ e $9 \leq A$. Como A é um algarismo seu valor numérico não pode ser maior que 9. Logo, A precisa ser exatamente 9.

Resposta: $B = A \times (A - 9)$, com $A = 9$, resulta $B = 0$. E neste caso, o valor solicitado de $B \times B + B$ é dado por $0 \times 0 + 0 = 0$.

Validando a resposta:

Com $A = 9$, temos $A \times A + A = 9 \times 9 + 9 = 81 + 9 = 90$.

O número AB formado com os algarismos $A = 9$ e $B = 0$ é $AB = 90$, o que confere a condição $A \times A + A = AB$. Assim, $B = 0$ é de fato o único valor do algarismo B que satisfaz as condições do problema.

3.8. PROBLEMA 9 – QUESTÃO 7 – NÍVEL 2 – 1ª FASE OBMEP 2012.

O Problema 9 trabalha ainda o raciocínio algébrico que proporciona oportunidade de trabalhar equações algébricas num problema de Aritmética.

Ana escreveu cinco números em uma folha de papel. Escondendo cada um deles e somando os outros quatro, ela obteve os seguintes resultados:

29, 32, 35, 39 e 41.

Qual é a soma do maior com o menor dos números que Ana escreveu?

Alguns questionamentos para compreensão dos dados e estabelecimento de estratégia:

- Podemos ter dois números iguais na sequência inicial?
- Como podemos representar os números da sequência inicial?

- Qual o número da sequência “escondido” na menor soma? E na maior soma? E nas demais somas?
- Como podemos relacionar as diferenças das somas e as diferenças entre os termos da sequência inicial?
- Como podemos obter os cinco números?
- Qual é a soma do maior com o menor dos números?

ANEXO A – APARENTE CONTRADIÇÃO

Para uma discussão da necessidade de construção de justificativas, um exemplo interessante de aparente contradição é apresentado com o uso do arquivo *Composicao_quadrado_contradicao.ggb*.

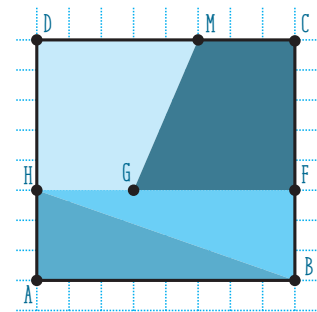
A atividade pode ser proposta com recorte de papel quadriculado, também.

ATIVIDADE: *Uma contradição?*

OBJETIVO: *investigar composição de figuras*

MATERIAL: *papel quadriculado e tesoura*

1. *Construir um quadrado com 64 quadradinhos de um papel quadriculado.*
2. *Decompor o quadrado em 4 figuras: dois triângulos retângulos (ABH e BHF) e dois trapézios retângulos (DHGM e FGMC).*
3. *Recortar as peças e tentar montar um retângulo.*



Alguns questionamentos que podem conduzir às conclusões desejadas são os seguintes:

- Qual é a área do quadrado inicial?
- Qual é a área do retângulo montado?
- As áreas são iguais?
- O que ocorreu?

- Quais são as inclinações do lado do trapézio e das hipotenusas dos triângulos?
- O que significa a diferença entre os resultados aparentemente contraditórios?
- Experimente dimensionar concretamente a diferença percebida e explorar seu significado. Experimente usar uma calculadora para suas considerações.

ANEXO B

1. CONHECENDO O SIGNIFICADO DA GEOMETRIA DINÂMICA COMO RECURSO DIDÁTICO

Para dar suporte a explorações matemáticas em ambiente de Geometria Dinâmica de distribuição livre, este roteiro tem como objetivo familiarizar os professores na utilização deste recurso.

O programa de Geometria Dinâmica GeoGebra pode ser acessado pelo *site* oficial do programa, <http://www.geogebra.org>. Ele permite trabalhar problemas de construção de objetos geométricos aliados a suas propriedades algébricas, daí justificando o nome GeoGebra.

A perspectiva inicial da utilização do GeoGebra é explorar seu potencial didático para construir o conhecimento sobre os conceitos geométricos básicos do currículo escolar, antes de associá-los à Aritmética que advém das medidas. As propriedades geométricas das figuras devem ser conhecidas para poder trabalhar a Álgebra dos números, e muitas vezes nos problemas escolares a ênfase é dada nas fórmulas e cálculos deixando em segundo plano os conceitos geométricos que determinam as estratégias algébricas.

1.1. O que faz um programa de Geometria Dinâmica?

Um programa de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, permite construir objetos geométricos segundo suas definições e lógica que segue a teoria axiomática da Geometria eu-

clidiana plana. O conceito “dinâmico” significa que os objetos construídos podem ser modificados por manipulações, mantendo as características e propriedades geométricas que lhes são próprias, por meio de definições. Isto permite considerar o arquivo em trabalho como um “micromundo” em que a experimentação e a investigação de propriedades geométricas podem ser realizadas.

Um arquivo do GeoGebra pode ser salvo usando a função “Gravar como” (nome.ggb) disponível no arquivo, na barra superior do programa. A barra de trabalho do GeoGebra se constitui de uma barra de gerenciamento do programa (como Arquivo, Editar, Exibir, Ferramentas, Opções, Ajuda) e logo abaixo da barra de funcionalidades, apresentada por janelas de ícones. Um arquivo salvo, no seu computador ou numa mídia móvel como *pen-drive* pode ser aberto e usado como material didático quando quiser, desde que o programa esteja instalado.

Vamos introduzir algumas funções úteis para operar o programa. Este roteiro não é um Manual do GeoGebra, mas ensina a trabalhar as atividades que compõem a proposta de Resolução de Problemas deste livro.

1.2. As atividades iniciais

A tela de abertura do programa GeoGebra apresenta áreas de trabalho, chamadas aqui de “Janelas”, que permitem as atividades de construção Geométrica e da Álgebra. As atividades iniciais são realizadas “fechando” a Janela de Álgebra, à esquerda da tela de abertura, clicando sobre o quadrado no lado direito superior da “Janela de Álgebra”.

Outra opção, se a tela inicial tiver uma janela de “Disposições” aberta no lado direito, é clicar sobre Geometria Básica ou Geometria, para notar que a tela se limpa, ficando pronta para ser trabalhada como uma folha de caderno de desenho. Se, ao fechar a Janela de Álgebra, a tela mostrar ainda os eixos cartesianos, clique sobre o ícone dos eixos na barra abaixo das janelas de funcionalidades do GeoGebra, e os mesmos serão ocultos.

2. CONHECENDO A LINGUAGEM DA GEOMETRIA DINÂMICA: OBJETOS LIVRES, OBJETOS DEPENDENTES (CONDICIONADOS E VINCULADOS)

Os objetos iniciais de qualquer problema de Geometria Plana são: ponto, segmento de reta, retas, semirretas, círculos. Todos eles se iniciam com o conceito de um “ponto”.

Ao iniciar uma atividade com GeoGebra, o “Ponteiro”, que tem a forma de uma flecha, na primeira Janela da Barra de Funcionalidades do Programa, tem a função de selecionar objetos e manipulá-los, executando o que seu “lápiz” faria ao desenhar na folha de caderno, conduzido por suas mãos.

ATIVIDADE 1: Ao posicionar o mouse na primeira Janela ao lado do Ponteiro na Barra de Funcionalidades, que tem a figura de um “Ponto”, abrem-se as opções desta Função, sendo a primeira “Ponto”. Selecione-a com o clique do mouse e em seguida o mouse é levado na tela a se transformar em um cursor para cada clique em lugares distintos da tela. Clique em lugares diferentes da mesma, livremente, e serão criados tantos pontos quantos forem os cliques. São objetos livres, no sentido de que não há condição nenhuma sobre suas posições. Selecione o “Ponteiro” e comece a manipular os pontos criados e verá que os mesmos podem ser transportados para qualquer lugar da tela. Cada ponto criado possui um rótulo com letra maiúscula, como A, B, C etc., como é a convenção em livros didáticos.

