

Cálculos de Curto-Circuito Trifásico

Alexandre de Oliveira Goulart e Gabriela Torllone de Carvalho Ferreira
Engenharia Elétrica – 1º. Período
Professor: Rodney Josué Biezuner
Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

1. Introdução

Com o desenvolvimento da eletrônica, os circuitos elétricos, tal como as aplicações para os mesmos, começaram a ficar cada vez maiores e, conseqüentemente, mais complexos. Desta forma, todos problemas relacionados à sistemas elétricos, em meados da década de 50, eram resolvidos à mão ou com o uso de um “analisador de redes”. Este instrumento era um dispositivo para fazer analogias elétricas, representando o circuito elétrico mas em uma escala bastante reduzida.

Uma opção para a investigação de circuitos elétricos seria através de métodos matriciais que, embora existissem, eram inviáveis em virtude da falta de recursos computacionais realmente eficientes. Isso restringiu as investigações de circuitos a pequenos sistemas de equações, envolvendo somente matrizes muito pequenas. Porém, com os avanços nas ferramentas computacionais (entres elas está o computador digital), um método que até então se restringia apenas a um instrumento de pesquisa pode se revelar eficiente para a análise e solução de sistemas elétricos de maior porte: **os métodos matriciais**.

2. O problema e seu modelamento

Quando o computador começou a ser usado em grande escala, os cálculos de fluxo de carga que antes eram feitos à mão puderam ser realizados mais facilmente, porém os primeiros programas de computador escritos para análise de circuitos apenas automatizaram estes métodos manuais.

Isso subtilizava a capacidade do computador. O primeiro programa que realmente teve sucesso foi o desenvolvido por Ward e Hale, que criaram um algoritmo que descreve o circuito elétrico através de um método iterativo de Newton modificado. Após isso, os programas que surgiram implementaram o algoritmo de Gauss-Seidel.

Todos esses algoritmos utilizam os dados do circuito sob a forma matricial, onde cada matriz guarda características como impedância, capacitância e tensão.

Tudo isso foi desenvolvido para a análise de problemas de fluxo de carga. Além desse problema, circuitos sob condições de curto circuito seguiram um desenvolvimento semelhante.

3. Cálculos de Curto-Circuito Trifásico

Pode-se considerar um circuito elétrico, em condições de curto-circuito, como um sistema alimentado por várias fontes (geradoras) com uma única carga ligada ao sistema no nó sujeito ao curto-circuito. As correntes normais de carga dos consumidores são usualmente ignoradas, pois são pequenas em comparação à corrente de curto-circuito. Esta simplificação não afeta a precisão do estudo de curto-circuito. Isto é equivalente à análise estrutural de uma ponte apoiada em vários pilares e sujeita a uma só carga concentrada, desprezando-se os pesos dos vários elementos da própria estrutura. O restante deste texto se concentra na análise dos problemas de circuitos, mas deve-se lembrar que as técnicas aqui desenvolvidas aplicam-se igualmente às estruturas.

A análise completa de curto-circuito de um sistema pode ser feita por simples operações aritméticas, assim que as tensões dos nós tenham sido determinadas para uma condição de falta particular. Coombe e Lewis determinaram as tensões no nó em estudos de curto-circuito pelo procedimento iterativo de Gauss-Seidel desenvolvido por Ward e Hale para a solução dos problemas normais de fluxo de carga [1,2]. O método é pouco conveniente para estudos de curto-circuito, pois cada condição de falta exige uma solução interativa. Uma análise completa de um sistema com mil nós (barras) pode exigir cerca de vinte e trinta mil condições de falta, cada uma das quais teria que ser resolvida por um procedimento iterativo completamente diferente.

A análise de curto-circuito de sistemas elétricos muito grandes é feita da maneira mais eficiente, usando-se a matriz Z-barra [3].

3.1 Descrição da matriz Z-barra

A matriz Z-barra contém as impedâncias no ponto de cada nó com relação a um nó de referência escolhido arbitrariamente. A impedância no ponto de um nó é a impedância equivalente entre ele e a referência. A matriz Z-barra contém também a impedância de transferência entre cada barra do sistema e cada outra barra, com relação ao nó de referência. As impedâncias de transferência são determinadas calculando-se as tensões que existiriam em cada uma das outras barras do sistema, com relação à referência, quando uma barra em particular recebe uma injeção de corrente de uma unidade (veja a Fig. 3.1).

A equação matricial que relaciona a matriz Z-barra às correntes injetadas nos nós e às tensões dos nós, é a equação 3.1 a seguir:

$$ZI = E$$

Reconheceu-se logo que, se a matriz Z-barra usando como barra de referência escolhida a barra comum atrás das reatâncias transitórias do gerador estivesse disponível, a análise completa do circuito poderia ser facilmente feita com pouca computação adicional. Lembrado-se que um circuito em condições de falta poderia ser considerado como tendo somente uma corrente nodal, a equação matricial pode ser escrita como na equação 3.2 abaixo:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1k} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2k} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & Z_{k3} & \dots & Z_{kk} & \dots & Z_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nk} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ I_k \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ \dots \\ E_k \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}$$

onde o circuito está sujeito a uma única injeção de corrente I_k aplicada no nó k , que é a barra sujeita à condição de falta. Obviamente, a coluna k permite a determinação do perfil de tensões do circuito quando ocorre um curto-circuito no nó k , desde que I_k tenha sido, ou possa ser determinada. O elemento Z_{kk} é a impedância no ponto da barra k . Os elementos fora da diagonal Z_{ik} são impedâncias de transferência entre as outras barras e a barra k .

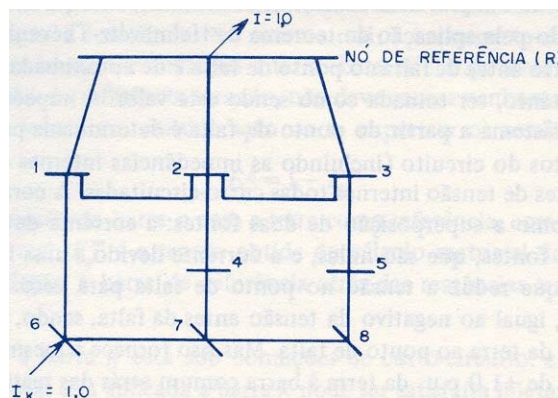
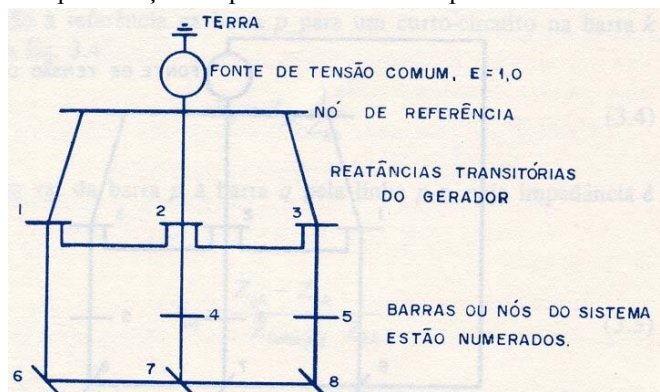


