UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA

Carla do Nascimento Lopes
Maria Emilia Neves Cardoso

Sumário

Capítulo 1: Noções Iniciais

O objetivo desse capítulo é fornecer uma revisão de alguns tópicos necessários à boa compreensão deste texto. Iniciaremos com uma breve revisão de Álgebra, apresentando exemplos resolvidos e exercícios de fixação. Em seguida, estudaremos um pouco de coeficiente angular e equações de retas e as ideias básicas de funções, incluindo um resumo de funções exponenciais e de funções logarítmicas.

1.1 – Álgebra básica

1.1.1 – Produtos Notáveis

– Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

– Quadrado da diferença de dois termos: $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$

– Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

– Cubo da soma de dois termos: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

– Cubo da diferença de dois termos: $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$

1.1.2 – Fatoração de expressões algébricas

Fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la na forma de um produto de dois ou mais termos (fatores). A fatoração se baseia na lei da distributividade da multiplicação e pode ser usada para simplificar expressões algébricas e para resolver algumas equações. Seguem alguns dos métodos de fatoração:

– Colocação de fator comum em evidência

Exemplos: 1) Fatore $4x^5 + 8x^3$

Solução: Como os dois termos dessa expressão são divisíveis por $4x^3$, podemos usar a lei da distributividade para colocar $4x^3$ “em evidência” e escrever: $4x^5 + 8x^3 = 4x^3(x^2 + 2)$

2) Fatore a expressão $10(x – 5)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(x – 5)^3$

Solução: Os dois termos são divisíveis por $2(x – 5)^3(x + 1)^4$

Colocando esse fator em evidência temos:

$$10(x – 5)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(x – 5)^3 = 2(x – 5)^3(x + 1)^4[5(x – 5) + 4(x + 1)]$$

Efetuamos os produtos nos termos entre colchetes e reduzimos os termos semelhantes para chegar ao resultado final: $2(x – 5)^3(x + 1)^4(9x – 21)$

– Agrupamento de fatores comuns

Exemplo: $ax – bx + 2a – 2b = x(a – b) + 2(a – b) = (a – b)(x + 2)$

– **Diferença de dois quadrados:** $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemplo: $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

– **Soma de dois cubos:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemplo: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

– **Diferença de dois cubos:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo: $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

1.1.3 – Resolução de equações do 2º grau pela fórmula de Báskara

Encontramos as soluções (raízes) de uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ usando uma expressão conhecida como fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de **discriminante** da equação. Quando $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais; quando $\Delta = 0$, a equação possui uma raiz real (ou duas raízes reais iguais); quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Exemplos: 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solução: Temos que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Aplicando a fórmula de Báskara obtemos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2$$

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Solução: Temos que $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$. Aplicando a fórmula de Báskara obtemos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

3) $x^2 + 2x + 3 = 0$

Solução: Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Aplicando a fórmula de Báskara obtemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Então não existem raízes reais

Observação: Quando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ possui raízes reais podemos escrever o trinômio $ax^2 + bx + c$ na **forma fatorada** da seguinte maneira:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ onde x_1 e x_2 são as raízes da equação

Exemplos: Escreva os trinômios $x^2 - 7x + 12$ e $10x^2 - 3x - 1$ na forma fatorada.

Solução: Resolvendo a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ encontramos as raízes $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$

Então $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

Resolvendo a equação $10x^2 - 3x - 1 = 0$ encontramos as raízes $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = -\frac{1}{5}$

Então $10x^2 - 3x - 1 = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$

1.1.4 – Simplificação de expressões algébricas por fatoração e cancelamento

Podemos combinar a fatoração e o cancelamento para simplificar frações algébricas obtendo uma fração mais simples que seja equivalente à fração dada.

Exemplos: 1) $\dfrac{6a^2bx}{2ab^3x} = \dfrac{3a}{b^2}$

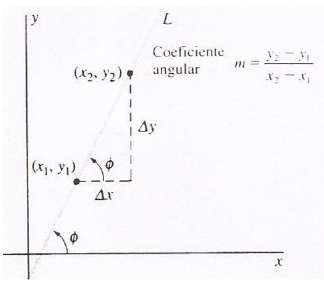
2) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a+b)} = \dfrac{a-b}{a+b}$

3) $\dfrac{10xy}{10x^2 + 5xy} = \dfrac{10xy}{5x(2x + y)} = \dfrac{2y}{2x + y}$

1.2 – Coeficiente angular e equações de retas

As linhas retas num plano têm equações muito simples, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas. Estas equações podem ser deduzidas utilizando-se o conceito de **coeficiente angular**.

Definição: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos distintos de uma reta r. Se $x_1 \neq x_2$ então o **coeficiente angular** (ou inclinação) m de r é dado por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Exemplo 1: Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (–2, 5) e (3, –1).

Solução: $m = \dfrac{-1-5}{3-(-2)} = \dfrac{-6}{5}$

Exemplo 2: Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (7, 1) e (3, 1).

Solução: $m = \dfrac{1-1}{3-7} = \dfrac{0}{-4} = 0$

Observação: O valor de m calculado pela definição anterior é independente da escolha dos dois pontos em r.

Seja (x_1, y_1) um ponto dado de uma reta de coeficiente angular m.

Então, para qualquer outro ponto (x, y) da reta com $x \neq x_1$ temos que $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = m$

Daí, multiplicando ambos os membros por $(x - x_1)$ obtemos a equação da reta na forma **ponto-coeficiente angular**.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1)$$

Se o ponto conhecido é aquele em que a reta corta o eixo y, e é denotado por (0, b), então a equação (1) torna-se

$$y = mx + b \qquad (2)$$

Neste caso, b é chamado de **interseção y da reta** ou **coeficiente linear** e (2) é a equação da reta na forma **coeficiente angular-interseção** (ou equação reduzida da reta**)**.

Exemplo 3: Escreva a equação da reta que:

a) passa pelos pontos (4, – 2) e (5, 8).

b) passa por (2, – 3) e tem coeficiente angular – 4.

c) tem coeficiente angular 2 e coeficiente linear – 5.

Solução:

a) $m = \dfrac{8-(-2)}{5-4} = 10$

Então por (1) a equação da reta é $y - 8 = 10(x - 5)$ ou $y = 10x - 42$

b) Por (1), $y - (-3) = -4(x - 2) \therefore y + 3 = -4x + 8 \therefore y = -4x + 5$

c) Por (2), $y = 2x - 5$

Observações:

1 – O coeficiente angular de uma reta vertical não é definido, por isso as fórmulas (1) e (2) não são apropriadas para se obter sua equação. Mas como as primeiras coordenadas de todos os pontos de uma reta vertical são iguais, uma reta vertical que passa pelo ponto (x_1, y_1) tem equação $x = x_1$.

2 – Duas retas não verticais são **paralelas** se e somente se seus coeficientes angulares são iguais, isto é,

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

3 – Duas retas não verticais são **perpendiculares** se e somente se o coeficiente angular de uma é igual ao simétrico do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja,

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$$

4 – O coeficiente angular de uma reta é uma constante. O número $y_2 - y_1$ é a variação na coordenada y e $x_2 - x_1$ é a variação na coordenada x. Dessa forma, o coeficiente angular de uma reta fornece a razão entre a variação de y e a variação de x, ou ainda, a **taxa de variação** de y em relação à x.

1.3 – Função

Intuitivamente, a palavra **função** está associada à ideia de **dependência**. Quando dizemos que o preço cobrado para enviar um pacote pelo correio é função do peso do pacote, que a área de um quadrado é função de seu lado, ou que a amplitude de impulsos elétricos gerados no músculo cardíaco (cuja representação gráfica é o eletrocardiograma) é função do tempo, o que pretendemos dizer é, que o preço cobrado para enviar um pacote pelo correio depende do peso do pacote, que a área de um quadrado depende de seu lado e amplitude de impulsos elétricos gerados no músculo cardíaco depende do tempo.

Em termos gerais, uma **função** consiste em dois conjuntos e uma "regra" que associa a cada elemento de um dos conjuntos um único elemento do outro. Para estabelecer, por exemplo, o efeito do peso para enviar um pacote pelo correio é preciso conhecer o conjunto de pesos possíveis, o conjunto de preços admissíveis, e uma regra para associar cada peso a um determinado preço. A definição que vamos adotar é a seguinte:

Definição: Uma **função** de um conjunto A em um conjunto B é uma relação que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B.

Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e seja a relação de A em B que a cada elemento x de A associa $y = 2x$ em B. Assim,

$x = 1$ está associado a $y = 2$
$x = 2$ está associado a $y = 4$
$x = 3$ está associado a $y = 6$

Esta relação é uma função de A em B, pois cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

As letras f, g e h serão usadas para representar funções, embora seja comum, em situações práticas, usar letras que lembrem as grandezas envolvidas.

O conjunto A é chamado de **domínio** da função e o conjunto B de **contradomínio**. Quando o domínio e o contradomínio de uma função f são subconjuntos de números reais dizemos que f é uma **função real de uma variável real**. Com exceção do capítulo 4, as funções estudadas neste texto serão sempre reais de uma variável real.