ATIVIDADE 2: *Construção de uma reta.*

O que sabemos sobre determinação de uma reta? Quantos pontos são necessários para traçar uma reta? Como procedemos para o traçado de retas no caderno, com o auxílio de régua? Vamos utilizar o mesmo princípio para utilizar a funcionalidade do GeoGebra. Na janela ao lado do Ponto, vemos a figura de uma reta passando por dois pontos.

Selecionada a opção “Reta definida por Dois Pontos”, leve o mouse sobre um dos pontos criados na Atividade 1, digamos o ponto A. Ao clicar sobre o ponto A verá formar uma reta

“móvel” passando por A, e que irá firmar-se ao clicar no segundo ponto escolhido, digamos o ponto B. Isso mostra que, por um ponto passam infinitas retas e por dois pontos existe uma única reta. Manipule os pontos A ou B e verá que a reta construída se modifica de acordo com as novas posições dos pontos A e B.

- Podemos dizer que a reta AB é objeto livre?
- Podemos dizer que a reta AB é objeto dependente dos pontos A e B?
- Selecione o ponto B com o “Ponteiro” e aperte “Delete” no teclado. A reta desaparece, mas não o ponto A. Isto mostra que a reta depende de seus elementos iniciais que a definem, isto é, se desaparecer qualquer deles A ou B, a reta não mais existirá.
- Com o “Ponteiro”, selecione a reta AB apontando com o mouse sobre ela, e tente levar para diferentes lugares da tela. A reta leva consigo os pontos A e B, mas não consegue alterar a direção paralela à posição inicial.
- Com o “Ponteiro”, selecione o ponto A ou B e manipule, estes se movimentam pela tela porque são objetos livres, enquanto vemos a reta AB sempre passando por pontos A e B e mudando de direção conforme as posições de A e B.

Os questionamentos anteriores junto com a atividade de manipulação levam à compreensão da diferença de objeto geométrico livre e dependente e também dos axiomas da Geometria.

ATIVIDADE 3: *Objeto dependente condicionado e vinculado.*

A diferença entre estes dois conceitos é bastante tênue, mas vamos trabalhar uma atividade que permite entender a diferença que se mostra útil quando se planejam atividades didáticas com objetivos bem determinados.

Para facilitar esta atividade, vamos limpar a tela de pontos criados na Atividade 1, que podem atrapalhar a visualização do exercício. Com o “Ponteiro” selecionado, clique sobre uma parte da tela e arraste o mouse até verificar que as construções ficam enquadradas dentro de um retângulo azul. Ao te-

clar “Delete” todos os objetos dentro do retângulo de seleção são apagados.

- Construa quatro pontos A, B, C e D. Construa duas retas AB e CD.
 - Na “Janela de Ponto”, selecione a segunda opção “Ponto em Objeto”, e clique sobre a reta AB em qualquer lugar desta. Será criado um ponto de rótulo E.
 - Com o “Ponteiro”, manipule o ponto E. Este ponto é livre? Ele se move?
 - Se sua resposta for “E é objeto livre” justifique sua resposta.
 - Se sua resposta for “E não é objeto livre”, justifique e descreva como o ponto se move. O objetivo deste questionamento é levar à percepção de que o ponto E tem liberdade limitada, o ponto está “condicionado” a pertencer à reta AB.
 - Manipule a reta AB como na Atividade 2, e observe o ponto E acompanhar a manipulação da reta, mantendo-se na reta.
 - Manipule com o Ponteiro a reta CD de modo a colocá-la numa posição que cruze a reta AB, isto é, para que as retas AB e CD fiquem “concorrentes”.
 - Com “Ponteiro”, selecione na “Janela de Ponto” a opção “Interseção de Dois Objetos”. Clique sobre a reta AB e em seguida sobre a reta CD. Observe que será criado o ponto F “na interseção das retas”.
 - Manipule o ponto E ao longo da reta AB, até chegar ao ponto de interseção F.
 - O ponto E é ponto de interseção das retas AB e CD?
 - Se sua resposta for “Sim”, justifique. O ponto E será ‘sempre’ a interseção das retas?
 - Se sua resposta for “Não”, justifique. O ponto F será o ponto de interseção das retas AB e CD?
 - O ponto F é livre? Tente manipular com o “Ponteiro”. Manipule as retas AB ou CD e verifique se o ponto F se move de acordo com o movimento das retas. O ponto F existe sempre?
- Os questionamentos anteriores e as atividades de manipulação na exploração das possibilidades fundamentam a percepção do conceito de “objeto vinculado”. O ponto F tem sua existência “vinculada à condição de pertencer a duas retas simultaneamente”.

A técnica de selecionar com “Ponteiro” e mouse uma parte da tela dentro de um retângulo azul é recurso usado também para copiar a figura para editar dentro de um texto, como em arquivo.doc (ou .docx) do Word, quando se deseja produzir textos com figuras do GeoGebra e postar como tarefas. Basta, após selecionar a figura, entrar na Barra do Programa em Editar, e usar a opção “Copiar para área de transferência”, depois posicionar o cursor no local de inserção da figura no arquivo do Word e logo usar a opção Colar.

Não esquecer de Salvar o arquivo com nome adequado e extensão .ggb.

3. OUTRAS CONSTRUÇÕES BÁSICAS

ATIVIDADE 4: *Construção de um segmento.*

Um segmento se define a partir de dois pontos que são seus extremos e este segmento está contido na reta suporte dos pontos e é constituído de pontos entre os extremos.

- Na “Janela da Reta”, selecione a opção “Segmento definido por Dois Pontos”. Clique em dois pontos quaisquer e verá um segmento construído. O “Ponteiro” é capaz de levar o segmento para outras posições na tela. Estude quais são os objetos livres e o que é objeto dependente nesta construção.
- A opção “Segmento definido por Dois Pontos” aplicada a dois pontos de uma reta já construída, condiciona o segmento a ficar restrito à reta suporte, quando manipularmos. Porém, como os pontos extremos ficam livres sobre a reta, dificilmente poderemos controlar um tamanho fixo para o segmento construído nesta situação. Logo, mostraremos como resolver esta situação-problema.
- A opção “Segmento com comprimento fixo” na mesma janela permite a construção a partir de um ponto que será a origem, um segmento de comprimento numérico editado numa janela de diálogo que abrirá. Selecione a opção, e experimente clicar em um ponto qualquer e em seguida digite, por exemplo, 3, na “Janela de Diálogo” e clique OK. Um segmento

de 3cm com origem no ponto clicado e de extremidade “móvel” será construído. O segmento se firmará com o clique que o determinará.

- O que são objetos livres, e o que são dependentes nesta condição? O segmento pode ser manipulado como um objeto? O que pode ser manipulado nesta construção?

- Com “Ponteiro”, manipule a extremidade do segmento construído. O que pode observar?

A ideia desta última exploração dinâmica é precisamente perceber (sem apelar para funcionalidades embutidas no programa) que a extremidade dos segmentos que distam 3cm a partir de um ponto inicial descrevem, sim, uma trajetória circular.

Esta será a próxima atividade.

ATIVIDADE 5: *Estudo dinâmico do círculo.*

Por definição, uma “circunferência” (ou “círculo”) é determinado por um ponto que é chamado de “centro” e por pontos que distam igualmente deste. A distância até o centro, que é comum a todos os pontos do círculo, é chamada de raio. O raio se percebe pelo segmento que une um ponto do círculo ao centro e não pelo valor numérico da distância. O conceito geométrico de raio precede o valor numérico da medida do objeto.

- A quinta “Janela de Funcionalidade” disponibiliza as construções de círculo.

- Selecione a primeira opção “Círculo dado Centro e um de Seus Pontos”. Clique em um ponto da tela e o mouse iniciará a construção de um círculo com centro dado e somente se firmará com o segundo clique que é um de seus pontos, assim determinando um círculo. Vamos chamar de A o centro e de B o ponto que determina o círculo construído.