Fig 3.1. Impedância no ponto: $E_k - r = IZ_{kk}$; $I_k = 1,0$; $Z_{kk} = E_k - r$.
Impedância de transferência: $I_k=1,0$; $E_{ir} = IZ_{ik}$; $Z_{ik} = E_{ir}$

Nos cálculos de curto-circuito é usual admitir que todos os geradores ligados ao circuito estão operando com uma tensão de 1,0 p.u. atrás de suas reatâncias internas. Este ponto comum atrás das reatâncias dos geradores é usado como referência. Portanto, pode-se considerar o circuito como sendo alimentado por uma única fonte comum (veja a Fig. 3.2).

Fig. 3.2 Representação simplificada do sistema para estudo de curto-circuito.



O uso de 1,0 p.u. de tensão atrás da reatância interna da máquina pode ser justificado pela aplicação do teorema de Helmholtz-Thévenin. A tensão de circuito-aberto antes da falta no ponto de falta é de aproximadamente 1,0 p.u. e pode, portanto, ser tomada como sendo este valor. A impedância de curto-circuito do sistema a partir do ponto de falta é determinada pela impedância dos elementos do circuito (incluindo as impedâncias internas das máquinas), com as fontes, que são nulas, e a corrente devido a uma fonte de tensão superposta que reduz a tensão no ponto de falta para zero. Esta tensão é, obviamente, igual ao negativo da tensão antes da falta, sendo portanto, igual a $-1,0$ p.u. da terra à barra comum atrás das reatâncias transitórias.

Quando qualquer nó é curto-circuitado, fica ligado à terra. A tensão total é, portanto, aplicada entre o nó de referência e o nó sujeito à condição de falta. Por exemplo, para uma falta no nó 6, o diagrama pode ser desenhado como mostra a Fig. 3.3.

Como os elementos da matriz Z da equação 3.2 são as impedâncias no ponto (elementos da diagonal) e as impedâncias de transferência (elementos fora da diagonal), com relação à barra de referência as tensões da Eq. 3.2 são todas medidas em relação ao nó de referência atrás das reatâncias transitórias do gerador. O nó de referência está, portanto, a um potencial zero em relação a si próprio, mas está a tensão total em relação à terra no sistema real.

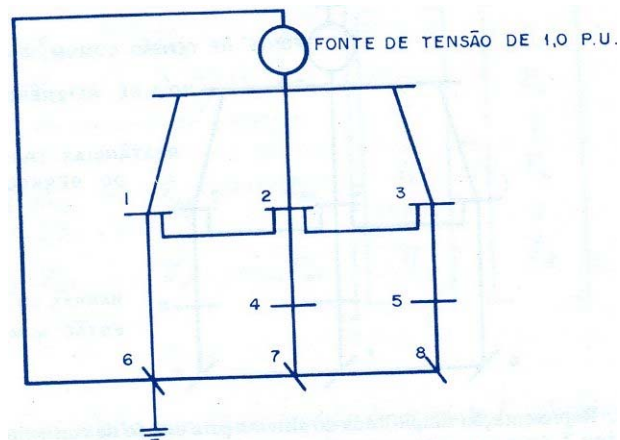


Fig. 3.3 O nó 6 está em condição de curto-circuito.

A tensão obtida da Eq. 3.2 para a barra sob condição de falta é a tensão total dos geradores em relação à referências. No sistema real, a barra curto-circuitada está com um potencial nulo em relação à terra. Esta diferença de tensões, depende do ponto de referência tomado, não deve causar nenhuma dificuldade, mas deve ser levada em consideração ao se expressar os resultados de um cálculo:

$$E_p^g = 1 - E_p^m$$

onde E_p é a tensão da barra p com a terra como referência, como seria medida no sistema real; E_p é a tensão obtida do cálculo matricial da Eq. 3.2 e é medida em relação à barra de referência atrás das reatâncias transitórias do gerador.

Quando a barra k está sob condições de curto-circuito, a restrição de que a tensão total seja aplicada à barra k pode ser satisfeita injetando-se a corrente I_k , que é determinada pela Eq. 3.3:

$$I_k = \frac{1}{Z_{kk}}$$

A corrente total de falta para qualquer barra é, portanto, obtida tomando-se o recíproco do elemento diagonal correspondente da matriz Z . As tensões que aparecem nas outras barras do sistema, quando a barra k está em condições de falta, dependem das impedâncias de transferência dadas pelos elementos fora da diagonal da coluna k da matriz Z -barra. Por exemplo, a tensão com relação à referência na barra p para um curto-circuito na barra k seria dada pela Eq. 3.4.

$$E_p = Z_{pk} \frac{1}{Z_{kk}}$$

A corrente que vai da barra p à barra q pela linha p - q , cuja impedância é $Z_{linha\ pq}$, é dada pela Eq. 3.5:

$$I_{pq} = \frac{Z_{qk} - Z_{pk}}{Z_{linha\ p-q}} \frac{1}{Z_{kk}}$$

A corrente de falta total para uma falta em qualquer barra é obtida pela Eq. 3.3 e a corrente em qualquer linha para um curto-circuito em uma barra particular é obtida pela Eq. 3.5. A análise completa do sistema é obtida por estas operações aritméticas simples, logo que a matriz Z tenha sido obtida.

3.2 O algoritmo de construção da matriz Z

Calcular a matriz de impedâncias no ponto e de transferência para um sistema elétrico de transmissão completo seria totalmente impossível. Entretanto, é possível, de maneira bastante simples, modificar a matriz Z de um sistema para a adição de uma única linha. Desta maneira, o sistema pode ser construído começando-se com uma única linha de transmissão, adicionando-se uma linha de cada vez, modificando-se a matriz para cada linha adicionada, e construindo o sistema desejado e a matriz que corresponde ao sistema [3].

Preparação de dados

Desenha-se um diagrama do sistema. Os pontos de junção, onde duas ou mais impedâncias de linhas de transmissão de transformadores ou de geradores são ligadas, recebem um único número de barra (nó). O número zero é reservado para a barra de referência. Em estudos de curto-circuito, a barra de referência é escolhida como sendo o ponto comum atrás de todas as reatâncias dos geradores.