A letra x que representa um número arbitrário do domínio de uma função f é chamada de **variável independente**; a letra y cujo valor depende do valor atribuído a x é chamada de **variável dependente**.

O valor y que uma função f associa a um número x pertencente ao domínio é chamado de **imagem** de x por f e denotado por f(x). Assim, por exemplo, quando escrevemos que f(2) = 4 estamos indicando que 4 é o número que a função f associa ao número 2 ou que 4 é a imagem de 2 por f. O **conjunto imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de f(x) obtidos quando x varia por todo o domínio.

Funções também podem ser representadas por tabelas e descrições por palavras. Outras se representam naturalmente com gráficos, como o eletrocardiograma (EKG). Embora seja possível construir uma fórmula para representar aproximadamente uma função EKG, isto raramente é feito. O que o médico precisa é o esquema de repetições, e é muito mais fácil vê-lo num gráfico do que em uma fórmula.

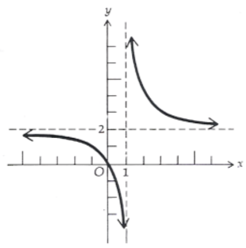
Para representar geometricamente uma função real em um gráfico, costumamos usar um sistema de coordenadas no qual as unidades da variável independente x são marcadas no eixo horizontal e as unidades da variável dependente y são marcadas no eixo vertical. O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que x pertence ao domínio de f e y = f(x).

Embora uma função real f possa ser descrita de várias formas, é comum que seja definida enunciando apenas a "regra" para achar f(x). Nesse caso, fica subentendido que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais que tornam possíveis as operações indicadas na regra.

Exemplos: 1) Seja $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Determine o domínio e calcule f(– 1), f(4) e f(0).

Solução: O domínio de f é lR – {1}

$f(-1) = \dfrac{-2}{-1-1} = \dfrac{-2}{-2} = 1$; $f(4) = \dfrac{8}{4-1} = \dfrac{8}{3}$ e $f(0) = \dfrac{0}{-1} = 0$



O gráfico de f está esboçado ao lado.

2) Thomas Young sugeriu a seguinte regra para calcular a dosagem de medicamento para crianças com idades de 1 a 12 anos: se *a* denota a dose adulta (em miligramas) e t é a idade da criança (em anos) então a dosagem para a criança é dada por

$$D(t) = \frac{at}{t+12}$$

Se a dose para adultos de uma substância é de 500mg, qual deve ser a dose para uma criança de 4 anos?

Solução: Devemos substituir na função dada *a* por 500 e t por 4.

Assim D(4) = $\frac{500.4}{4+12}=\frac{2000}{16}=125$

Portanto, a dose para uma criança de 4 anos é 125mg

Observações: 1) f é uma **função polinomia**l **de grau n**, se:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0 são números reais com $a_n \neq 0$ e n é um número inteiro não negativo.

Exemplos:

a) f(x) = 7 é uma função polinomial de grau 0.

b) $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$ é uma função polinomial de grau 2.

d) $f(x) = x^5 - 5x^2 - 6x + 2$ é uma função polinomial de grau 5.

2) Uma **função racional** é um quociente entre duas funções polinomiais.

3) **Função algébrica** é aquela que pode ser expressa como soma, diferença, produto, quociente ou potência racional de polinômios. As funções que não são algébricas são chamadas de **transcendentes**. As funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são exemplos de funções transcendentes.

Nos exemplos a seguir, determine os domínios e calcule os valores indicados das funções dadas.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 + 4$

a) f(–1) b) f(0) c) $f(\sqrt{2})$ d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Exemplo 2: $f(x) = \frac{1}{x}$

a) f(7) b) f(–1) c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ e) $f(\sqrt{2})$

Exemplo 3: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

a) f(0) b) f(–2) c) f(2) d) f(5)

Exemplo 4: $f(x) = \sqrt{x-2}$

a) f(2) b) f(3) c) f(4) d) f(6)

Exemplo 5: f(x) = $\sqrt[3]{x-2}$

a) f(1) b) f(2) c) f(0) d) f(10)

As funções nos exemplos 6 e 7 a seguir são definidas por regras distintas em diferentes partes de seus domínios. Tais funções são "definidas por mais de uma sentença" ou "definidas por partes". Determine o domínio e os valores especificados de cada uma delas:

Exemplo 6: f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se} \quad x<1 \\ 4x^2+1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) f(0) b) f(1) c) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ d) f(4)

Exemplo 7: f(x) = $\begin{cases} -1 & \text{se} \quad x<0 \\ 5 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x>2 \end{cases}$

a) f(–5) b) f(0) c) f(2) d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e) $f\left(\dfrac{11}{3}\right)$

Respostas:

1) Dom(f) = IR a) 5 b) 4 c) 6 d) $\dfrac{17}{4}$

2) Dom(f) = IR^* a) $\dfrac{1}{7}$ b) – 1 c) 2 d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3) Dom(f) = IR – { –1, 1} a) 0 b) $\dfrac{-2}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{5}{24}$

4) Dom(f) = [2, ∞) a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) 2

5) Dom(f) = IR a) – 1 b) 0 c) $\sqrt[3]{-2}$ d) 2

6) Dom (f) = IR a) – 1 b) 5 c)10 d) 65

7) Dom (f) = IR a) – 1 b) 5 c) 5 d) 5 e) 1

1.4 – Função Exponencial e Função Logarítmica

Definição: Seja b $\in IR_+^* - \{1\}$. A função de IR em IR_+^* tal que f(x) = b^x é chamada de **função exponencial** de base b.

Exemplos:

1) Seja $f(x) = 2^x$.

Temos que $f(3) = 2^3 = 8$; $f(0) = 2^0 = 1$; $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

2) Seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Temos que $f(4) = \frac{1}{16}$; $f(-3) = 8$; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

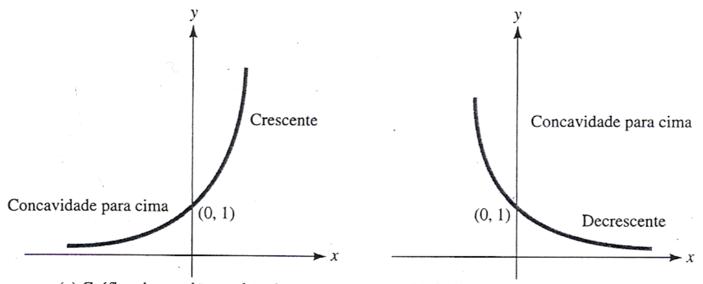
Observação: Na definição anterior, $b \in IR_+^* - \{1\}$ pois:

a) Seja $f(x) = (-2)^x$. Então, por exemplo, $f(1/2) = (-2)^{½} = \sqrt{-2} \notin IR$

b) Seja $f(x) = 0^x$. Então, por exemplo, $f(-2) = 0^{-2} = \frac{1}{0} \notin IR$

c) Seja $f(x) = 1^x$. Então $f(x) = 1$ para todo número real, isto é, $f(x)$ é uma função constante.

De modo geral, o gráfico de $y = b^x$ é representado por uma curva que está toda acima do eixo x, corta o eixo y no ponto (0,1) e tem concavidade voltada para cima em IR. Além disso, $y = b^x$ é crescente em IR para $b > 1$ e é decrescente em IR para $0 < b < 1$.



(a) Gráfico de $y = b^x$ para $b > 1$ (b) Gráfico de $y = b^x$ para $0 < b < 1$

As funções exponenciais obedecem às seguintes propriedades:

Sejam $a, b \in IR_+^* - \{1\}$ e x e y números reais.

a) $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$

b) $b^x . b^y = b^{x+y}$

c) $(b^x)^y = b^{xy}$

d) $(a.b)^x = a^x . b^x$

e) $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Definição: Sejam $a, b \in IR_+^*$ com $b \neq 1$. Chamamos de **logaritmo** do número a na base b ao expoente que devemos colocar na base b para obter o número a e indicamos por $\log_b a$. Assim,

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Exemplos:

1) $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

2) $\log_3 81 = 4$ pois $3^4 = 81$

3) $\log_5 \dfrac{1}{125} = -3$ porque $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

As bases mais usadas na prática são a base 10 e a base e (onde e representa o número irracional cujo valor é aproximadamente 2,718).

Os logaritmos de base 10 são chamados de **logaritmos decimais** e denotados sem indicar o valor da base, isto é, $\log a = \log_{10} a$.

Os logaritmos de base e são chamados de **logaritmos neperianos** (ou naturais) e denotados por ln isto é, $\ln a = \log_e a$.

Propriedades dos logaritmos:

Sejam $b \in IR_+^* - \{1\}$ e sejam $a, c \in IR_+^*$

1) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

2) $\log_b b = 1$

3) $\log_b 1 = 0$

4) $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$

5) $\log_b a^c = c.\log_b a$

6) $\log_b \left(\dfrac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

Definição: Seja $b \in IR_+^* - \{1\}$. A função de IR_+^* em IR tal que $f(x) = \log_b x$ é chamada de **função logarítmica** de base b.