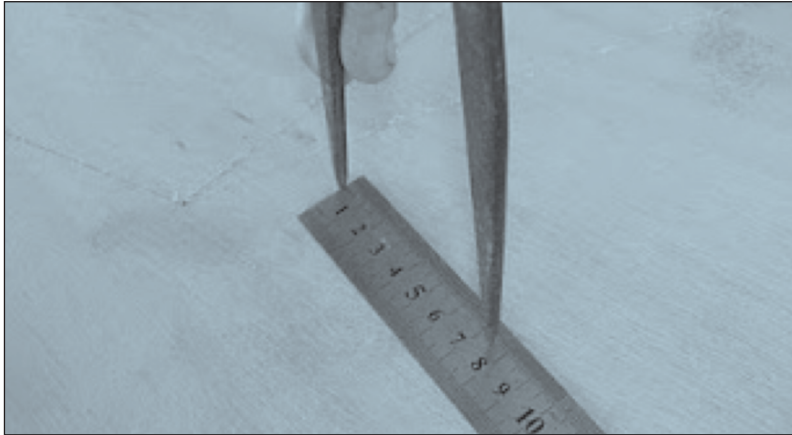
- Que objetos são livres nesta construção? – Para entender esta construção, use o “Ponteiro” para manipular o ponto A que é o centro do círculo. Observe que o círculo não é mais o mesmo, pois o ponto B permanece fixo e somente A se movimenta, e neste caso o círculo diminui ou aumenta de tamanho e não temos muito controle.

- Use o “Ponteiro” para manipular agora o ponto B. O controle melhora um pouco, pois desta vez, como o centro A se mantém fixo, é somente o tamanho do círculo que se altera.
- Mas, e se quisermos mudar o círculo construído de posição na tela?
- O círculo de centro A e que passa por B é um “objeto geométrico” dependente dos dados iniciais, A e B. Logo, com o “Ponteiro”, podemos manipular este objeto, clicando no círculo por um ponto distinto de B, e mantendo apertado o botão direito do mouse poderemos levar o círculo para qualquer parte da tela mantendo a forma e o tamanho. O conceito foi compreendido?
- Use a opção “Ponto em Objeto” da primeira Janela e crie um ponto C sobre o círculo construído. Use o “Ponteiro” para selecionar o ponto C e mantendo o botão direito do mouse movimente o ponto C. O círculo se deforma? O ponto C percorre ao longo do círculo? Por que não podemos manipular o ponto B, que também é ponto do círculo?
- E se manipularmos os pontos A ou B, o ponto C cai fora do círculo? Justifique sua resposta.
- O ponto C é objeto livre ou dependente?

ATIVIDADE 6: Aprendendo a função Compasso e analisando a diferença com a função Círculo da Atividade 5.

Vimos que a Atividade 5 permite estudar a dinâmica da construção de um círculo começando pela própria definição, mas os objetos iniciais livres dificultam por vezes a manipulação mais rígida do objeto final construído.

Agora, exploraremos uma função que se aproxima mais do instrumento de desenho Compasso, que utilizamos nas atividades tradicionais “lápiz e papel”. Num compasso, a abertura dele determina uma distância entre a ponta-seca e a ponta que escreve, e esta distância pode ser representada por um segmento cujos extremos seriam os pontos de apoio da ponta-seca até a ponta do grafite. Uma vez aberto o compasso, ele se mantém rígido e podemos transportar esta distância para onde quisermos na folha de caderno. Queremos reproduzir esta facilidade com o GeoGebra.



- Com a opção “Segmento definido por Dois Pontos”, construa um segmento AB.
- Na quinta Janela, selecione a opção “Compasso” (a terceira opção) e clique sobre o segmento AB. Imediatamente surge um círculo com raio do tamanho de AB, móvel, que se fixa quando clicamos em qualquer lugar da tela, isto é, quando definimos qual é o centro do círculo.
- O círculo é objeto livre? Se sua resposta é negativa, justifique e determine quais são os objetos livres dos quais a construção é dependente.
- Nessa construção, aparece algum ponto sobre o círculo? Por quê?
- Para construir um ponto sobre o círculo, vale construir um ponto qualquer e levá-lo com o “Ponteiro” manipulando até colocá-lo sobre o círculo? Justifique sua resposta.
- Construa um ponto diferente fora do segmento AB e do círculo construído, e use a função “Compasso” novamente para construir outro círculo com raio AB e centro neste novo ponto.
- Manipule os objetos construídos e descreva os diferentes resultados.
- Exercício opcional: Construir dois segmentos que se cruzam. Construir um círculo com um raio dado com centro no ponto de interseção. Estudar a dependência do círculo construído dos objetos iniciais. Descreva o efeito dinâmico da construção para diferentes objetos iniciais modificados.

ATIVIDADE 7: *Transportando medida (sem número) sobre uma reta.*

- Construir um segmento. Queremos construir sobre uma reta um segmento que tenha exatamente a mesma medida do segmento dado.
- Construir uma reta. Sobre ela construir um ponto. Atenção às funções adequadas que precisamos usar.
- Com a opção “Compasso”, construa um círculo com raio igual ao segmento inicial e no centro o ponto que construiu sobre a reta.
- Construir os pontos de interseção do círculo com a reta.
- Quantos pontos aparecem na interseção? Por quê?
- Construir segmento de medida igual ao segmento inicial, com extremos na reta, usando as construções anteriores. Justificar a estratégia de resolução usada e validá-la. Quantas soluções existem a partir do ponto fixado sobre a reta? Este ponto é móvel?

Para refletir: Por que estamos propondo a atividade insistindo em não determinar a medida numérica (por exemplo, em centímetros) do raio? Haveria propósito pedagógico para isto?

4. ATIVIDADES DE CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO

ATIVIDADE 8: *Ponto Médio de um segmento, Mediatriz de um segmento, Ângulo Reto, Retas Perpendiculares, Triângulo Isósceles, Triângulo Equilátero, Losango, Congruência de Triângulos etc.*

- Construir dois segmentos AB e CD, afastados um do outro, um maior que o outro, digamos AB o maior e CD o menor, inicialmente.
- Usando “Compasso” (quinta janela), construir círculos com centros nos extremos A e B do segmento maior, com raio dado pelo segmento menor CD.
- Construir os pontos de interseção dos dois círculos.
- Se os círculos não se interceptarem, analisar a causa do fenômeno. Manipular o segmento menor CD e investigar quando a interseção ocorre, e sistematizar o resultado geométri-

co num texto matemático, com justificativas. O segmento CD pode eventualmente ficar maior que o segmento AB, nesta investigação?

- Quando ocorre a interseção, esta pode ser constituída de apenas um ponto (que ocorre sobre o segmento AB) ou de dois pontos fora do segmento AB. Analisar a propriedade do caso de ponto único sobre o segmento maior.
- Quando a interseção ocorrer com dois pontos, construir a reta determinada pelos mesmos.
- Determinar a interseção da reta construída com o segmento AB.
- Manipular o segmento CD usado como raio, e explorar o caso-limite de ponto único na interseção dos círculos corresponde ao ponto de interseção da “reta construída” com o segmento AB. Sistematizar o conceito de “ponto médio” de um segmento.
- Observemos que a exploração das funções do GeoGebra, raciocinando sobre as definições geométricas, permite construir os conceitos básicos da Geometria, sem utilizar as facilidades já embutidas no programa. É o uso pedagógico do programa que permite, após dominar seus princípios, usar estes atalhos com eficiência e significado, por exemplo, a função “Ponto Médio”.
- Construir um ponto arbitrário sobre a reta construída e manipulando-o sobre a reta explorar a propriedade de que um ponto dessa reta é equidistante dos extremos A e B do segmento. Reciprocamente, manipulando o segmento CD perceber que todos os pontos da reta construída são interseções dos círculos de raios iguais com centros nos extremos do segmento AB. Sistematizar o conceito de “reta mediatriz do segmento AB” como lugar geométrico de pontos equidistantes dos extremos A e B.
- Explorar a construção básica feita para perceber a construção de “triângulos isósceles”, e investigar a propriedade de que a mediatriz de AB corta o segmento AB segundo ângulos suplementares congruentes, o que sistematiza o “conceito de retas perpendiculares e ângulo reto”.