Os dados são preparados descrevendo-se cada elemento do sistema de transmissão pelas duas barras nos terminais da linha e sua impedância em uma base p.u. comum. Estes dados são sequenciados por um algoritmo, partindo de uma ordem aleatória para uma seqüências, de maneira que, à medida que cada linha é selecionada da lista de dados para processamento, é possível ligá-lo ao sistema previamente construído. A primeira linha na lista deve ser uma linha que liga a referência a alguma barra do sistema, de maneira a fornecer uma trajetória até a referência para a corrente injetada em qualquer nó do sistema que está sendo construído.

Cada linha selecionada da lista deve pertencer a um dos três tipos:

- 1- Uma linha da referência para uma nova barra.
- 2- Uma linha radial de uma barra existente para uma nova barra.
- 3- Uma linha entre duas barras já incluídas no sistema (linha de fechamento de laço).

São necessárias três diferentes rotinas para modificar a matriz para a adição de uma linha ao sistema, dependendo do tipo de linha a se adicionada.

Uma linha de referência para uma nova barra

Uma linha de referência para uma nova barra do sistema é identificada ao se verificar que uma das barras é a barra de referência e a outra barra não está incluída no sistema já construído.

A corrente injetada na nova barra k , que está ligada por uma linha radial à referência, não produzirá tensão nas outras barras no sistema (veja a Fig. 3.4).

Uma injeção de corrente em qualquer barra do sistema que já tenha sido construído não produzirá nenhuma tensão nova na barra k . Todos os elementos fora da diagonal da nova fila e da nova coluna são, portanto, nulos.

$$Z_{ik} = Z_{ki} = 0 \quad i \neq k \quad (3.6)$$

A impedância no ponto da nova barra é a impedância da nova linha que está sendo adicionada. O elemento da diagonal no novo eixo da matriz correspondente à barra k é dado pela Eq. 3.7.

$$Z_{kk} = Z_{linha-k}$$

Para a adição de uma nova linha radial da referência a uma nova barra, aumente a matriz de uma fila e uma coluna de zeros. O elemento na diagonal deste novo eixo é a impedância da nova linha que está sendo adicionada. O número de barra k é adicionado à lista de barras que compõe o sistema.

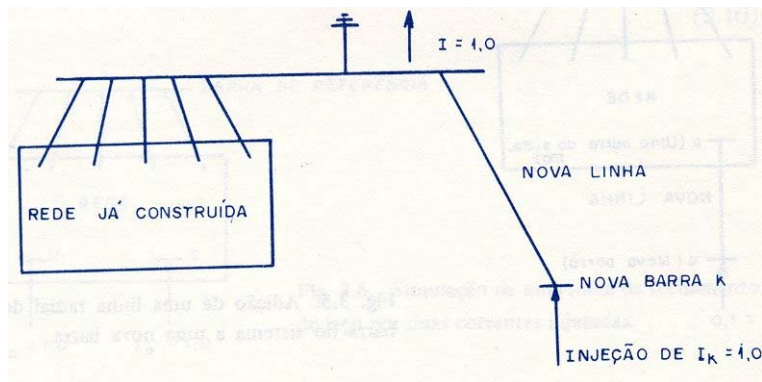


Fig 3.4. Adição de uma nova linha da referência à nova barra.

Adição de uma nova linha radial a uma nova barra

Uma linha radial ligando uma barra do sistema a uma nova barra é identificada ao observar que nenhuma das barras que descrevem a linha é a referência, e somente uma barra que descreve a linha está incluída no sistema. Uma injeção de uma unidade de corrente na barra q produz tensões em todas as outras barras do sistema idênticas às tensões que seriam produzidas se a corrente fosse injetada na barra p (veja a Fig. 3.5).

$$Z_{qk} = Z_{pk} \quad k \neq q$$

$$Z_{kq} = Z_{kp} \quad (3.8)$$

A impedância no ponto da barra q é igual a impedância no ponto da barra p mais a impedância da linha que está sendo adicionada (veja a Fig. 3.5).

$$Z_{qq} = Z_{pp} + Z_{linhapq} \quad (3.9)$$

Um novo eixo é adicionado à matriz correspondente à nova barra q . Os elementos fora da diagonal da nova fila e coluna são iguais aos elementos da fila e coluna da barra p do sistema existente. O elemento da diagonal é obtido da Eq. 3.9. A barra q é adicionada à lista de barras do sistema.

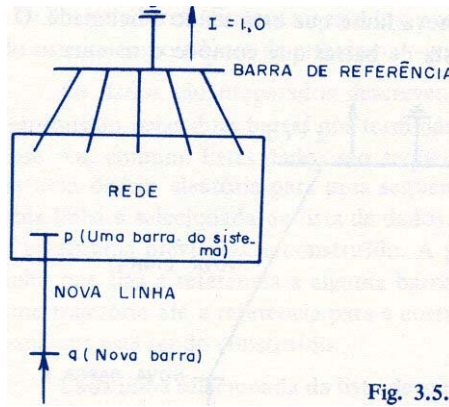


Fig. 3.5. Adição de uma linha radial de uma barra do sistema a uma nova barra.

Adição de uma linha de fechamento de laço

Uma linha de fechamento de laço é identificada pelo fato de que ambas as barras que descrevem a linha estão incluídas na lista de barras do sistema construído. A adição de uma linha de fechamento de laço não produz um novo nó no sistema, que forneceria um novo eixo para a matriz. Há, entretanto, uma nova descrição. A resposta do sistema à introdução de uma unidade de corrente no laço criado pela adição desta nova linha é uma restrição que deve ser satisfeita.

A injeção de uma unidade de corrente na barra p faz com que apareçam tensões em cada barra dos sistemas idênticos aos elementos da coluna p da matriz Z (veja a Fig. 3.6). A injeção de uma corrente de $-1,0$ na barra q produz tensões nas barras do sistema iguais aos elementos da coluna q da matriz Z , mas de sinal oposto. Uma corrente de laço igual à unidade pode ser considerada como um conjunto de correntes de $I_p = 1,0$ e $I_q = -1,0$ agindo simultaneamente. As tensões que aparecem nas barras do sistema são iguais à diferença das colunas correspondentes às barras p e q , como dado na Eq. 3.10.

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1p} & \dots & Z_{1q} & \dots & Z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & Z_{2p} & \dots & Z_{2q} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & Z_{3p} & \dots & Z_{3q} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Z_{np} & \dots & Z_{nq} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p = 1,0 \\ I_q = -1,0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{1p} - Z_{1q} \\ Z_{2p} - Z_{2q} \\ \dots \\ \dots \\ Z_{np} - Z_{nq} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

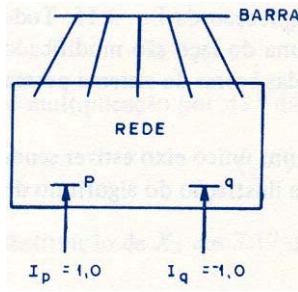


Fig. 3.6. Simulação de uma linha de fechamento de laço por duas correntes injetadas.