A figura a seguir mostra os gráficos de duas funções logarítmicas:

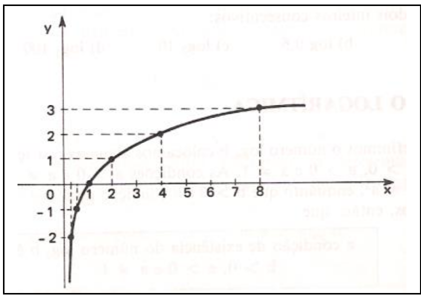


Gráfico de $y = \log_2 x$

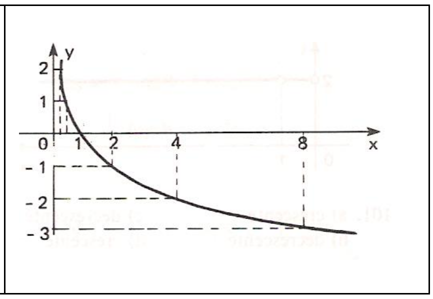


Gráfico de $y = \log_{1/2} x$

Propriedades que relacionam as funções exponencial e logarítmica como funções inversas:

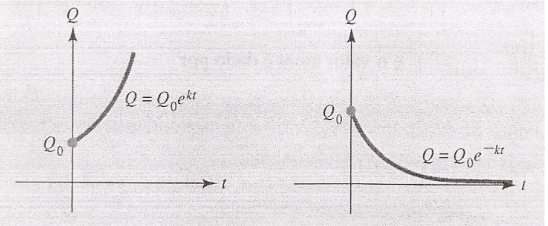
1) $b^{\log_b x} = x$

2) $\log_b b^x = x$

As variações de muitas grandezas importantes podem ser descritas por um crescimento ou decaimento exponencial. Por exemplo, na ausência de limitações ambientais, as populações tendem a crescer exponencialmente; as substâncias radioativas e a concentração dos medicamentos no sangue decaem exponencialmente.

Dizemos que Q(t) **decresce** (ou decai) **exponencialmente** se $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ onde k é uma constante positiva e Q_0 é o valor inicial Q(0); dizemos que Q(t) **cresce exponencialmente** se $Q(t) = Q_0e^{kt}$ onde k é uma constante positiva e Q_0 é o valor inicial Q(0).

A figura a seguir mostra as curvas típicas de crescimento e decaimento exponencial.



(a) Crescimento exponencial (b) Decaimento exponencial

Exemplo: Os seguintes dados foram registrados por um pesquisador durante os primeiros 10 minutos de um experimento projetado para estudar o crescimento de bactérias.

Número de minutos	0	10
Número de bactérias	5.000	8.000

Supondo que o número de bactérias cresça exponencialmente, quantas bactérias haverá após 30 minutos?

Solução: Como o crescimento é exponencial, seja $Q(t) = Q_0e^{kt}$ o número de bactérias após t horas. Temos $Q_0 = 5.000$ e $Q(10) = 8.000$.

Então $Q(10) = 5.000e^{10k} = 8.000$. Daí $e^{10k} = \frac{8}{5}$

Portanto, $Q(30) = 5.000e^{30k} = 5.000(e^{10k})^3 = 5.000\left(\frac{8}{5}\right)^3 = \frac{5.000 \text{ x } 512}{125} = 20.480$

Após 30 minutos haverá 20.480 bactérias.

Foi observado experimentalmente que a maioria das substâncias radioativas decai exponencialmente de modo que se uma amostra tem uma massa inicial Q_0, a massa que resta após t anos é dada por uma função da forma $Q(t) = Q_0e^{-kt}$.

Exemplo: Uma substância radioativa decai exponencialmente. Se 500 gramas da substância estavam presentes inicialmente e 400 gramas estão presentes 50 anos depois, quantos gramas estarão presentes após 200 anos?

Solução: Temos que $Q(50) = 500e^{-50k} = 400$

Daí $e^{-50k} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$

Então $Q(200) = 500e^{-200k} = 500(e^{-50k})^4 = 500\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{500 \text{ x } 256}{625} = 204{,}8$

Após 200 anos estarão presentes 204,8 gramas da substância.

No exemplo anterior, a constante positiva k é uma medida da taxa de decaimento, mas essa taxa em geral é especificada em termos do tempo t necessário para que metade da amostra decaia. Esse tempo é chamado de **meia vida** da substância radioativa. O próximo exemplo mostra qual é a relação entre k e a meia vida.

Exemplo: Mostre que a meia vida de uma substância radioativa que decai exponencialmente é dada por $t_1 = \frac{\ln 2}{k}$.

Solução: Queremos encontrar um valor t_1 tal que $Q(t_1) = \frac{Q_0}{2}$.

Daí $Q_0 e^{-kt_1} = \frac{1}{2} Q_0$

Dividindo por Q_0 e tomando o logaritmo de ambos os membros temos: $\ln e^{-kt_1} = \ln \frac{1}{2}$

Aplicando propriedades de logaritmos vem:

$-kt_1 = \ln 1 - \ln 2 \quad \therefore \quad -kt_1 = -\ln 2 \quad \therefore \quad kt_1 = \ln 2 \quad \therefore \quad t_1 = \frac{\ln 2}{k}$

Exemplo: O elemento rádio decai exponencialmente com uma meia vida de 1.690 anos. Quanto tempo uma amostra de 50g de rádio leva para ser reduzida a 5 g?

Solução: A meia vida do rádio é $t_1 = 1.690$. Então, pelo exemplo anterior, $k = \frac{\ln 2}{t_1} = \frac{\ln 2}{1.690}$

Como $Q_0 = 50$ e $Q(t) = 5$ temos $50\, e^{-\frac{\ln 2}{1.690}t} = 5$

Daí $e^{-\frac{\ln 2}{1.690}t} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \quad \therefore \quad \ln e^{-\frac{\ln 2}{1.690}t} = \ln 1 - \ln 10 \quad \therefore \quad -\frac{\ln 2}{1.690}t = -\ln 10 \quad \therefore \quad \frac{\ln 2}{1.690}t = \ln 10$

Logo $t = \frac{1.690 \ln 10}{\ln 2} = 5.614$

Uma amostra de 50g de rádio leva 5.614 anos para ser reduzida a 5 g.

Exercícios

Nas questões 1 a 10, calcule os produtos notáveis:

1) $(x + 5)^2$

2) $(3x + 4y)^2$

3) $(x^2 + y^3)^2$

4) $(7 – x)^2$

5) $(6x – 3)^2$

6) $(9x + 5x^4)(9x – 5x^4)$

7) $(x +3)(x – 3)$

8) $(x^2 + 4y)(x^2 – 4y)$

9) $(2x + 5)^3$

10) $(x – 3)^3$

Nas questões 11 a 14 use a fórmula de Báskara para resolver a equação dada:

11) $x^2 + 10x + 25 = 0$

12) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

13) $x^2 – 2x + 3 = 0$

14) $1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$

Nas questões 15 a 32, fatore a expressão dada:

15) $x^2 + x – 2$

16) $x^2 – 7x + 12$

17) $6x^2 – 5x + 1$

18) $5x^2 + 13x – 6$

19) $x^2 – 2x + 1$

20) $x^2 + 14x + 49$

21) $16x^2 – 81$

22) $9x^2 – 25y^2$

23) $x^3 – 1$

24) $x^3 – 27$

25) $x^7 – x^5$

26) $x^3 + 2x^2 + x$

27) $2x^3 – 8x^2 – 10x$

28) $x^4 + 5x^3 – 14 x^2$

29) $x^2 + 4x + xy + 4y$

30) $x^3 + 2x^2 – x – 2$

31) $4(x – 3)^2(x + 1) + 10(x – 3)^3$

32) $4(x + 3)^4(x – 2)^2 – 6(x + 3)^3(x – 2)^3$

Nas questões 33 a 36 simplifique o quociente dado o máximo possível:

33) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x - 14}$

34) $\frac{(x+5)^3(x+2) - (x+5)^2(x+2)^2}{x^2 + 7x + 10}$

35) $\frac{2x(x+1)^3 - x^2(x+1)^2}{x^2 + 3x + 2}$

36) $\frac{2(1-x)^3(x+3)^3 + 4(1-x)^2(x+3)^4}{(1-x)^3}$

37) Encontre o coeficiente angular da reta que contém os pares de pontos dados:

a) (– 2, 3) e (0, 4) b) (2, 0) e (0, 2) c) $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{5}\right)$ e $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{8}\right)$

38) Ache, se possível, a inclinação da reta dada pela equação:

a) 4x – 6y = 5 b) x + 3y = 7 c) 3x – 5 = 0

39) Estabeleça a equação da reta L indicada.

a) L passa por (2, – 3) e (5, 3).

b) L passa por (– 1, – 4) e tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$

c) L é vertical e passa pelo ponto (7, 3).

d) L é horizontal e passa pelo ponto (3, – 5)

e) L tem coeficiente angular 6 e coeficiente linear 7.

f) L passa por (1, 5) e é paralela à reta de equação 2x + y = 10.

g) L passa por (– 2,4) e é perpendicular à reta de equação x + 2y = 17.