- Questionamentos oportunos: Podemos construir “triângulos equiláteros” com esse roteiro? Quando isso ocorre? Podemos construir losangos? Como podemos justificar? Conseguimos enxergar casos de “triângulos retângulos congruentes”? Quais propriedades interessantes, de triângulos isósceles, podemos deduzir desta construção? Por exemplo: Mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também a altura relativa à base; a reta Bissetriz do ângulo oposto à base é, também, a reta Mediatriz da base.
- Podemos ainda deduzir que em um losango as diagonais são perpendiculares. Será que a recíproca é verdadeira? Assim por diante, numa oficina com alunos e professores podemos com uma atividade básica inicial simples de familiarização do programa, desenvolver pensamentos matemáticos que organizam as deduções, explorando e investigando.

ATIVIDADE 9: *Exercício para Fixação.*

Sugerimos alguns exercícios em que medidas numéricas não são usadas.

- Construir uma reta perpendicular a uma reta dada por um ponto dado sobre a reta. Não usar a função embutida no programa.
- Construir uma reta perpendicular a uma reta dada por um ponto dado fora da reta. Não usar a função embutida no programa. Em que este problema difere do anterior?
- Construir uma reta paralela a uma reta dada, sem usar a função embutida do programa.
- Construir um ângulo, recordando a definição.
- Construir uma bissetriz de um ângulo construído.
- Construir um triângulo ABC. Analisar a diferença que há para o programa GeoGebra entre “construir 3 pontos não colineares A, B e C, e em seguida construir os segmentos AB, BC e CA” (como se faz com lápis e papel) e usar a opção “Polígono na quarta Janela e clicar sobre os pontos A, B, C e A, nesta ordem”.
- Construir um quadrado dado um segmento que servirá de medida de lado, sendo que um dos lados se apoia sobre uma

reta dada. Manipule a construção para descobrir a vantagem deste último detalhe. Como podemos transferir uma medida sobre uma reta?

- Dados dois segmentos de comprimentos diferentes, construir um retângulo cujos lados tenham as medidas dos segmentos.
- Construir um contorno formado por retas e segmentos que se cruzam em ângulos retos basta para se obter um quadrilátero? O que precisa ser feito?
- Construir um ponto no “interior” de um polígono e manipular o polígono observando que o ponto não acompanha a posição do polígono. Como podemos proceder para que o ponto acompanhe o movimento, mantendo-se no interior do polígono?

O GeoGebra oferece muito mais funções que podem ser utilizadas com proveito pelo professor para aprender e ensinar mais Geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). *Banco de Questões*. Rio de Janeiro: IMPA (Edições 2006 a 2013).

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Provas (1ª e 2ª fases). Rio de Janeiro: IMPA (Edições 2006 a 2013).

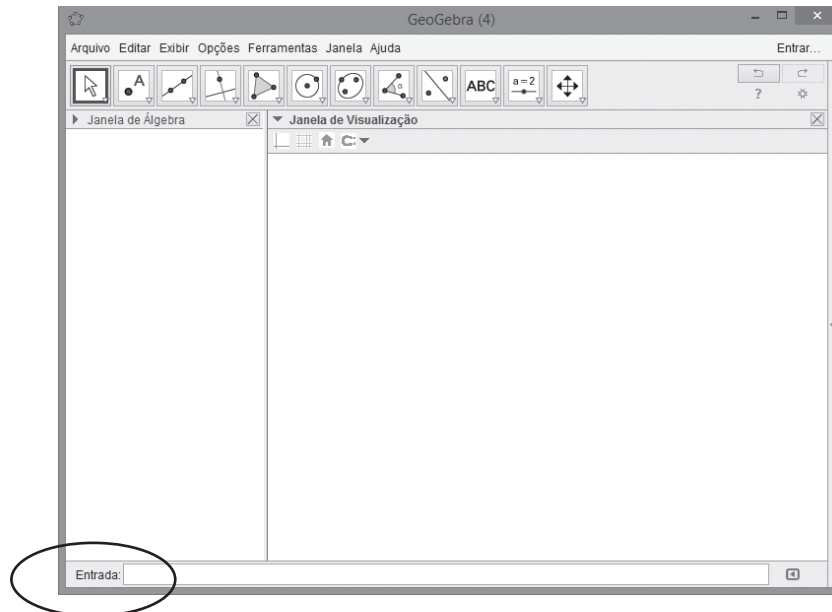
CARVALHO, P. C. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

CURY, H. N. Análise de erros em Educação Matemática. *Veritati*, v. 3, n. 4, p.95-107, jun. 2004. Disponível em: < <http://pt.scribd.com/doc/30351027/Veritati> >

ANEXO C

Apresentamos neste anexo, as construções com o GeoGebra, indicadas no texto, bem como a sequência para animação no ppt, e cópias de folhas recomendadas para serem usadas em sala de aula.

Para cada construção recomendada, será destacada a figura final a ser obtida e a tabela com a sequência de comandos que se pode seguir para obter a construção. Lembramos que para obter a figura final, é necessário inserir os comandos apresentados na coluna **entrada a ser digitada**, uma linha de cada vez, na caixa “**Entrada**” do GeoGebra (vide figura a seguir).



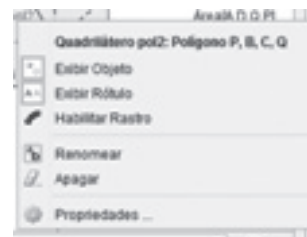
Alguns comentários sobre as construções:

Quando uma figura é montada a partir de partes de outra, a construção preserva os rótulos originais indexados e com apóstrofe.

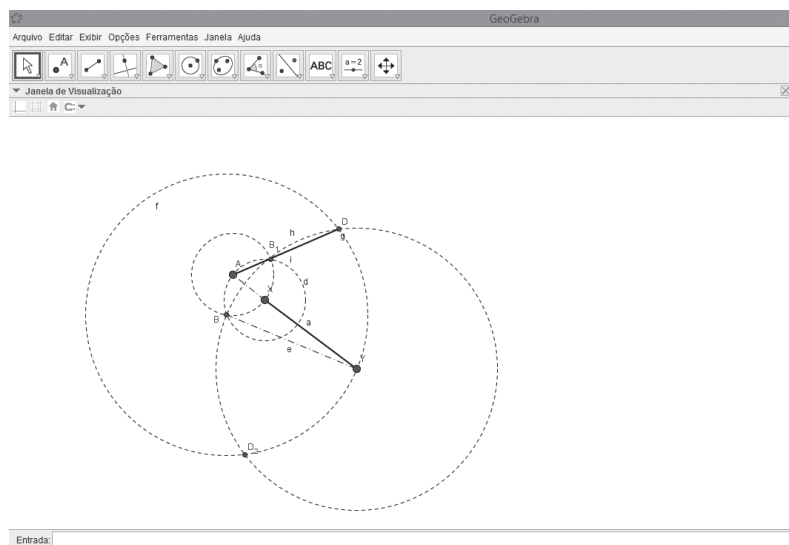
Para que se perceba a correspondência entre as partes, recomenda-se utilizar cores distintas nos polígonos obtidos, o que não é feito aqui.

As linhas em que aparecem comandos em azul é para o leitor escolher os parâmetros. Recomendamos que os parâmetros escolhidos permitam uma construção em posição equivalente a das figuras do texto.

Na figura final, há partes da construção que encontram-se invisíveis e há necessidade de ocultá-las para se obter a figura final como apresentada no texto. Para ocultar, clique com o mouse sobre o objeto e aparecerá a caixa ao lado, clique em exibir objeto, ou exibir rótulo.