A tensão que deve ser introduzida no laço para causar a circulação de uma unidade de corrente no laço criado pela adição de uma nova linha pode ser calculada por 3.11 como fica evidenciado na Fig. 3.7.

$$E_{\text{laço}} = I_{\text{laço}} (Z_{pp} - Z_{pq} + Z_{qq} - Z_{pq} + Z_{\text{linhapq}}) \quad (3.11)$$

A impedância no ponto do laço, $Z_{\text{laço-laço}}$ é determinada fazendo-se $I_{\text{laço}} = 1,0$ em 3.11.

$$Z_{\text{laço-laço}} = Z_{pp} + Z_{qq} - 2Z_{pq} + Z_{\text{linhapq}} \quad (3.12)$$

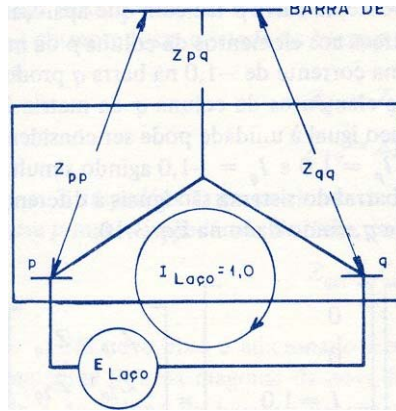


Fig. 3.7. Determinação da impedância no ponto do laço.

Um eixo de laço é adicionado à matriz Z da Eq. 3.10 na qual

$$Z_{i-\text{laço}} = Z_{ip} - Z_{iq} \quad i \neq \text{laço} \quad (3.13)$$

$$Z_{\text{laço}-i} = Z_{pi} - Z_{qi} \quad i \neq \text{laço} \quad (3.14)$$

O elemento da diagonal é obtido de 3.12. o eixo do laço é eliminado da matriz por uma redução de Kron [4], pela aplicação da Eq. 3.15. Todos os elementos que não pertencem à fila ou à coluna do laço são modificados. A fila e a coluna do laço são eliminadas. A lista das barras do sistema permanece inalterada.

A redução de Kron é muito simples se um único eixo estiver sendo eliminado. Isto será mostrado posteriormente na ilustração do algoritmo de formação.

Redução de Kron de uma matriz

Considere a matriz da Fig. 3.8. a matriz pode ser modificada para refletir as alterações no

$$\left(\begin{array}{c|c} Z_1 & Z_2 \\ \hline Z_3 & Z_4 \end{array} \right)$$

Fig. 3.8. Matriz particionada para ser reduzida.

sistema quando os eixos correspondentes às filas de Z_3 e às colunas de Z_2 são eliminados. Esta matriz modificada Z_1 pode ser considerada como uma redução de circuito de Kron ou como uma eliminação algébrica. A redução de Kron é dada por

$$Z_1' = Z_1 - Z_2 Z_4^{-1} Z_3 \quad (3.15)$$

A validade da redução 3.15 pode ser provada considerando-se a equação matricial 3.16.

$$\left(\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right) \quad (3.16)$$

na qual A_1, A_2, A_3 e A_4 podem ser consideradas matrizes ou coeficientes simples e X_1, X_2, B_1 e B_2 são vetores ou variáveis simples, respectivamente.

A Eq. 3.16 em forma expandida é

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = B_1 \quad (3.17)$$

$$A_3 X_1 + A_4 X_2 = B_2 \quad (3.18)$$

Reescrevendo 3.18 vem

$$A_4 X_2 = B_2 - A_3 X_1 \quad (3.19)$$

A pré-multiplicação por A_4^{-1} dá

$$X_2 = A_4^{-1}B_2 - A_4^{-1}A_3X_1 \quad (3.20)$$

A substituição de X_2 em 3.17 dá

$$A_1X_1 + A_2(A_4^{-1}B_2 - A_4^{-1}A_3X_1) = B_1 \quad (3.21)$$

Rearranjando e reunindo os termos vem

$$(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)X_1 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2 \quad (3.22)$$

Vê-se que o coeficiente da incógnita X_1 é o resultado de uma redução de Kron em A_1 , como dado por 3.15, quando a incógnita X_2 é eliminada.

4. Um exemplo ilustrativo do algoritmo de construção

Considere o circuito mostrado na Fig. 3.9 e os seguintes dados:

Dados do Sistema	
Linha	X (p.u.)
0-1	0,010
0-2	0,015
1-2	0,084
0-3	0,005
2-3	0,122
2-4	0,084
3-5	0,037
1-6	0,126
6-7	0,168
4-7	0,084
5-8	0,037
7-8	0,140

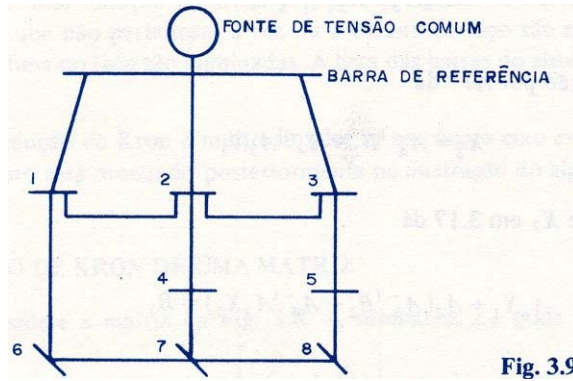


Fig. 3.9.

Fig. 3.9.

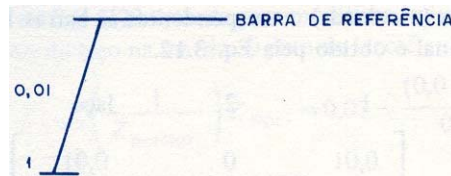
A matriz do circuito é construída montando-se o sistema linha por linha e modificando-se a matriz para refletir a alteração nas impedâncias equivalentes do circuito com a adição da linha. A lista de linhas já foi reordenada a partir de uma lista aleatória para uma seqüência tal que seja possível ligar cada linha ao sistema, quando ela for selecionada da lista para processamento.

Adição da primeira linha. A primeira linha deve sempre ser uma linha ligada à referência. Assim, a linha 0-1 pode ser a primeira linha a ser processada. Neste ponto, nenhum circuito, nem matriz e nem elementos na lista de barras do sistema para determinar o tipo de linha e o algoritmo a ser usado. Vê-se que a linha está ligada à referência e a barra 1. A barra 1 é comparada com a lista de barras do sistema. Nesta altura, ainda não há nenhuma barra no sistema. A linha é, portanto, um caso degenerado da adição de uma linha a partir da referência até uma nova barra (veja a Fig. 3.4).