40) Um medicamento é ministrado por via intravenosa para aliviar a dor. A função

$$f(t) = 90 - 52\ln(1 + t) \text{ com } 0 \le t \le 4$$

dá o número de unidades do medicamento remanescentes no corpo depois de t horas.

a) Qual foi a quantidade inicial ministrada em termos de unidades do medicamento?

b) Quantas unidades estarão presentes depois de 2 horas? (dado: ln3 ≅ 0,477)

41) A meia vida de uma certa substância radioativa é 12 horas. Inicialmente, há 8 gramas de substância radioativa.

a) Expresse a quantidade remanescente da substância em função do tempo t.

b) Em quanto tempo restará apenas um grama de substância radioativa?

42) O número de bactérias numa cultura em placa de Petri após t horas é $B = 100\,e^{0,693t}$

a) Qual o número inicial de bactérias presentes?

b) Quantas bactérias estarão presentes em 6 horas? (dado e ≅ 2,7)

c) Quando o número de bactérias será 200? (dado ln2 ≅ 0,304)

Respostas:

1) $x^2 + 10x + 25$

2) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

3) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$

4) $49 - 14x + x^2$

5) $36x^2 - 36x + 9$

6) $81x^2 - 25x^8$

7) $x^2 - 9$

8) $x^4 - 16y^2$

9) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

10) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

11) $x = -5$

12) $x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$

13) Não existem soluções

14) $x = 1$; $x = -5$

15) $(x + 2)(x - 1)$

16) $(x - 3)(x - 4)$

17) $6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

18) $5(x + 3)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

19) $(x - 1)^2$

20) $(x + 7)^2$

21) $(4x + 9)(4x - 9)$

22) $(3x + 5y)(3x - 5y)$

23) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

24) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

25) $x^5(x + 1)(x - 1)$

26) $x(x + 1)^2$

27) $2x(x - 5)(x + 1)$

28) $x^2(x + 7)(x - 2)$

29) $(x + y)(x + 4)$

30) $(x + 2)(x + 1)(x - 1)$

31) $2(x - 3)^2(7x - 13)$

32) $2(x + 3)^3(x - 2)^2(12 - x)$

33) $\frac{x+3}{x-7}$

34) $3(x + 5)$

35) $x(x + 1)$

36) $\frac{2(x+3)^3(x+7)}{1-x}$

37) a) $\frac{1}{2}$ b) -1 c) $-\frac{13}{20}$

38) a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) Não existe, pois a reta é vertical

39) a) $y = 2x - 7$ b) $\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ c) $x = 7$ d) $y = 5$

e) $y = 6x + 7$ f) $y = -2x + 7$ g) $y = 2x + 8$

40) a) 90 b) $90 - 52\ln 3 \cong 65{,}2$

41) a) $Q(t) = 8\ e^{-\frac{\ln 2}{12}t}$ b) 36 horas

42) a) 100 bactérias b) Aproximadamente 5314 bactérias

c) 0,44 horas = 26,4 minutos (aproximadamente)

Capítulo 2: Limite de uma função real

O Cálculo Diferencial e Integral é um importante ramo da Matemática com um grande número de aplicações: plotagem de curvas, otimização de funções, análise de taxas de variação e determinação de áreas, entre outras.

O que distingue o Cálculo da Álgebra é o conceito de **limite** que é o ponto de partida para definir todos os outros conceitos do Cálculo, como os de “derivada” e “integral”.

Na linguagem comum, as pessoas se referem ao limite de velocidade, ao limite de peso de um lutador, ao limite de resistência de um maratonista, ou ao fato de esticar uma mola até o limite. Todas essas frases sugerem que o limite é uma fronteira que em certas circunstâncias não pode ser atingida, mas em outras pode ser atingida ou mesmo ultrapassada. Um limite matemático se parece com esses limites. Nesse capítulo vamos apresentar uma ideia intuitiva do conceito matemático de limite e mostrar como pode ser calculado.

2.1 – Noção intuitiva do conceito de limite

Falando de maneira geral, o processo de determinar o limite de uma função real f consiste em investigar o comportamento do valor de f(x) à medida que a variável independente x se aproxima de um número c, que pode ou não pertencer ao domínio de f.

Vamos supor que queremos saber o que acontece com $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ à medida que x se aproxima de 1.

Embora f não seja definida em x = 1, podemos avaliar f(x) para valores de x próximos de 1. Para fazer isto, preparamos uma tabela como a que aparece a seguir:

x	0,9	0,95	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,05	1,1
f(x)	2,9	2,95	2,99	2,999	–	3,001	3,01	3,05	3,1

Os valores da função nesta tabela sugerem que:

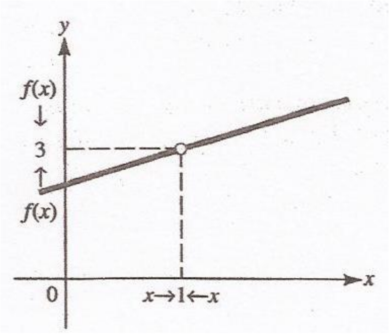
- f(x) se aproxima do número 3 à medida que x se aproxima de 1 de ambos os lados.

- Podemos obter valores para f(x) tão próximos de 3 quanto quisermos, bastando para isso tomar valores de x suficientemente próximos de 1.

Esse comportamento pode ser descrito, intuitivamente, dizendo que “o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 3” e abreviado por

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Geometricamente, a expressão “o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 3” significa que a altura do gráfico de y = f(x) se aproxima de 3 à medida que x se aproxima de 1.



O gráfico de f(x) = $\frac{x^2+x-2}{x-1}$ é uma reta com um "buraco" em (1,3), e os pontos (x, y) no gráfico se aproximam desse buraco à medida que x se aproxima de 1 de ambos os lados.

Temos a seguinte definição (informal) de limite:

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo c, exceto talvez em c. Se o valor de f(x) fica arbitrariamente próximo de L para todos os valores x suficientemente próximos de c, dizemos que f tem limite L e escrevemos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Ao definirmos limite, admitimos que f é definida para todos os valores de x nas proximidades de c, mas não necessariamente em x = c. A função não precisa existir em x = c, e mesmo que exista, seu valor f(c) neste ponto pode ser diferente do limite quando x tende a c.

Isso está ilustrado na figura 1 abaixo. Para as três funções representadas, o limite de f(x) quando x tende a c, é igual a L, embora as funções se comportem de forma bastante diferente em x = c. Em (a), f(c) é igual ao limite L; em (b), f(c) é diferente de L, e em (c), f(c) não está definido.

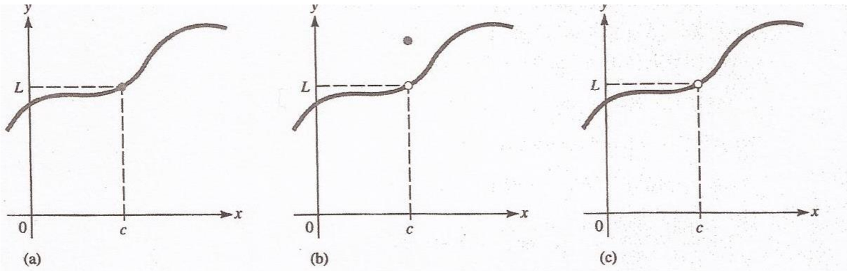


figura 1

A figura 2 abaixo mostra os gráficos de duas funções que não têm limite quando x tende a c. Na figura 2(a), o limite não existe porque os "limites laterais" são diferentes, isto é, f(x) se aproxima de 5 quando x tende a c pela direita e se aproxima de 3 (um valor diferente) quando x tende a c pela esquerda. A função da figura 2(b) não tem limite (finito) quando x tende a c porque os valores de f(x) aumentam indefinidamente à medida que x se aproxima de c. Dizemos que funções como a da figura 2(b) têm um "limite infinito" quando x tende a c.

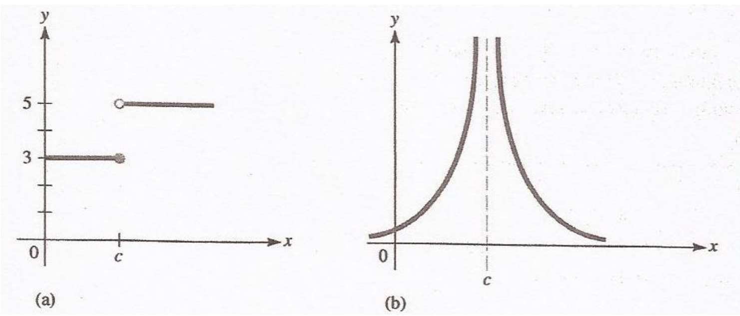


figura 2

2.2 – Propriedades dos limites

Utilizamos uma tabela na seção anterior para nos ajudar a determinar o valor do limite da função dada. O nosso objetivo agora é introduzir propriedades (teoremas) que permitam simplificar o cálculo dos limites de funções algébricas.