1. COMPASSO COLAPSANTE (p. 12)



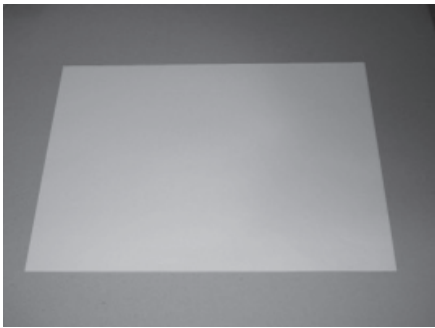
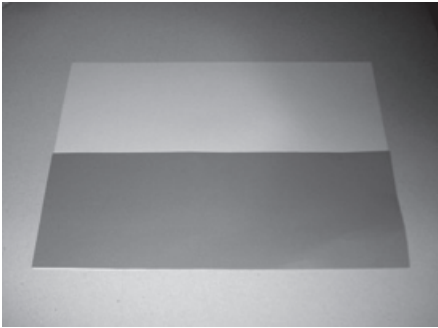
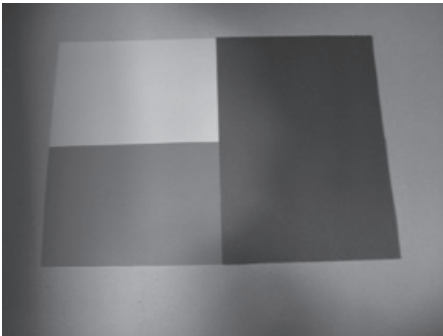

N.	NOME	DEFINIÇÃO	ENTRADA A SER DIGITADA
1	Ponto X		$X = (x1,x2)$
2	Ponto Y		$Y = (y1,y2)$
3	Segmento a	Segmento XY	a:Segmento[X, Y]
4	Ponto A	Extremidade do novo segmento	$A = (a1,a2)$
5	Segmento b	Segmento XA	b:Segmento[A,X]
6	Círculo c	Círculo por X com centro A	c: Círculo[A,b]
7	Círculo d	Círculo por A com centro X	d: Círculo[X,b]
8		Interseção de d,c (pontos B_1, B_2)	Interseção[c, d]
8	Ponto B	Renomear B_1	Renomear[B_1,B]
8	Ponto C	Renomear B_2	Renomear[B_2,C]
9	Segmento e	Segmento BY	e:Segmento[B,Y]
10	Círculo f	Círculo por Y com centro B	f: Círculo[B,e]
11	Círculo g	Círculo por B com centro Y	g: Círculo[Y,e]
12		Interseção de e,g (pontos D_1, D_2)	Interseção[f,g]
	Ponto D	Se necessário renomear ponto usando o comando da linha abaixo da 8	
13	Segmento h	Segmento [A, D]	h: Segmento[A,D]
14	Número r*	Diferença entre os comprimentos a e h	$r = a - h$

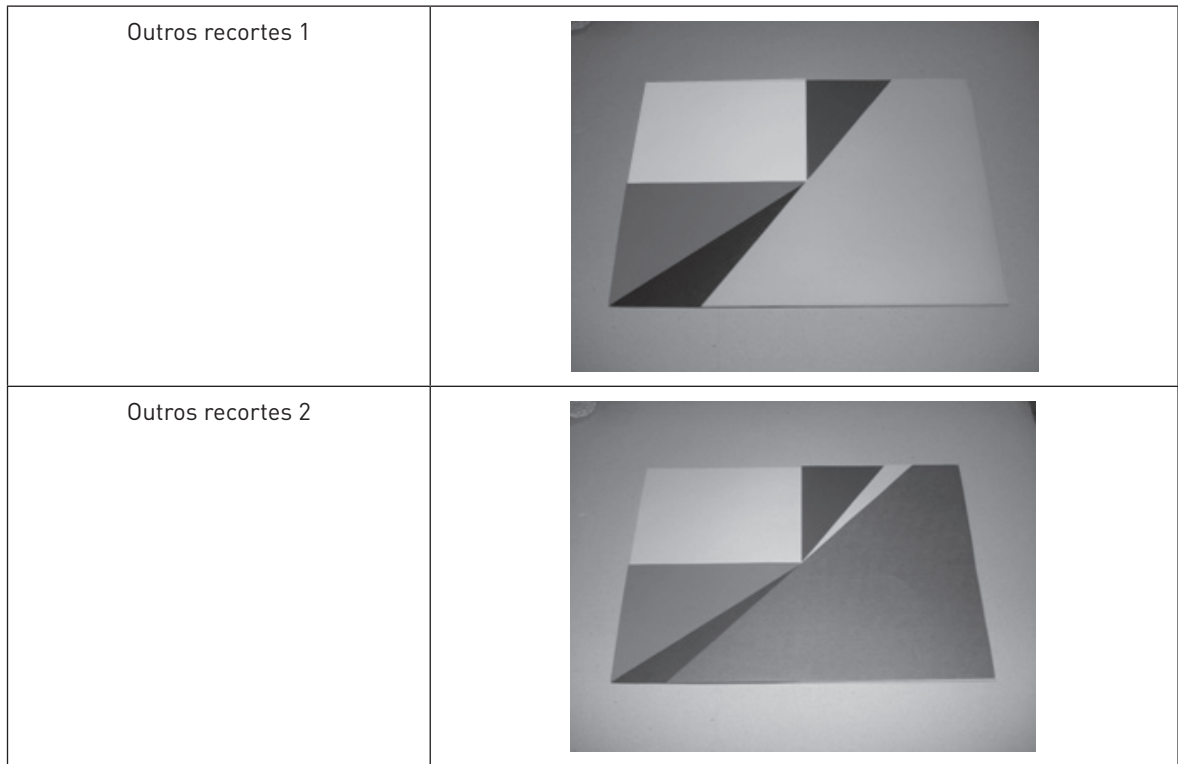
*Com o número r é possível verificar que os dois segmentos têm o mesmo comprimento.

2. PROBLEMA 4 – RECORTES DO RETÂNGULO

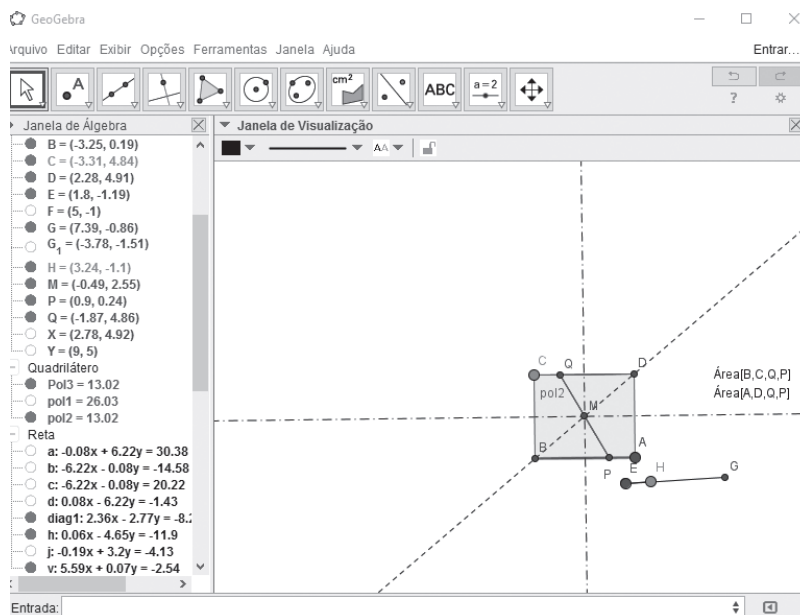
2.1. Animação de ppt

Observação: Com material recortado em cartolina é possível fazer a sequência de figuras a seguir e gerar uma animação que mostra o Centro do Retângulo.

DESCRIÇÃO	FIGURA
O retângulo	
Recorte pela linha horizontal	
Recorte pela linha vertical	
Recorte por uma diagonal	



2.2. Animação com GeoGebra



Como já destacado no texto, é importante observar os valores das áreas dos quadriláteros que compõem o retângulo, na Janela de Álgebra, enquanto se manipula o Ponto H.