É impossível adicionar uma fila e uma coluna de zeros à matriz, pois ainda não há nenhuma matriz neste ponto. O elemento da diagonal do novo eixo é a impedância da linha que está sendo adicionada. A nova barra é adicionada à lista de barras. Após adicionada a primeira linha, temos:

$$\text{Matriz} \begin{matrix} & 1 \\ 1 & [0,01] \end{matrix} \quad \text{lista de barras } 1$$

O diagrama do sistema é mostrado a seguir.

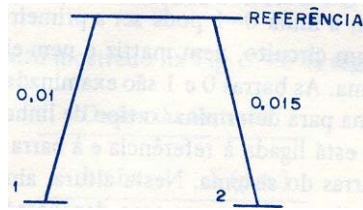


A matriz mostra que uma unidade de corrente injetada na barra 1 faria aparecer nesta uma tensão de 0,01 medida em relação à barra de referência.

Adição da segunda linha. A próxima linha (0-2) é selecionada da lista de dados para processamento. O exame dos números de barra 0 e 2 e a comparação com a lista de barras do sistema mostram que esta linha vai da barra de referência (0) a uma nova barra 2. É também um linha do primeiro tipo. Aumente a matriz com uma fila e uma coluna de zeros. O elemento da diagonal do novo eixo é a impedância da nova linha. Adicione a barra 2 à lista de barras.

$$\text{Matriz} \begin{matrix} & 1 & 2 \\ 1 & \left(\begin{matrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,015 \end{matrix} \right) \\ 2 & & \end{matrix} \quad \text{Lista de barras } 1,2$$

O diagrama do sistema é mostrado a seguir.



A matriz mostra-nos que a injeção de uma unidade de corrente na barra 1, saindo pela referência, faz aparecer uma tensão nula na barra 2. a injeção de uma unidade de corrente na barra 2 produzirá uma tensão de 0,015 na barra 2 e uma tensão nula na barra 1.

Adição da terceira linha. A próxima linha (1-2) é selecionada para processamento. O exame dos números da barra mostra que esta não é uma linha de referência. A comparação dos números das barras da linha com os números das barras do sistema, mostra que esta é uma linha do terceiro tipo (fechamento de laço).

A matriz é aumentada de uma fila e uma coluna de laço tomando-se as diferenças das filas (e colunas) correspondentes às barras 1 e 2, Eq. 3.13. o elemento da diagonal é obtido pela Eq. 3.12.

$$\text{Matriz} \quad \begin{matrix} & & 1 & 2 & \text{laço} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \text{laço} \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc} 0,01 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0,015 & -0,015 \\ 0,01 & -0,015 & 0,109 \end{array} \right) & \text{Lista de barras 1,2} \end{matrix}$$

O diagrama do sistema é mostrado abaixo

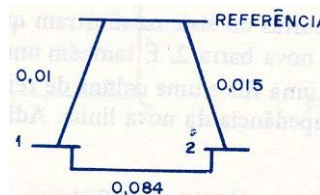


Fig. 3.10

A matriz é reduzida pela aplicação da redução de Kron usando a Eq. 3.15 como já salientamos, a redução de Kron é grandemente simplificada quando nela está envolvido somente um eixo. Neste caso Z_4^{-1} torna-se $1/Z$ e não é necessária a inversão de uma matriz. A modificação dos elementos não pertencentes à fila e à coluna do laço pode ser executada mais facilmente elemento por elemento que pela aplicação da Eq. 3.15 como uma equação matricial.

Pode-se verificar facilmente que a modificação de um elemento, Z_{ij} , é simplesmente:

$$Z'_{ij} = Z_{ij} - Z_{i-\text{laço}} \left[\frac{1}{Z_{\text{laço}-\text{laço}}} \right] Z_{\text{laço}-j} \quad (3.23)$$

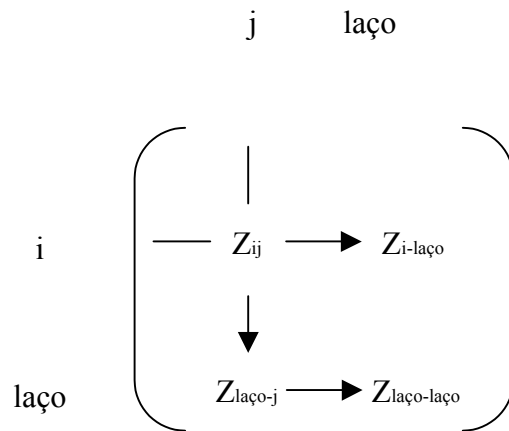


Fig. 3.11. elementos matriciais usados na modificação do elemento Z_{ij} pela redução de Kron

A aplicação da Eq. 3.23 é usada para modificar todos os elementos não pertencentes ao eixo do laço na matriz. O eixo do laço é então eliminado.

$$Z'_{11} = Z_{11} - Z_{1-\text{laço}} \left(\frac{1}{Z_{\text{laço-laço}}} \right) Z_{\text{laço-1}} =$$

$$= 0,01 - \frac{(0,01)(0,01)}{0,109}$$

$$= 0,01 - 0,00091743 = 0,00908257$$

$$Z'_{12} = Z_{12} - Z_{1-\text{laço}} \left(\frac{1}{Z_{\text{laço-laço}}} \right) Z_{\text{laço-2}} =$$

$$= 0 - \frac{(0,01)(-0,015)}{0,109}$$

$$= 0 + 0,00137615 = 0,00137615$$

$$Z'_{22} = 0,015 - \frac{(-0,015)(-0,015)}{0,109}$$

$$= 0,015 - 0,00206421$$

$$= 0,0129359$$

A matriz modificada é

$$\text{Matriz} \quad \begin{matrix} & & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc} 0,00908257 & 0,00137615 \\ 0,00137615 & 0,01293579 \end{array} \right) & \text{Lista de barras 1,2} \end{matrix}$$

A Redução da Matriz – Uma Conversão Triângulo-Estrela. A redução da matriz pode ser vista como uma redução de circuito tipo triângulo-estrela. O circuito da Fig. 3.10 pode ser convertido na estrela equivalente pela conversão triângulo-estrela normal.

$$Z_1 = \frac{(0,01)(0,015)}{0,01+0,015+0,084} = \frac{(0,01)(0,015)}{0,109} = 0,00137615$$

$$Z_2 = \frac{(0,01)(0,084)}{0,109} = 0,00770642$$

$$Z_3 = \frac{(0,015)(0,084)}{0,109} = 0,01155964$$

Se o circuito da Fig. 3.12 é excitado por uma unidade de corrente na barra 1, a impedância no ponto Z_{11} é a soma de Z_1 e Z_2 .

$$Z_{11} = 0,00137615 + 0,0077062 = 0,00908257$$

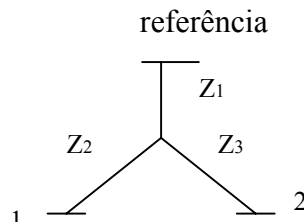


Fig. 3.12.