O teorema 1 se refere aos limites de duas funções lineares elementares.

Teorema 1: Sejam c e k números reais.

a) $\lim\limits_{x \to c} k = k$ b) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

Exemplos: $\lim\limits_{x \to 5} 7 = 7$ e $\lim\limits_{x \to 4} x = 4$

O teorema 2 mostra como calcular limites de funções que são combinações aritméticas de funções cujos limites já conhecemos.

Teorema 2: Se L, M, c e k são números reais e $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$ então:

a) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

b) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

c) $\lim\limits_{x \to c} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) . \lim\limits_{x \to c} g(x) = L.M$

d) $\lim\limits_{x \to c} (k.f(x)) = k \lim\limits_{x \to c} f(x) = k.L$

e) $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x) \right)^n = L^n$ onde $n \in Z_+^*$

f) Se $M \neq 0$ então $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

g) Se n é um número natural ímpar, ou se n é um número natural par e L > 0 então

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2x + 5) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 + \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 5 = \left(\lim\limits_{x \to 2} x \right)^3 + 2 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 5 = 2^3 + 2.2 + 5 = 17$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-2}{x+8} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} (x-2)}{\lim\limits_{x \to 0} (x+8)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} x - \lim\limits_{x \to 0} 2}{\lim\limits_{x \to 0} x + \lim\limits_{x \to 0} 8} = \dfrac{0-2}{0+8} = -\dfrac{2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

Podemos determinar mais facilmente o limite de funções polinomiais e de algumas funções racionais através do seguinte resultado:

Teorema 3: a) Seja p uma função polinomial. Então $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$

b) Seja r(x) = $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional. Se q(c) ≠ 0 então $\lim\limits_{x \to c} r(x) = r(c)$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 3x^2 + 5x + 7) = 32 - 12 + 10 + 7 = 37$

2) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x}{x+4} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$

Teorema 4: Se $\lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ e f é uma função tal que f(x) = h(x) para todos os valores de x pertencentes a algum intervalo aberto contendo c, excluindo o valor x = c, então $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Solução: f(x) = $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ não está definida para x = 2, mas para todos os valores de x tais que x ≠ 2 temos:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

Então, pelo teorema 4, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2)$

Além disso, pelo teorema 3 $\lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Portanto $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

Solução: f(x) = $\dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$ não está definida em x = 1, mas para todos os valores de x tais que x ≠ 1 temos:

$$\frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x} = 1 + \sqrt{x}$$

Logo, pelo teorema 4, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 1} (1 + \sqrt{x})$

Mas sabemos, pelos teoremas anteriores, que $\lim\limits_{x \to 1} (1 + \sqrt{x}) = 2$

Então $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 2$

Outros exemplos:

Calcule os seguintes limites:

1) $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x - 10)$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x^2+3x}$

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{5x-6}$

5) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{\dfrac{3x}{x+4}}$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4-x^2}{2x+4}$

9) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+2x^2}{3x+6}$

10) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2+3x-2}$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x}$

12) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

13) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4-x}}{x-1}$

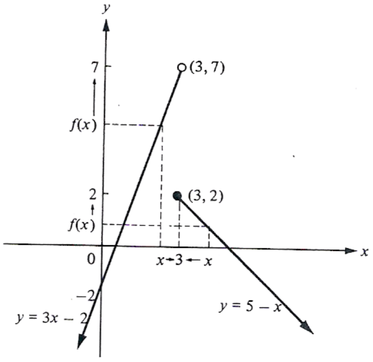
Respostas:

1) 30 2) $\dfrac{1}{2}$ 3) 0 4) – 1 5) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 6) 3 7) $\dfrac{5}{2}$

8) 2 9) $\dfrac{4}{3}$ 10) 0 11) 2 12) $\dfrac{1}{4}$ 13) $\dfrac{1}{6}$ 14) – 2

2.3 – Limites laterais

Algumas vezes uma função f se comporta de forma diferente de cada lado de um número c, isto é, tende para valores diferentes quando x tende para c “pela esquerda” e “pela direita”. Essa situação é ilustrada no seguinte exemplo:



Seja $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se} \quad x < 3 \\ 5 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

A figura mostra que o valor de f(x) tende a 7 quando x tende a 3 para valores **menores** que 3, isto é, f(x) tende a 7 quando x tende a 3 **pela esquerda**. Denotamos esse fato simbolicamente como

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$$

A figura mostra, também, que o valor de f(x) tende a 2 quando x tende a 3 para valores **maiores** que 3, isto é, f(x) tende a 2 quando x tende a 3 **pela direita**. Simbolicamente temos

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$$

Os limites quando x tende para c pela direita e quando x tende para c pela esquerda são chamados de **limites laterais**.

Observação: Os teoremas da seção anterior também são válidos para limites laterais.

O teorema a seguir relaciona limites laterais e limites.

Teorema: O $\lim_{x \to c} f(x)$ existe e é igual a um número real L se e somente se $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$

No exemplo anterior, como $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ concluímos que $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe.

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{se} \quad x < 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \\ x + 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

Determine, se existirem: a**)** $\lim_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim_{x \to 4} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

Solução: a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x^2 - 5) = -5$

b) $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x + 5) = 9$

c) Nesse caso precisamos calcular os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x + 5) = 7$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x^2 - 5) = 7$

Então $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 7$

Logo $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$

Outros exemplos:

1 – Seja $f(x) = \begin{cases} 4x + 7 & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$ Determine, se existir, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

2 – Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \\ 9 - x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$ Determine, se existir, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3 – Seja $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ 3x - 7 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$ Determine, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

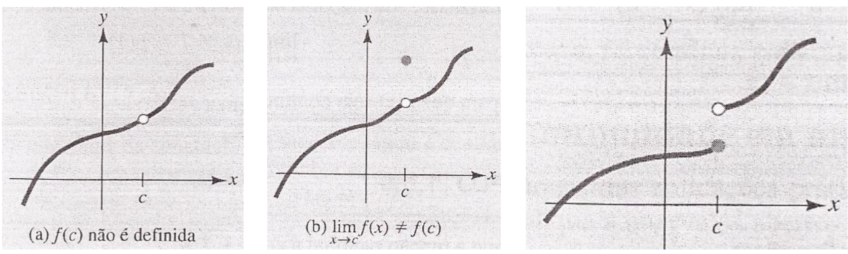
Respostas:

1) 3 2) 5 3) a) 1 b) não existe c) 8

Observação: Na linguagem comum, um processo "contínuo" é aquele que ocorre sem interrupções ou mudanças repentinas. No caso de uma função f, o que caracteriza a ausência de interrupção em um ponto (c, f(c)) de seu gráfico é o fato do $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existir e desse limite ser igual a f(c). Assim, dizemos que uma função f é contínua em um número c se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Considerando os resultados da seção 2.2, podemos afirmar que funções polinomiais são contínuas em todos os números reais e que funções racionais são contínuas em todos os números onde são definidas.

Se a função f não é contínua em um número c, dizemos também que f é **descontínua** em c.

Apresentamos abaixo os gráficos de três funções descontínuas em c.



(a) $f(c)$ não é definida

(b) $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

(c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ não existe

Exercícios – lista 1

Determine os limites:

1) $\lim_{x \to -1} (5 - 3x - x^2)$

2) $\lim_{x \to 3} (5x^2 - 7x - 3)$

3) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$

4) $\lim_{x \to 5/2} \frac{4x^2 - 25}{2x - 3}$

5) $\lim_{x \to 2} \frac{2 - x^2}{4x}$

6) $\lim_{x \to 1/2} \frac{x^2 + 1}{1 + \sqrt{2x + 8}}$

7) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 5x}{x + 3}$

8) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{27x^3 + 4x - 4}{x^{10} + 4x^2 + 3x}}$

9) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2 + x}$

10) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$

11) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x + 1}{x + 3}}$

12) $\lim_{x \to 8/3} \frac{9x^2 - 64}{3x - 8}$

13) $\lim_{x \to -7} \frac{x^2 - 49}{x + 7}$

14) $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\frac{x - 4}{6x^2 + 2}}$

15) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

16) $\lim_{x \to 0} \frac{(3 + x)^2 - 9}{x}$

17) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

18) $\lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{3 - \sqrt{3x}}$

19) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$

20) $\lim_{x \to -1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

21) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 5}$

22) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{x}$

23) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{3x^2 - x^3}$

24) $\lim_{x \to -3} \frac{9 - x^2}{x + 3}$

25) $\lim_{x \to 2^+} (x^3 - 2x + 5)$

26) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$

27) $\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 - 9}{3 - x}$

28) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Nas questões de 29 a 33, calcule, se existirem, os limites das funções dadas nos números indicados:

29) $f(x) = \begin{cases} 5+x & \text{se} \quad x \le 3 \\ 9-x & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$ em x = 3

30) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{se} \quad x \ne -1 \\ 5 & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$ em x = – 1

31) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{se} \quad x \ge 1 \end{cases}$ em x = 1

32) $f(x) = \begin{cases} 3+x^2 & \text{se} \quad x < -2 \\ 0 & \text{se} \quad x = -2 \\ 11-x^2 & \text{se} \quad x > -2 \end{cases}$ em x = – 2

33) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{se} \quad x < 3 \\ 3x-2 & \text{se} \quad x \ge 3 \end{cases}$ em x = 3

Nas questões de 34 e 35, determine o valor de a para que f(x) seja contínua no valor indicado.

34) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-x^2}{3x+9} & \text{se} \quad x \ne -3 \\ a & \text{se} \quad x = -3 \end{cases}$ em x = – 3

35) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{5x-15} & \text{se} \quad x \ne 3 \\ a & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ em x = 3

Respostas:

1) 7	8) 3 / 2	15) – 2	22) – 1	29) Não existe
2) 21	9) $\sqrt{3}$ / 3	16) 6	23) 0	30) – 2
3) 7 / 8	10) – 1	17) 1 / 2 $\sqrt{2}$	24) 6	31) 1
4) 0	11) 3 /2	18) 2	25) 9	32) 7
5) – 1 / 4	12) 16	19) 4	26) 0	33) Não existe
6) 5 / 16	13) – 14	20) 0	27) 0	34) 2
7) 2	14) – 1 /2	21) 1 / 5	28) 4	35) 6 / 5

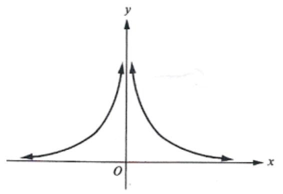
2.4 – Limites que envolvem infinito

Vimos na seção anterior que se c é um número real e $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ então $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ não existe, mas algumas vezes o $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ não existe porque os valores da função crescem ou decrescem ilimitadamente quando se aproximam de c.

Vamos analisar, por exemplo, o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ quando x se aproxima de zero. Quando x se aproxima de zero, x^2 também se aproxima de zero, e o valor de f(x) fica muito grande.

É evidente, a partir da tabela e do gráfico de f abaixo, que à medida que x fica mais próximo de zero, os valores de $\dfrac{1}{x^2}$ (de ambos os lados) crescem ilimitadamente.

x	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)	100	10.000	1.000.000	–	1.000.000	10.000	100



Observamos que quando x se aproxima de zero pela esquerda ou pela direita, os valores de f(x) aumentam. Se admitirmos que esses valores possam aumentar ilimitadamente, escrevemos:

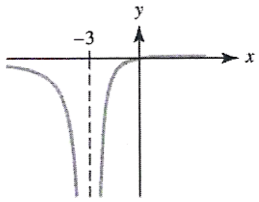
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

Como a função tem o mesmo comportamento à direita e à esquerda de zero podemos escrever que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

Podemos indicar de forma análoga, o comportamento de uma função cujos valores diminuem ilimitadamente.

Vamos analisar a função $g(x) = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ para valores de x próximos de – 3

x	– 3,1	– 3,01	– 3,001	– 3	– 2,999	– 2,99	– 2,9
g(x)	– 310	– 30.100	– 3.001.000	–	– 2.999.000	– 29.900	– 290



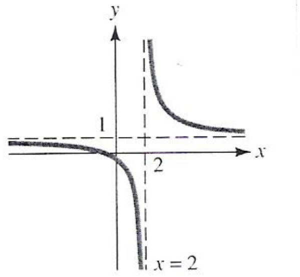
Vemos pela tabela e pelo gráfico, que os valores de g(x) diminuem ilimitadamente à medida que x se aproxima de – 3 pela esquerda ou pela direita.

Escrevemos, nesse caso, que $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = -\infty$

Consequentemente, podemos dizer que $\lim\limits_{x\to -3} g(x) = -\infty$

Vamos analisar agora, o comportamento de $h(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ para valores de x próximos de 2.

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
h(x)	– 29	– 299	– 2.999	– 29.999	–	30.001	3.001	301	31



Vemos que à medida que x se aproxima de 2 pela esquerda, os valores de h(x) diminuem ilimitadamente e, que quando x se aproxima de 2 pela direita, os valores de h(x) aumentam ilimitadamente. Então

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$$

Observação: Os símbolos ∞ e $-\infty$ não representam um número real. São apenas notações para indicar que f(x) aumenta ou diminui ilimitadamente quando x se aproxima de um número real. Assim, quando escrevemos, por exemplo, que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, não estamos dizendo que f(x) está cada vez mais próximo de um número real, ou que o limite existe.

De modo geral temos:

Teorema: Se $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$, onde L é um número real diferente de zero, e $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, com o sinal dependendo dos sinais de L e de g(x) à direita de c.

Observação: O teorema anterior pode ser enunciado para o limite à esquerda de c com as mesmas conclusões.

É possível estudar muitos desses limites raciocinando intuitivamente, como nos exemplos a seguir.

Exemplos: 1) Determine $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to 3^-} 2x = 6$ e que $\lim\limits_{x\to 3^-} (x-3) = 0$. Além disso, para x próximo e menor do que 3, o numerador é positivo e o denominador é negativo e próximo de zero. Então o valor de $\dfrac{2x}{x-3}$ é muito grande e negativo.

Logo $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3} = -\infty$

2) Calcule $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{7-x}{(x-5)^2}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to 5^-}$ (7 – x) = 2 e $\lim\limits_{x\to 5^-}$ $(x – 5)^2$ = 0. Quando x está próximo e é menor do que 5, o numerador é positivo e o denominador é positivo e próximo de zero. Então o valor de $\dfrac{7-x}{(x-5)^2}$ é muito grande e positivo.

Então $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{7-x}{(x-5)^2} = \infty$

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-5}{1-x}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to 1^+}$ $(x^2 – 5)$ = – 4 e $\lim\limits_{x\to 1^+}$ (1 – x) = 0. Quando x está próximo e é maior do que 1, o numerador é negativo e o denominador é negativo e próximo de zero. Então o valor de $\dfrac{x^2-5}{1-x}$ é muito grande e positivo.

Logo $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-5}{1-x} = \infty$

4) Determine $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1}$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1}$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to 1}$ x = 1 e $\lim\limits_{x\to 1}$ (x – 1) = 0

Quando x se aproxima de 1 pela direita (x > 1), o numerador é positivo e o denominador é positivo; quando x se aproxima de 1 pela esquerda (x < 1), o numerador é positivo e o denominador é negativo.

Então $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$

Outros exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{9-x}{x-5}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-3x}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

4) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1-x}{x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x^3-x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-2}{x+1}$

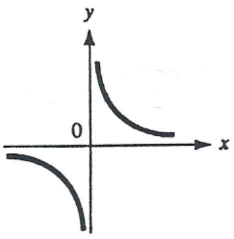
Respostas:

1) ∞ 2) ∞ 3) – ∞ 4) ∞ 5) – ∞ 6) ∞

No início desta seção, estudamos limites onde tomávamos x tendendo para um número e, como resultado, os valores da função y = f(x) ficavam muito grandes. Agora vamos tornar o valor de x arbitrariamente grande e ver o que acontece com f(x).

Vamos analisar o comportamento de $f(x) = \frac{1}{x}$ através da tabela abaixo.

– 10.000	– 1.000	– 100	– 10	x	10	100	1.000	10.000
– 0,0001	– 0,001	– 0,01	– 0,1	f(x)	0,1	0,01	0,001	0,0001



À medida que x aumenta ou diminui, os valores de f(x) se aproximam de zero. Isso também pode ser observado no gráfico de f, esboçado ao lado.

Então $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Em geral, usamos a notação $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ para indicar que os valores de f(x) tendem para o número L quando x aumenta ilimitadamente. Analogamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = M$ para indicar que os valores de f(x) tendem para o número M quando x diminui ilimitadamente.