Comandos a serem digitados:

N.	NOME	DEFINIÇÃO	ENTRADA A SER DIGITADA
1	Ponto X		$X = (x_1, x_2)$
2	Ponto Y		$Y = (y_1, y_2)$
3	Reta a	Reta XY	a: Reta[X,Y]
4	Segmento XY	Segmento XY	n:Segmento[X,Y]
5	Ponto A	Ponto fora da reta a	$A = (a_1, a_2)$
6	Reta b	Reta passando por A e perpendicular a a	b: Perpendicular[A,a]
7	Ponto D	Ponto D de interseção de b, a (renomear, se necessário, usando o comando Renomear [...,D])	D:Interseção[a,b]
5	Ponto C*	Ponto sobre a	C:Ponto[a]
8	Reta c	Reta passando por C e perpendicular a a	c:Perpendicular[C,a]
9	Reta d	Reta passando por C e perpendicular a c	d: Perpendicular[A,c]
10	Ponto B	Ponto de interseção de c e d	B: Interseção[c,d]
11	Ponto Centro	Ponto médio de AC	M:PontoMédio[A,C]
12	Reta diag1	Reta D,M	diag1: Reta[D,M]
13	Quadrilátero polígono1	Polígono A, B, C, D	Pol1:Polígono[A,B,C,D]
14	Segmento m	Segmento [A, B] de Quadrilátero polígono1 (renomear se necessário, usando o comando Renomear)	m:Segmento[A,B]
15	Segmento h	Segmento [B, C] de Quadrilátero polígono1 (renomear, se necessário, usando o comando Renomear)	Segmento[C,B]
16	Segmento e ₁	Segmento [C, D] de Quadrilátero polígono1 (renomear, se necessário, usando o comando Renomear)	Segmento[C,D]
17	Segmento g	Segmento [D, A] de Quadrilátero polígono1 (renomear, se necessário, usando o comando Renomear);	Segmento[A,D]
18	Ponto E		$E = (e_1, e_2)$
19	Ponto F		$F = (f_1, f_2)$
20	Reta j	Reta EF	j: Reta[E,F]
21	Círculo p	Círculo com centro E e raio m	p: Círculo[E,m]
22	Ponto G	Ponto de interseção de p, j	G:Interseção[j,p]
23		Renomear G, se necessário, escolhendo o ponto sobre o segmento EF	Renomear[G_1,G]
24	Segmento l	Segmento [E, G]	l:Segmento[E,G]
25	Ponto H	Ponto sobre l (Se cair sobre ponto já escolhido deslocar como já explicado)	H:Ponto[l]
26	Segmento n	Segmento [E, H]	n:Segmento[E,H]
27	Círculo q	Círculo com centro A e raio m	q: Círculo[A,n]
28	Ponto X	Ponto de interseção de q, m	P = Interseção[q,m]
29	Círculo r	Círculo com centro C e raio n	r: Círculo[C,n]
30	Ponto l	Ponto de interseção de r, s	Q = Interseção[r,s]
31	Segmento n	Segmento [X, l]	t:Segmento[P,Q]
32	Quadrilátero	Polígono P, B, C, Q	Pol2:Polígono[P,B,C,Q]
33	Polígono	Polígono A,D,Q,P	Pol3:Polígono[A,D,Q,P]
34	Reta vertical	Mediatriz de AB	v:Mediatriz[A,B]

35	Reta horizontal	Mediatriz de AC_2	$h: \text{Mediatriz}[A,D]$
36		Área **	$\text{Área}[P,B,C,Q]$
37		Área **	$\text{Área}[A,D,Q,P]$

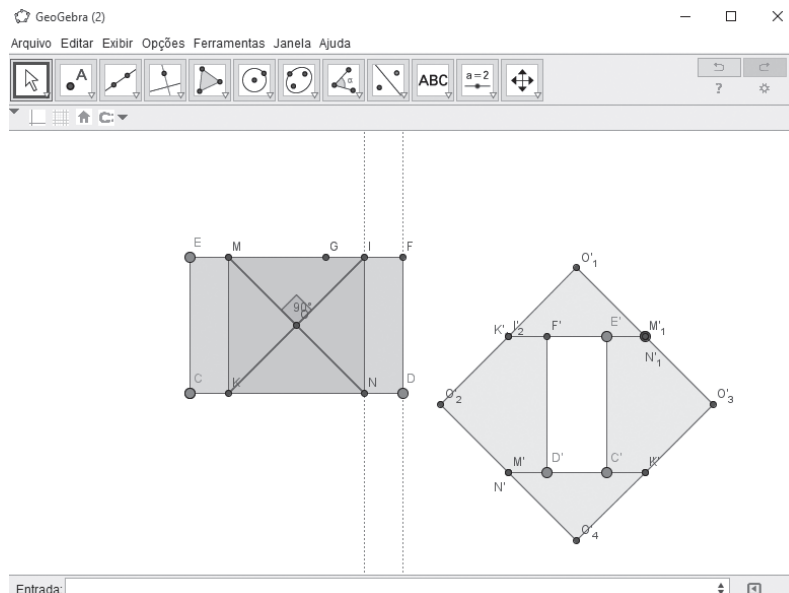
* Se o novo ponto coincidir com um dos já escolhidos, destaque-o ou desloque-o clicando sobre a seta e depois sobre o novo ponto.

** Deixar os resultados visíveis para que se possa comparar as medidas obtidas.

3. Problema 6 – BQ – OBMEP 2012 – Questão 36 – Nível 1 (p. 27)

Nesta atividade com *software*, mostramos que podemos considerar o problema com dados genéricos, o que facilita a transição para trabalhar álgebra a partir de um problema geométrico. A ideia da atividade é estimular a descoberta de propriedades por meio de visualização. Algumas questões que podem ser exploradas na manipulação são destacadas a seguir e podem ser introduzidas como texto na figura.

1. Quando manipulamos os pontos E e D, o que se altera?
2. Que propriedade se depreende do fato das diagonais MN e KI serem perpendiculares?
3. Que propriedade EM e IF possuem em comum?
4. O que a área branca na composição à direita representa?
5. Existe alguma condição para que exista o buraco na figura final?
6. Que figura é formada no lado direito? Como justifica sua resposta?
7. É possível recortar um retângulo qualquer, como foi feito aqui e obter uma figura como a do lado direito?