A tensão da barra 2 é igual à queda de tensão na impedância $Z_1 = 0,00137615$. Isto é a impedância de transferência Z_{12} .

A impedância no ponto da barra 2 é então obtida injetando uma unidade de corrente na barra 2.

$$Z_{22} = Z_1 + Z_3 = 0,00137615 + 0,01155964 = 0,01293579$$

Estes valores concordam com a matriz obtida pela redução de Kron. Assim, a redução pode ser encarada como uma redução de circuito ou como uma manipulação algébrica.

Adição da quarta linha. Continua-se o algoritmo de construção, selecionando-se a próxima linha 0-3 para processamento. Esta linha é identificada como uma linha do primeiro tipo. A matriz é aumentada de uma fila e uma coluna de zeros e a diagonal do novo eixo é a impedância da linha, 0,005. a nova barra é adicionada à lista de barras.

$$\text{Matriz} \begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc} 0,00908257 & 0,00137615 & 0 \\ 0,00137615 & 0,01293579 & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 \end{array} \right) & \text{Lista de barras 1,2,3} \end{matrix}$$

Adição da quinta linha. A próxima linha na lista de dados (2-3) é uma linha de fechamento de laço, pois ambas as barras estão na lista de barras do sistema. O eixo do laço é a diferença das colunas correspondentes às barras 2 e 3. o elemento da diagonal é obtido da Eq. 3.12.

$$\begin{aligned} Z_{\text{laço-laço}} &= Z_{22} + Z_{33} - 2Z_{23} + Z_{\text{linha 2-3}} \\ &= 0,01293578 + 0,005 - (2)(0) + 0,122 \\ &= 0,13993578 \end{aligned}$$

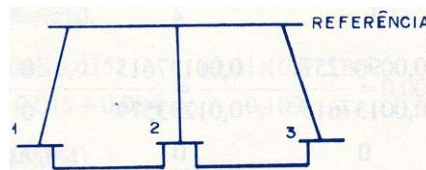
A matriz aumentada é:

$$\begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 & \text{laço} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \text{laço} \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 0,00908257 & 0,00137615 & 0 & 0,00137615 \\ 0,00137615 & 0,01293579 & 0 & 0,01293579 \\ 0 & 0 & 0,005 & -0,005 \\ 0,00137615 & 0,01293579 & -0,005 & 0,13993579 \end{array} \right) \end{matrix}$$

A redução da matriz pela aplicação da Eq. 3.23 dá

$$\text{Matriz} \begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc} 0,00906904 & 0,00124893 & 0,00004917 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 \\ 0,00004917 & 0,00046220 & 0,00482135 \end{array} \right) \end{matrix}$$

O diagrama do sistema é mostrado a seguir.



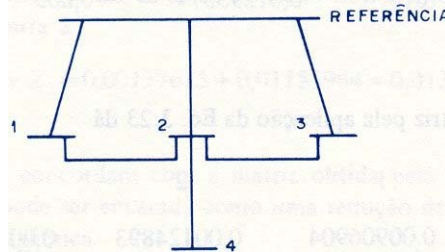
Adição da sexta linha. A linha 2-4 é identificada como do segundo tipo, uma linha que vai da barra existente 2 até a nova barra 4. um novo eixo é adicionado à matriz. O elemento da diagonal é determinado pelo uso da Eq. 3.9.

$$Z_{44} = Z_{22} + Z_{\text{linha 2-4}} = 0,011739999 + 0,084 = 0,095739999$$

Os elementos fora da diagonal são obtidos da Eq. 3.8 na qual $q=4$ e $p=2$. a fila correspondente à barra 4 é idêntica à fila da barra 2.

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 0,00906904 & 0,00124893 & 0,00004917 & 0,00137615 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 & 0,01173999 \\ 0,00004917 & 0,00046220 & 0,00482135 & 0,00046220 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 & 0,09573999 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

O diagrama do sistema é dado a seguir.



Adição da sétima linha. Adição da linha 3-5 dá:

$$Z_{55} = Z_{33} + Z_{\text{linha}3-5} = 0,00482135 + 0,037 = 0,04182135$$

A coluna 5 é uma duplicata da coluna 3.

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc} 0,00906904 & 0,00124893 & 0,00004917 & 0,00137615 & 0,00004917 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 & 0,01173999 & 0,00046220 \\ 0,00004917 & 0,00046220 & 0,00482135 & 0,00046220 & 0,00482135 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 & 0,09573999 & 0,00046220 \\ 0,00004917 & 0,00046220 & 0,00482135 & 0,00046220 & 0,04182135 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

listas de Barras 1,2,3,4,5

Adição da oitava linha. A adição ao sistema da linha 1-6, que é uma linha ligando uma barra existente 1 a uma nova barra 6, é executada como indicado para a linha 3-5 na etapa 7 (linha do tipo 2).

Adição da nona linha. A linha 6-7 é também uma linha do tipo 2, ligando uma barra existente 6 a uma nova barra 7. o processo é ilustrado na etapa 7. após a adição destas duas linhas a matriz é

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 0,00906904 & 0,00124893 & 0,00004917 & 0,00137615 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 & 0,01173999 \\ 0,00004917 & 0,00046220 & 0,00482135 & 0,00046220 \\ 0,00124893 & 0,01173999 & 0,00046220 & 0,09573999 \\ 0,00004917 & 0,00046220 & 0,00482135 & 0,00046220 \\ 0,00906904 & 0,00124893 & 0,00004917 & 0,00124893 \\ 0,00906904 & 0,00124893 & 0,00004917 & 0,00124893 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

5	6	7
0,00004971	0,00906904	0,00906904
0,00046220	0,00124893	0,00124893
0,00482135	0,00004917	0,00004917
0,00046220	0,00124893	0,00124893
0,00482135	0,00004917	0,00004917
0,00004917	0,13506904	0,13506904
0,00004917	0,13506904	0,13506904

Adição da décima linha. A linha 4-7 é uma linha de fechamento de laço, pois ambas as barras já constam do sistema. A fila e a coluna do laço são obtidas tomando-se a diferença das filas 4 e 7 e das colunas 4 e 7. o elemento da diagonal deste novo eixo é obtido da Eq. 3.12.

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{laço-laço}} &= Z_{44} + Z_{77} - 2Z_{47} + Z_{\text{linha4-7}} = \\
 &= 0,09573999 + 0,30306904 - 2(0,00124893) + 0,084
 \end{aligned}$$

O eixo do laço é eliminado como ilustrado nas etapas 3 e 5.

Adição da décima-primeira linha. A linha 5-8 é uma linha do tipo 2 e sua adição é feita da maneira ilustrada na etapa 6.