Podemos generalizar o exemplo acima pelo seguinte teorema:

Teorema: Se n é um número inteiro positivo e c é um número real então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

Exemplos: 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{12}{x^7} = 0$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7}{x^4} = 0$

Os valores de f(x) também podem crescer ou decrescer ilimitadamente, quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$. Por exemplo, os valores de $f(x) = x^3$ crescem ilimitadamente quando $x \to \infty$ e decrescem ilimitadamente quando $x \to -\infty$; os valores de $f(x) = -x^3$ decrescem ilimitadamente quando $x \to \infty$ e crescem ilimitadamente quando $x \to -\infty$. Denotamos isso, escrevendo:

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

O limite no infinito de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente (pois se colocarmos esse termo em evidência, todos os demais tendem a zero). Por exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} (2x^5 - 4x^2 + 3x + 7) = \lim_{x \to \infty} 2x^5\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x^4} + \frac{7}{2x^5}\right) = \lim_{x \to \infty} 2x^5 = \infty$$

Como consequência, quando tivermos o limite no infinito de um quociente de dois polinômios, ele será igual ao limite do quociente dos termos de maior expoente do numerador e do denominador. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^7+5x^4-3x+7}{2x^3-6x+9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^7}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} 3x^4 = \infty$$

Outros exemplos:

1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^4} =$

2) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x^5} =$

3) $\lim_{x\to\infty} (x^3 - 3x^2 + x - 7) =$

4) $\lim_{x\to-\infty} (1 - x^2 + x^3 + 3x^4 - 2x^7) =$

5) $\lim_{x\to-\infty} (2x^5 + x^2 - 4) =$

6) $\lim_{x\to\infty} (-x^4 + 5x^3 - x + 9) =$

7) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{7x+8} =$

8) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-3x+5}{4x^5-2} =$

9) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x+5}{2+4x-x^2} =$

10) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3-2x+x^2-4x^3}{x^3+5x^2+4} =$

11) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+3x^2-5}{8-5x-x^2} =$

12) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^5+7x-5}{6x^5+4x^2} =$

Respostas:

1) 0	2) 0	3) ∞	4) ∞	5) $-\infty$	6) $-\infty$
7) 2/7	8) 0	9) $-\infty$	10) -4	11) ∞	12) 1/6

Exercícios - lista 2

Determine os limites:

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{2x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2-x}$

7) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1-x}{(x-5)^2}$

8) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3+x}{(x-1)^2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to -7^+} \dfrac{x-7}{x+7}$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^4 - 7x + 1)$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^5 + x^3)$

13) $\lim\limits_{x\to \infty} (6x - 10x^2)$

14) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2 - x^2 + 4x^3)$

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^4+x^2+4}{-x^2-2x+7}$

16) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{3x^3+1}$

17) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^4-1}{-5x^3}$

18) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5+x-7x^2}{x^3+2x-1}$

19) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x+1}{4-x}$

20) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+3}{6x+7}$

Respostas:

1) $+\infty$	5) $+\infty$	9) $-\infty$	13) $-\infty$	17) ∞
2) $-\infty$	6) $-\infty$	10) $-\infty$	14) $-\infty$	18) 0
3) $-\infty$	7) $-\infty$	11) ∞	15) $-\infty$	19) -4
4) $-\infty$	8) $+\infty$	12) ∞	16) 0	20) 1 / 3

Exercícios de revisão – lista 3

Determine os limites abaixo:

1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$

2) $\lim_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^2 - 8x}{2x}$

4) $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{1}{x+3}$

5) $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{-3x}{x+1}$

6) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{1+6x}{-2+x}$

7) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + x + 1}{-4x^2 + 5x + 9}$

8) $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x - 35}}{8-x}$

9) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

10) $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

11) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{3x}$

12) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x}{4x}$

13) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{x^2 - 2x}$

14) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x-3}{x^2 - 1}$

15) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

16) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^{100} - x^{99}}{x^{101} - x^{100}}$

17) $\lim_{x\to 1/2} 2x + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

18) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x}$

19) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

20) $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2 - 1}}$

Respostas:

1) 1	6) 6	11) + ∞	16) 0
2) 1 / 6	7) – 1 / 2	12) 1 / 4	17) 9
3) – 4	8) – 1	13) – ∞	18) 1
4) – ∞	9) 8	14) 3 / 2	19) – ∞
5) + ∞	10) 64	15) 0	20) – 2

Capítulo 3 – Derivada de uma Função Real

O conceito de derivada foi introduzido no século XVII em estudos de problemas de Física ligados à pesquisa dos movimentos. Entre outros, destacam-se o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) e o filósofo e matemático alemão Gottfried Leibnitz (1646-1716).

3.1 – Taxa de Variação

Vamos considerar a seguinte situação: um carro está se movendo ao longo de uma estrada reta e d(t) representa a sua distância do ponto de partida após t horas e queremos determinar a velocidade do carro num instante t_1.

Para definir essa velocidade, primeiro calculamos a velocidade média em um intervalo de tempo próximo de t_1. Consideramos, por exemplo, os instantes t_1 e $t_1 + \Delta t$ onde Δt é um número real. As posições correspondentes são $d(t_1)$ e $d(t_1 + \Delta t)$. A velocidade média (v_m) do carro entre os instantes t_1 e $t_1 + \Delta t$ é:

$$v_m = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}} = \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1} = \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{\Delta t}$$

Para obtermos a velocidade do carro no instante t_1 (ou a velocidade instantânea em t_1), calculamos a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores. Se o intervalo de tempo Δt é pequeno, a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea. Podemos então definir a velocidade no instante t_1 ou a **taxa de variação (instantânea)** da distância em relação ao tempo como o limite quando Δt tender a zero na expressão para a velocidade média, isto é:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{\Delta t}$$

Exemplo: A distância (em metros) de um objeto a um ponto é dada por $s(t) = t^2 + 5$ onde o tempo t é medido em segundos. Determine a velocidade do objeto em $t_1 = 3$.

Solução: $v(t_1) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(3+\Delta t) - s(3)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(3+\Delta t)^2 + 5 - (9+5)}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2 + 5 - 9 - 5}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6 + \Delta t) = 6$$

Então a velocidade do objeto no instante $t_1 = 3$ é 6 metros por segundo.

As considerações a respeito da taxa de variação instantânea da distância em relação ao tempo podem ser generalizadas e assim serem aplicadas para quaisquer quantidades variáveis de qualquer espécie.

Definição : Seja $y = f(x)$. A taxa de variação instantânea de y em relação a x quando x tem o valor x_1 é dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplo: Um teste para diabetes envolve a medida da concentração de glicose no sangue de um paciente durante certo período de tempo. Suponha que t horas após uma injeção de glicose sua concentração no sangue seja dada pela função

$$f(t) = 1{,}8 + \frac{3{,}6}{\sqrt{t}}$$

onde f(t) é o número de miligramas de glicose por centímetro cúbico de sangue. Com que rapidez a concentração de glicose no sangue está variando 4 horas após a injeção?

Solução: Queremos determinar a taxa de variação de f(t) em relação a t quando t = 4

Então $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(4+\Delta t) - f(4)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1{,}8 + \frac{3{,}6}{\sqrt{4+\Delta t}} - 3{,}6}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{3{,}6}{\sqrt{4+\Delta t}} - 1{,}8}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{3{,}6 - 1{,}8\sqrt{4+\Delta t}}{\sqrt{4+\Delta t}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3{,}6 - 1{,}8\sqrt{4+\Delta t}}{\Delta t\sqrt{4+\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3{,}6 - 1{,}8\sqrt{4+\Delta t}}{\Delta t\sqrt{4+\Delta t}} \cdot \frac{3{,}6 + 1{,}8\sqrt{4+\Delta t}}{3{,}6 + 1{,}8\sqrt{4+\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12{,}96 - 3{,}24(4+\Delta t)}{\Delta t\sqrt{4+\Delta t}\,(3{,}6 + 1{,}8\sqrt{4+\Delta t})} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12{,}96 - 12{,}96 - 3{,}24\Delta t}{\Delta t\sqrt{4+\Delta t}\,(3{,}6 + 1{,}8\sqrt{4+\Delta t})} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-3{,}24\Delta t}{\Delta t\sqrt{4+\Delta t}\,(3{,}6 + 1{,}8\sqrt{4+\Delta t})} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-3{,}24}{\sqrt{4+\Delta t}\,(3{,}6 + 1{,}8\sqrt{4+\Delta t})} = \frac{-3{,}24}{14{,}4} = -0{,}225$$

Resposta: A concentração de glicose no sangue 4 horas após a injeção diminui a uma taxa de 0,225 mg por cm^3 por hora

3.2 – Derivada de uma função

Vimos na seção anterior que o problema de encontrar a taxa de variação de uma variável em relação a outra é resolvido pelo cálculo de um limite, que por ocorrer em muitas outras aplicações, recebe nome e notação especiais.

Definição: Seja f uma função. A **derivada de f em x_0**, denotada por $f'(x_0)$ é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ se o limite existir (é finito).}$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^3$. Determine $f'(2)$.

Solução: $\displaystyle f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2) = 12$$

No exemplo anterior determinamos $f'(2)$ mas é possível calcular a derivada de $f(x) = x^3$ em qualquer outro número. Assim, para cada valor de x podemos encontrar $f'(x)$, ou seja, definir uma nova função: a derivada.

Definição: Seja y = f(x). A **função derivada** (ou simplesmente derivada) de f é aquela tal que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O domínio de f' é o conjunto de todos os x para os quais o limite existe.

Exemplo: Determine a derivada de $f(x) = x^3$

Solução: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

Então $f'(x) = 3x^2$

Dessa maneira, se x = 2 temos $f'(2) = 12$; se x = – 1 temos $f'(-1) = 3$, etc..

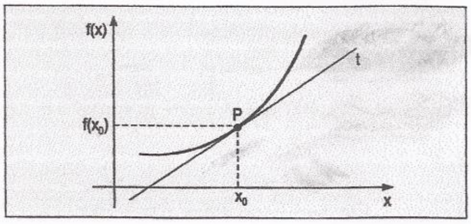
Observações:

1 - O limite indicado na definição de derivada pode existir para alguns valores de x e deixar de existir para outros. Se o limite existe (é finito) para x = a, dizemos que a função é **derivável** (diferenciável) **em a**. Uma função **derivável** (diferenciável) é aquela que é derivável em cada ponto de seu domínio.