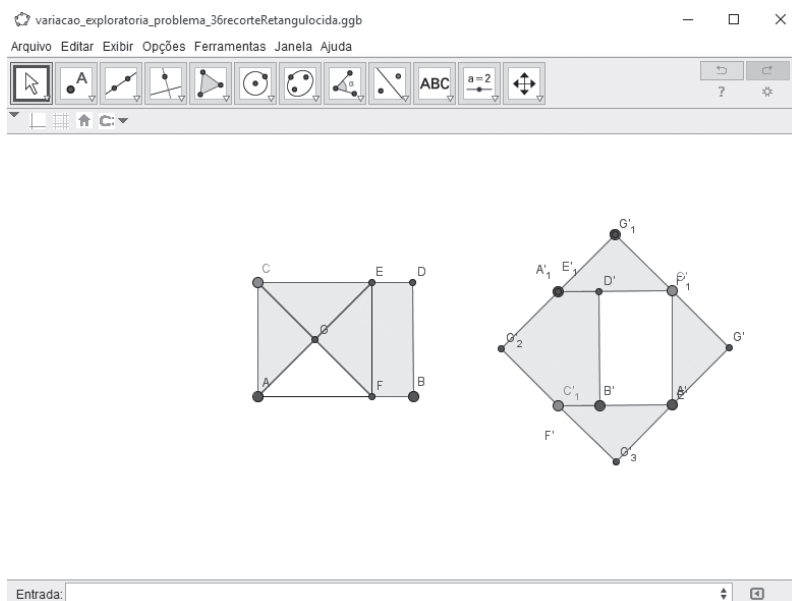
N.	NOME	DEFINIÇÃO	ENTRADA A SER DIGITADA
1	Ponto A		$A = \{a_1, a_2\}$
2	Ponto B		$B = \{b_1, b_2\}$
3	Reta a	Reta AB	a:Reta[A,B]
4	Ponto C	Ponto sobre a (Deslocar se coincidir)	C:Ponto[a]
5	Ponto D	Ponto sobre a (Deslocar se coincidir)	D:Ponto[a]
6	Segmento b	Segmento [C, D]	b:Segmento[C,D]
7	Reta c	Reta passando por C e perpendicular a a	c:Perpendicular[C,a]
8	Ponto E	Ponto sobre c (Deslocar se coincidir)	E:Ponto[c]
9	Reta d	Reta passando por E e perpendicular a c	d:Perpendicular[E,c]
10	Reta e	Reta passando por D e perpendicular a a	e:Perpendicular[D,a]
11	Ponto F	Ponto de interseção de d, e	F:Interseção[d,e]
12	Quadrilátero	Polígono C, D, F, E	Pol1:Polígono[C,D,F,E]
13	Círculo g	Círculo por C com centro E	g:Círculo[E,C]
14	Ponto G	Ponto de interseção de g, d (Renomear se necessário)	Interseção[g,d]
15	Ponto I	Ponto médio de GF	I = Ponto Médio[G,F]
16	Ponto I'₁	Reflexão (ou Inversão) de I em relação a F	I'_1:Reflexão[I,F]
17	Segmento h	Segmento [F, I'₁]	h:Segmento[F,I'_1]
18	Círculo k	Círculo com centro C e raio h	k:Círculo[C,h]
19	Ponto J	Ponto de interseção de k, a (Renomear se necessário)	Interseção[k,a]
19	Ponto K	Ponto de interseção de k, a (Renomear se necessário)	
20	Reta i	Reta passando por K e perpendicular a a	i:Perpendicular[K,a]
21	Reta j	Reta passando por I e perpendicular a a	j:Perpendicular[I,a]
22	Ponto M	Ponto de interseção de d, i	M:Interseção[d,i]
23	Ponto N	Ponto de interseção de j, a	N:Interseção[j,a]
24	Polígono2	Polígono K, N, I, M	Pol2:Polígono[K,N,I,M]
25	Segmento l	Segmento [M, N]	l:Segmento[M,N]
26	Segmento p	Segmento [K, I]	p:Segmento[K,I]
27	Ponto O	Ponto de interseção de l, p	O:Interseção[l,p]
28	Triângulo polígono3	Polígono M, O, I	Pol3:Polígono[M,O,I]
29	Triângulo polígono4	Polígono K, N, O	Pol4:Polígono[K,N,O]
30	Polígono5	Polígono E, M, O, K, C	Pol5:Polígono[E,M,O,K,C]
31	Polígono6	Polígono F, I, O, N, D	Pol6:Polígono[F,I,O,N,D]
32	Ponto P	P Ponto fora do polígono, à direita	$P = \{p_1, p_2\}$
33	Vetor u	Vetor[N, P]	u:Vetor[N,P]
34	Ponto K'₁	Translação de K por u	K'_1:Transladar[K,u]
35	Ponto N'₁	Translação de N por u	N'_1:Transladar[N,u]
36	Ponto O'₁	Translação de O por u	O'_1:Transladar[O,u]

37	Triângulo polígono4'	Polígono K'_1, N'_1, O'_1	Pol4':Polígono[K'_1, N'_1, O'_1]
38	Vetor v	Vetor[I, K'_1]	v:Vetor[I, K'_1]
39	Ponto F'	Translação de F por v	F':Transladar[F,v]
40	Ponto I'_2	Translação de I por v	I'_2 :Transladar[I,v]
41	Ponto O'_2	Translação de O por v	O'_2 :Transladar[O,v]
42	Ponto N'	Translação de N por v	N':Transladar[N,v]
43	Ponto D'	Translação de D por v	D':Transladar[D,v]
44	Polígono6'	Polígono F', I'_2, O'_2, N', D'	Pol6':Polígono[F', I'_2, O'_2, N', D']
45	Vetor w	Vetor[M, P]	w:Vetor[M,P]
46	Ponto E'	Translação de E por w	E':Transladar[E,w]
47	Ponto M'_1	Translação de M por w	M'_1 :Transladar[M,w]
48	Ponto O'_3	Translação de O por w	O'_3 :Transladar[O,w]
49	Ponto K'	Translação de K por w	K':Transladar[K,w]
50	Ponto C'	Translação de C por w	C':Transladar[C,w]
51	Polígono5'	Polígono E', M'_1, O'_3, K', C'	Pol5':Polígono[E', M'_1, O'_3, K', C']
52	Vetor z	Vetor[M, N']	t:Vetor[M,N']
53	Ponto M'	Translação de M por z	M':Transladar[M,t]
54	Ponto O'	Translação de O por z	O'_4 :Transladar[O,t]
55	Ponto I'	Translação de I por z	I':Transladar[I,t]
56	Triângulo polígono3'	Polígono M', O', I'	Pol3':Polígono[M', O', I']
57	Ângulo α	Ângulo entre I, O, M	$\alpha = \text{Ângulo}[I, O, M]$

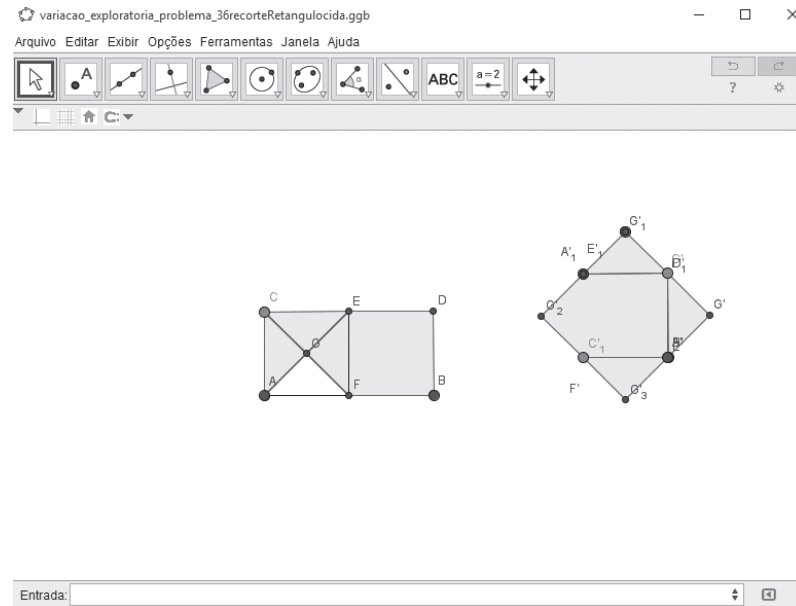
OBS.: Na escolha das coordenadas dos pontos é interessante mantê-los em posição análoga à da figura inicial.

4. VARIAÇÃO EXPLORATÓRIA DO PROBLEMA 6 (p. 29)

Este exemplo mostra que a posição do quadrado dentro do retângulo não importa, a ideia inicial permanece.



Na construção os pontos que podem ser manipulados são C e B e um importante exercício é explorar a situação do retângulo que contém dois quadrados.