Adição da última linha. A linha 7-8 é uma linha de fechamento de laço. O método já foi ilustrado na etapa 3. Vê-se facilmente que, independente da complexidade do sistema, ela pode ser obtida por este método simples de adicionar uma linha de cada vez.

A matriz completa do sistema-exemplo é dada para fins de referência.

	1	2	3	4
1	0,00906904	0,00124893	0,00004917	0,00137615
2	0,00124893	0,01173999	0,00046220	0,01173999
3	0,00004917	0,00046220	0,00482135	0,00046220
4	0,00124893	0,01173999	0,00046220	0,09573999
5	0,00004917	0,00046220	0,00482135	0,00046220
6	0,00906904	0,00124893	0,00004917	0,00124893
7	0,00906904	0,00124893	0,00004917	0,00124893
8	0,00102639	0,00220239	0,00375267	0,01464439

	5	6	7	8
0,00004971	0,00906904	0,00906904	0,00102639	
0,00046220	0,00124893	0,00124893	0,00220239	
0,00482135	0,00004917	0,00004917	0,00375267	
0,00046220	0,00124893	0,00124893	0,01464439	
0,00482135	0,00004917	0,00004917	0,03199261	
0,00004917	0,13506904	0,13506904	0,01219496	
0,00004917	0,13506904	0,13506904	0,02708638	
0,03199261	0,01219496	0,02708638	0,06023255	

Análise de faltas em um sistema

Uma análise completa do sistema é possível tão logo a matriz Z do sistema tenha sido completada. Usando os valores que estão na matriz do sistema exemplo para fins de ilustração, considere uma condição de falta no nó 3. o elemento da matriz $Z_{33} = 0,00475959$ mostra que, se uma tensão daquele valor for aplicada entre a barra 3 e a referência, uma corrente total de 1,0 irá percorrer o circuito. A tensão total do gerador produzirá uma corrente que pode ser determinada considerando-se

$$\frac{I'}{I} = \frac{E'}{E}$$
$$(3.24)$$

Onde $I=1,0$ quando $E=0,00475959$. deseja-se determinar I' quando $E'=1,0$.

$$I' = \frac{1,0}{0,00475959} = 210,10 \text{ p.u.}$$

Este é o resultado que é obtido considerando-se a matriz 3.2 e a Eq.3.3.

O valor total da falta pode ser obtido tanto em ampères, p.u., ou MVA dividindo os ampères-base, a unidade ou base MVA p.u. dos dados da linha pelos elementos correspondentes da diagonal da matriz (veja a Eq. 3.5).

A contribuição de uma linha à falta é calculada usando-se a Eq. 3.5. a contribuição da barra 2 à falta é

$$I_{23} = \frac{Z_{33} - Z_{32}}{Z_{\text{linha}2-3}} \frac{1,0}{Z_{33}} = (0,00475959 - 0,00055371) / (0,122)(0,00475959) = 7,2 \text{ p.u.}$$

Nota: a base aqui foi 1,0 e a corrente está em p.u. Poderia também ser usados ampères-base ou MVA.

Tensões nas barras durante uma condição de falta

A tensão na barra 2 quando é injetada uma unidade de corrente na barra 3 é $Z_{23} = 0,00055371$. A tensão na barra 3 neste instante é 0,00475959. a diferença de tensão é $Z_{33} - Z_{32} = 0,00475959 - 0,00055371 = 0,00420588$. Esta diferença ocorreria se a corrente fosse 1,0 mas a corrente de falta é $\frac{1}{Z_{33}}$ conforme determinado. A diferença de tensão entre as barras 2 e 3 é, portanto,

$$\frac{Z_{33} - Z_{32}}{Z_{33}} = \frac{0,00420588}{0,00475959} = 0,8835 \text{ p.u.}$$

mas a tensão da barra 3 em condições de falta é zero. Portanto, a tensão na barra 2 é = 0,8835.

Abertura de uma linha durante um estudo

Uma linha de um sistema pode ser aberta ou removida adicionando-se uma linha em paralelo à linha existente. A impedância da nova linha a ser adicionada é o negativo da impedância da linha original. São usadas as equações de fechamento de laço (Eqs. 3.12 e 3.13) e a eliminação do laço por uma redução de Kron (Eq. 3.15).

No decorrer de um estudo completo de faltas é freqüentemente desejável abrir todas as linhas ligadas à barra em condição de falta, uma de cada vez, e obter a nova falta total e a contribuição das linhas restantes. Não é desejável modificar a matriz do sistema total, pois uma grande quantidade de cálculos desnecessários seria feita em elementos que não são necessários à análise. Mais ainda, também é indesejável (por causa do arredondamento) remover uma linha, adiciona-la de novo, remover outra, adiciona-la de novo, e assim por diante. Os erros se acumulariam nos elementos da matriz Z devido à modificação repetida da matriz.

O melhor método consiste em extrair da matriz total uma pequena matriz que inclua as impedâncias no ponto e de transferência da barra que estará em falta e de suas barra vizinha próximas.

Por exemplo, se a barra 3 deve sofrer uma falta, extrai-se a pequena matriz.

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0,00475959 & 0,00055371 & 0,00425613 \\ 2 & 0,00055371 & 0,01134623 & 0,00137805 \\ 5 & 0,00425613 & 0,00137805 & 0,03662437 \end{pmatrix}$$

Para abrir a linha 3-5 adiciona-se uma linha (de fechamento de laço) cuja impedância é o negativo da impedância da linha original - 0,037. o elemento da diagonal do eixo do laço é

$$\begin{aligned} Z_{\text{laço-laço}} &= Z_{33} + Z_{55} - 2Z_{35} + Z_{\text{linha3-5}} = 0,00475959 + 0,03662437 - 2(0,00425613) - 0,037 \\ &= -0,00412830 \end{aligned}$$

A coluna do laço é obtida subtraindo-se a coluna 5 da coluna 3.

$$\begin{array}{c} \phantom{\text{laço}} \\ \phantom{\text{laço}} \\ 3 \phantom{\text{laço}} \\ 2 \phantom{\text{laço}} \\ 5 \phantom{\text{laço}} \\ \text{laço} \end{array} \begin{pmatrix} & 3 & 2 & 5 & \text{laço} \\ 3 & 0,00475959 & 0,00055371 & 0,00425613 & 0,00050346 \\ 2 & 0,00055371 & 0,01134623 & 0,00137805 & -0,00082432 \\ 5 & 0,00425613 & 0,00137805 & 0,03662437 & -0,03236824 \\ \text{laço} & 0,00050346 & -0,00082434 & -0,03236824 & -0,00412830 \end{pmatrix}$$

Para maior eficiência, a redução de Kron é usada para modificar somente a fila 3, pois uma falta na barra 3 pode ser completamente analisada, usando-se somente esses valores.