A seqüência de entradas a serem digitadas para se chegar às figuras está apresentada na tabela a seguir:

N.	NOME	DEFINIÇÃO	ENTRADA A SER DIGITADA
1	Ponto A		$A = (a_1, a_2)$
2	Ponto B		$B = (b_1, b_2)$
3	Segmento a	Segmento [A, B]	a:Segmento[A,B]
4	Reta b	Reta passando por A e perpendicular a a	b:Perpendicular[A,a]
5	Reta c	Reta passando por B e perpendicular a a	c:Perpendicular[B,a]
6	Ponto C	Ponto sobre b (arrastar se coincidir)	C:Ponto[b]
7	Reta d	Reta passando por C e perpendicular a b	d:Perpendicular[C,b]
8	Ponto D	Ponto de interseção de c, d	D:Interseção[c,d]
9	Círculo e	Círculo por A com centro C	e:Círculo[C,A]
10	Ponto E	Ponto de interseção de e, d	Interseção[e,d]
11	Reta f	Reta passando por E e paralela a b	f:Reta[E,b]
12	Ponto F	Ponto de interseção de f, a	F:Interseção[f,a]
13	Segmento g	Segmento [A, E]	g:Segmento[A,E]
14	Segmento h	Segmento [C, F]	h:Segmento[C,F]
15	Ponto G	Ponto de interseção de h, g	G:Interseção[h,g]
16	Polígono1	Polígono C, G, E	Pol1:Polígono[C,G,E]
17	Polígono2	Polígono G, A, C	Pol2:Polígono[G,A,C]
18	Polígono3	Polígono A, F, G	Pol3:Polígono[A,F,G]

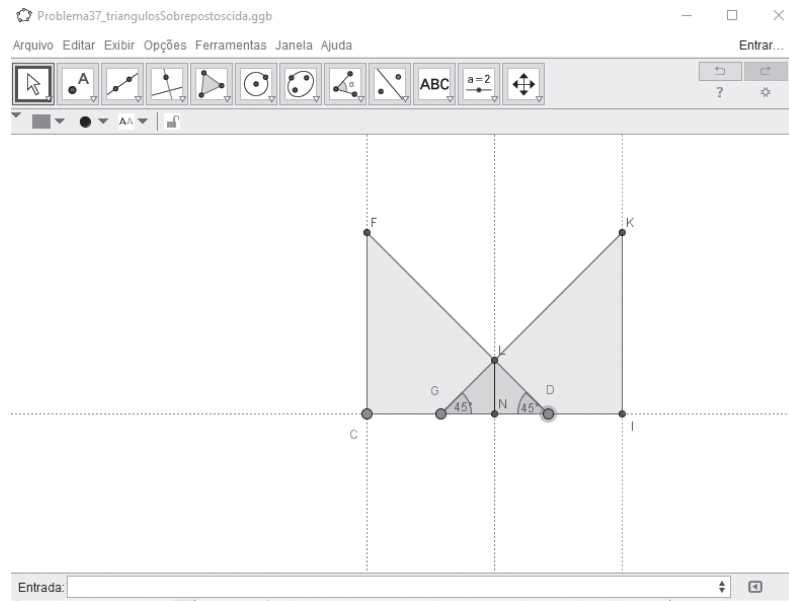
19	Polígono4	Polígono B, D, E, G, F	Pol4:Polígono[B,D,E,G,F]
20	Segmento i	Segmento [E, F]	i:Segmento[E,F]
21	Ponto H		H=(h,h)
22	Vetor u	Vetor[G, H]	u:Vetor[G,H]
23	Ponto A'₁	Translação de A por u	A'_1:Transladar[A,u]
24	Ponto F'₁	Translação de F por u	F'_1:Transladar[F,u]
25	Ponto G'₁	Translação de G por u	G'_1:Transladar[G,u]
26	Polígono3'	Polígono A'₁, F'₁, G'₁	Pol3':Polígono[A'_1,F'_1,G'_1]
27	Vetor v	Vetor[E, A'₁]	v: Vetor[E,A'_1]
28	Ponto B'	Translação de B por v	B':Transladar[B,v]
29	Ponto D'	Translação de D por v	D':Transladar[D,v]
30	Ponto E'₁	Translação de E por v	E'_1:Transladar[E,v]
31	Ponto G'₂	Translação de G por v	G'_2:Transladar[G,v]
32	Ponto F'	Translação de F por v	F':Transladar[F,v]
33	Polígono4'	Polígono B', D', E'₁, G'₂, F'	Pol4':Polígono[B',D',E'_1,G'_2,F']
34	Vetor w	Vetor[C, F']	w:Vetor[C,F']
35	Ponto C'₁	Translação de C por w	C'_1:Transladar[C,w]
36	Ponto G'₃	Translação de G por w	G'_3:Transladar[G,w]
37	Ponto E'	Translação de E por w	E':Transladar[E,w]
38	Polígono1'	Polígono C'₁, G'₃, E'	Pol1':Polígono[C'_1,G'_3,E']
39	Vetor z	Vetor[C, F'₁]	t:Vetor[C,F'_1]
40	Ponto G'	Translação de G por z	G':Transladar[G,t]
41	Ponto A'	Translação de A por z	A':Transladar[A,t]
42	Ponto C'	Translação de C por z	C':Transladar[C,t]
43	Polígono2'	Polígono G', A', C'	Pol2':Polígono[G',A',C']

5. PROBLEMA 7 – BQ – OBMEP 2012 – PROBLEMA 37 – NÍVEL 1 (p. 30)

O Problema 37 dá a medida do quadrado como sendo 3cm. A atividade com Geometria dinâmica tem como objetivo descobrir e explorar as propriedades geométricas do problema em situação genérica e semelhança de triângulos.

Como explorar a atividade, manipular o ponto G, ao longo da reta e observar o que ocorre com os triângulos. Alguns questionamentos:

- Como podemos provar que o triângulo interseção é sempre isósceles?
- Para achar a área do triângulo interseção, o que sabemos para achar a altura?
- Existe alguma simetria no triângulo interseção?
- Que fórmula geral podemos deduzir para a altura da figura interseção?



Os comandos a serem digitados, para obter a figura, estão na coluna entrada a ser digitada.

N.	NOME	DEFINIÇÃO	ENTRADA A SER DIGITADA
1	Ponto A		$A = (a_1, a_2)$
2	Ponto B		$B = (b_1, b_2)$
3	Reta a	Reta AB	a:Reta[A,B]
4	Ponto M		$M = (m_1, m_2)$
5	Ponto C	Ponto sobre a (mover caso sobreponha ponto já marcado)	C:Ponto[a]
6	Ponto D	Ponto sobre a (mover caso sobreponha ponto já marcado)	D:Ponto[a]
7	Segmento b	Segmento [C, D]	b:Segmento[C,D]
8	Círculo c	Círculo por C com centro D	c:Círculo[C,b]
9	Reta e	Reta passando por C e perpendicular a a	e:Perpendicular[C,a]
10	Círculo f	Círculo por D com centro C	f:Círculo[D,b]

11	Ponto F	Ponto de interseção de c, e	W:Interseção[e,c]
12	Polígono1	Polígono C, D, F	Pol1:Polígono[C,D,F]
14	Ponto G	Ponto sobre a (mover caso sobreponha ponto já marcado)	G:Ponto[a]
15	Círculo h	Círculo com centro G e raio b	h:Círculo[G,b]
16	Ponto H	Ponto de interseção de h, a (Renomear se necessário)	Interseção[h,a]
16	Ponto I	Ponto de interseção de h, a (Renomear caso seja necessário)	Renomear[H_1,H]
17	Reta d	Reta passando por I e perpendicular a a	d: Perpendicular[I,a]
18	Círculo k	Círculo com centro I e raio b	k:Círculo[I,b]
19	Ponto J	Ponto de interseção de k, d (Renomear se necessário)	J:Interseção[k,d]
	Ponto K	Ponto de interseção de k, d (Renomear se necessário)	Renomear[J_1,J]
			Renomear[J_2,K]
20	Polígono2	Polígono G, I, K	Pol2:Polígono[G,I,K]
	Ponto L		L:Interseção[c_1,i]
24	Reta j	Reta passando por L e perpendicular a a	j:Perpendicular[L,a]
25	Ponto N	Ponto de interseção de j, a	N:Interseção[j,a]
26	Ângulo α	Ângulo entre F, D, C	α :Ângulo[F,D,C]
27	Ângulo β	Ângulo entre I, G, K	β :Ângulo[I,G,K]
28	Segmento l	Segmento [L, N]	Segmento[L,N]

Nas próximas páginas apresentamos as figuras sugeridas no texto, a serem reproduzidas para o trabalho, com os respectivos problemas.