O vetor fila modificado que indica a abertura da linha 3-5 é

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} & 3 & 2 & 5 \\ 3 & [0,00482099 & 0,00045317 & 0,00030870] \\ & & & \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

A nova falta total é

$$\frac{\text{base}}{Z_{33}} = \frac{1}{0,00482099} = 207,43 \text{ p.u.}$$

A contribuição da barra 2 é de 7,4 p.u. a corrente da barra 5 para a barra 3 através da linha X=0,037 tem o mesmo valor que a corrente na linha X=-0,037 mas com sinal contrário. A contribuição líquida de 5 para 3 é, portanto, zero.

O vetor fila, que dá os valores para a falta na barra 3 com a linha 3-5 aberta, fornece uma excelente oportunidade para a determinação do valor da corrente de falta que ocorreria se a falta fosse retirada da barra 3 e colocada no lado da linha correspondente ao disjuntor na barra 5, na linha 3-5 (veja a Fig. 3.13).

O vetor fila dá as impedâncias no ponto e de transferência da barra 3 com a linha aberta. A impedância no ponto da barra 9 é obtida da Eq. 3.9. Como a linha 3-9 é radial a partir da barra 3,

$$Z_{qq} = Z_{33} + Z_{linha3-5} = 0,00482099 + 0,037 = 0,04182099$$

A falta total no ponto 9 é = base/0,04182099 = 23,91 p.u.

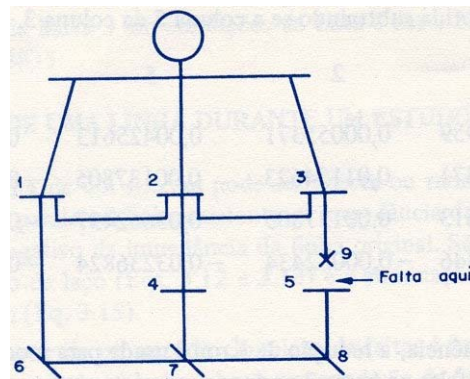
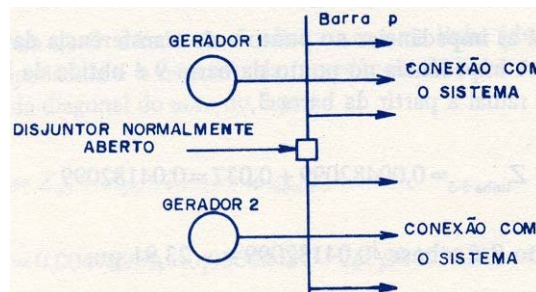


Fig. 3.13 Falta transferida para a extremidade aberta da linha.

Disjuntores de acoplamento de barras

Alguns sistemas elétricos têm disjuntores de acoplamento de barras que podem ser abertos ou fechados por motivos de operação. Por exemplo, uma estação geradora pode Ter dois geradores ligados a um sistema de barras como mostrado pela Fig. 3.14.

Se qualquer dos geradores estiver fora de serviço para a manutenção, ou por alguma outra razão de operação, pode ser necessário fechar o disjuntor de acoplamento de barras. A matriz pode ser modificada para representar a condição do disjuntor de acoplamento de barras fechado adicionando-se uma linha de impedância nula entre as barras P e Q. Este é um método perfeitamente satisfatório de modelar o sistema para o disjuntor de acoplamento de barras fechado, mas seria impossível abrir novamente o disjuntor mais adiante no estudo. Isso se torna evidente considerando-se a adição de uma linha de impedância - 0,0 numa tentativa de abrir a linha de impedância 0,0 correspondente ao disjuntor fechado. Quando o disjuntor é fechado, as duas colunas (P e Q) se tornam idênticas em valor, pois existe uma impedância nula ligada entre as barras. O elemento da diagonal para a adição do elemento de impedância 0,0 numa tentativa de abrir o disjuntor, torna-se



$$Z_{laço-laço} = Z_{pp} + Z_{qq} - 2Z_{pq} + (-0,0)$$

mas

$$Z_{pp} = Z_{qq} = Z_{pq}$$

quando as barras são ligadas e $Z_{\text{laço-laço}} = 0$.

A substituição deste valor na Eq. 3.23 não é permitida. Portanto o disjuntor de acoplamento de barras não pode ser aberto se esta representação for usada.

Disjuntor de acoplamento de barras que pode ser aberto

Para se ligar duas barras com uma impedância de acoplamento de barras que possa ser aberta, introduz-se uma barra fictícia entre as barras a serem ligadas e adiciona-se uma linha de P a T com uma impedância Z_1 e uma linha de T e Q com uma impedância de Z_1 (veja a Fig. 3.15).

A impedância da barra P para a barra Q é nula, mas agora o disjuntor pode ser aberto adicionando-se uma linha da barra T à barra Q com impedância $+Z_1$. Isto remove um lado do disjuntor de acoplamento de barras.

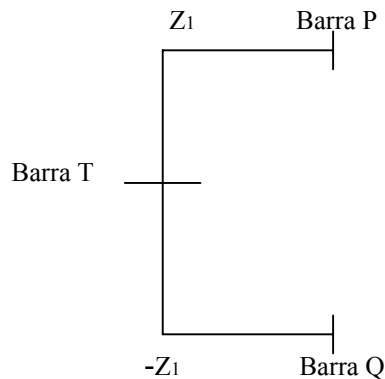


Fig. 3.15. Simulação de um disjuntor de acoplamento de barras fechado.

4. Limitação do método da matriz Z

Como a matriz Z é cheia, ou seja, existe uma impedância de transferência para cada barra em relação a cada outra barra, as exigências de memória para seu armazenamento são muito grandes. Devido a relação X para R dos sistemas de alta tensão ser elevada (de ordem de 10, por exemplo) a matriz Z pode ser calculada usando-se somente os valores de X sem afetar seriamente a precisão do estudo. Mais ainda, a matriz é simétrica e pode, portanto, ser armazenada na forma triangular superior. Um sistema de 100 barras necessitará de uma matriz de 5.050 elementos $N(N+1)/2$. Um sistema de 200 barras tem 20.100 elementos. Até cerca de 1958 os estudos de falta nos grandes sistemas elétricos eram feitos em modelos analógicos com menos de 100 barras. A introdução dos programas de computadores digitais aumentou muito rapidamente o número de barras usadas na representação. Tornou-se necessário imaginar métodos para aumentar o tamanho do programa.

5. Referências Bibliográficas

- 1- J. R. Ward e H. W. Hale, Digital solution of power flow problems, Trans. AIEE, Vol. 75.
- 2- R. A. Frazer, W. J. Duncan, e A. R. Collar, Elementary Matrices, Cambridge Press, 1995.
- 3- Homer E. Brown, Grandes Sistemas Elétricos, LTC/EFEL.