2 - A notação f' usada na definição anterior tem a vantagem de enfatizar que a derivada de f é uma função de x que está associada de certa maneira com a função f dada. Se a função é apresentada na forma y = f(x), com a variável dependente explícita, então o símbolo y' é usado em lugar de $f'(x)$. A derivada de y = f(x) é também indicada por $\frac{dy}{dx}$ e algumas vezes por $D_x y$.

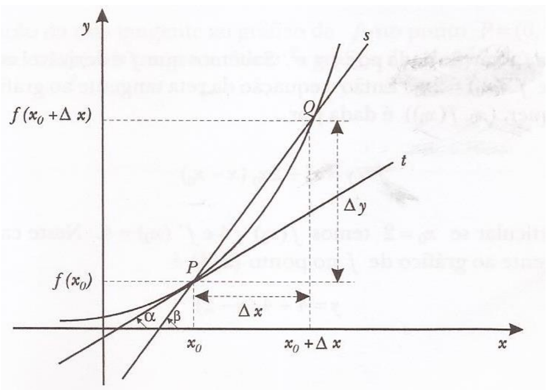
3 - A operação de encontrar a derivada de uma função é chamada **derivação** ou **diferenciação**.

Vamos supor que $P = (x_0, f(x_0))$ é um ponto no gráfico de uma função f derivável em x_0 e queremos determinar a reta t que passa por P (figura abaixo).



Sabemos que uma reta no plano é determinada quando conhecemos seu coeficiente angular e um ponto pertencente a ela. Precisamos calcular, então, o coeficiente angular de t.

Vamos escolher outro ponto Q no gráfico de f e traçar uma reta s passando por P e Q. Essa reta que passa por P e Q é chamada de reta secante. Tomando Q bem próximo de P, podemos fazer com que o coeficiente angular da reta s se aproxime do coeficiente angular da reta t com qualquer precisão desejada.



Vamos supor que a abscissa de Q esteja a Δx unidades de x_0. Desse modo, a abscissa de Q é $x_0 + \Delta x$.

Como Q pertence ao gráfico de f, a ordenada de Q é $f(x_0 + \Delta x)$. Assim, $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Então o coeficiente angular da reta s é:

$$m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se fizermos Δx tender a zero, o ponto Q se moverá sobre a curva $y = f(x)$ e tenderá ao ponto P. Além disso, a reta s irá girar em torno de P e tenderá para a reta t. Logo, quando Δx tende a zero, o coeficiente angular de s tende para o coeficiente angular de t, ou seja,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Como f é derivável em x_0, esse limite existe (é finito). Portanto $m_t = f'(x_0)$.

3.3 – Regras básicas de derivação

Nesta seção apresentaremos regras para encontrar a derivada de uma função sem utilizar diretamente a definição. Essas regras de derivação permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de funções algébricas.

Sendo $c \in IR$, $n \in Q$ e u e v funções reais de variável x.

1) Regra da constante: Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$

2) Regra da identidade: Se $f(x) = x$ então $f'(x) = 1$

3) Regra da potência: Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n.x^{n-1}$

4) Regra da soma: Se $f(x) = u + v$ então $f'(x) = u' + v'$

5) Regra do produto: Se $f(x) = uv$ então $f'(x) = u'v + uv'$

6) Regra do produto por uma constante: Se $f(x) = c.u$ então $f'(x) = c.u'$

7) Regras do quociente: a) Se $f(x) = \frac{u}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

b) Se $f(x) = \frac{c}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{-cv'}{v^2}$

Exemplos:

1) $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 4.3x^2 - 7.2x + 9.1 - 0 = 12x^2 - 14x + 9$

2) $f(x) = (5x^2 + 2x)(3x - 4)$

$f'(x) = (10x + 2)(3x - 4) + (5x^2 + 2x).3 = 30x^2 + 6x - 40x - 8 + 15x^2 + 6x$

$f'(x) = 45x^2 - 28x - 8$

3) $f(x) = \frac{5}{x^4}$

$f'(x) = \frac{-5.4x^3}{(x^4)^2} = \frac{-20x^3}{x^8} = \frac{-20}{x^5}$

4) $f(x) = \frac{3x^3 - 5}{4x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{9x^2(4x^2+1) - (3x^3-5)8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{36x^4 + 9x^2 - 24x^4 + 40x}{(4x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 9x^2 + 40x}{(4x^2+1)^2}$$

Outros exemplos:

Calcule as derivadas:

1) $f(x) = x^3 + 4x + 7$

2) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x$

3) $f(x) = 2x^5 + 3x^{-10} - 9x^{-2} - x + 8$

4) $f(x) = 3x + 4\sqrt{x}$

5) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 5x)$

6) $f(x) = (4x^2 + 2)(7x^3 + x)$

7) $f(x) = \dfrac{7}{5x^3}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

9) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+7}$

10) $f(x) = \dfrac{5x+7}{2x-1}$

Respostas:

1) $3x^2 + 4$

2) $20x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

3) $10x^4 - 30x^{-11} + 18x^{-3} - 1$

4) $3 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

5) $18x^2 + 26x + 5$

6) $140x^4 + 54x^2 + 2$

7) $\dfrac{-21}{5x^4}$

8) $\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

9) $\dfrac{x^4+21x^2}{(x^2+7)^2}$

10) $\dfrac{-19}{(2x-1)^2}$

3.4 – Aplicações de derivada

Vimos em 3.2 que a derivada $f'(x)$ expressa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em função da coordenada x do ponto de tangência (desde que o limite exista). Assim, se $y_0 = f(x_0)$, podemos afirmar que

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

é a **equação da reta tangente** ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0).

Exemplo: Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 4x$ no ponto (1, 5).

Solução: Vamos determinar o coeficiente angular da reta tangente no ponto (1, 5), isto é, $f'(1)$.

Então $f'(x) = 2x + 4$

Daí $f'(1) = 6$

Logo, a equação da reta tangente é: $y - 5 = 6(x - 1)$ ou $y = 6x - 1$

Pelo que foi estudado nas seções 1 e 2, sabemos que a derivada $f'(x)$ expressa também, a taxa de variação (instantânea) de $y = f(x)$ em relação a x.

Exemplo: Um teste para diabetes envolve a medida da concentração de glicose no sangue de um paciente durante certo período de tempo. Suponha que t horas após uma injeção de glicose sua concentração no sangue seja dada pela função

$$f(t) = 1{,}8 + \frac{3{,}6}{\sqrt{t}}$$

onde f(t) é o número de miligramas de glicose por centímetro cúbico de sangue. Com que rapidez a concentração de glicose no sangue está variando 4 horas após a injeção?

Solução: Já resolvemos esse problema anteriormente, usando limite. Utilizando agora o conceito de derivada e as regras de derivação temos:

$$f'(t) = \frac{-1{,}8}{\sqrt{t^3}}. \quad \text{Então } f'(4) = \frac{-1{,}8}{\sqrt{4^3}} = -0{,}225$$

Portanto, a concentração de glicose no sangue 4 horas após a injeção diminui a uma taxa de 0,225 mg por cm^3 por hora

Outros exemplos:

1) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ no ponto $(2, -6)$

2) A massa de uma cultura de bactérias tem seu crescimento representado pela função

$$m(t) = p_0 + 60t - 2{,}5t^2$$

para t medido em horas e m em cm^3 e sendo p_0 uma constante positiva. Calcule a velocidade de crescimento dessa cultura quando t = 6.

3) A resposta do corpo a uma dose de um medicamento às vezes é representada por uma equação da forma $R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$ onde C é uma constante positiva e M a quantidade de medicamento absorvida no sangue. Determine $\frac{dR}{dM}$ (esta derivada é chamada de sensibilidade do corpo ao medicamento).

Respostas:

1) $y = 4x - 14$

2) $30\ cm^3 / h$

3) $\frac{dR}{dM} = CM - M^2$

Muitas vezes precisamos calcular a taxa de variação da taxa de variação de uma grandeza. A aceleração, por exemplo, é a taxa de variação da velocidade com o tempo, mas a velocidade é a taxa de variação da distância com o tempo. Se a distância é medida em quilômetros e o tempo em horas, a velocidade é medida em quilômetro por hora e a aceleração é medida em quilômetro por hora ao quadrado.

A taxa de variação da função f em relação a x é a derivada f'. Da mesma forma, a taxa de variação da função f' em relação a x é a derivada $(f')'$. Para simplificar a notação, denotamos a derivada da derivada de f por f'' e a chamamos de **derivada de segunda ordem** (ou derivada segunda) de f.

De modo geral, o resultado de duas ou mais derivações sucessivas de uma função é uma **derivada de ordem superior**.

A **derivada de enésima ordem** de uma função y = f(x) é obtida derivando-se a função n vezes e é denotada por:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}$$

Exemplo: Se a posição de um carro que está se movendo em linha reta é dada, no instante t por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$, calcule a velocidade e a aceleração do carro.

Solução: A velocidade é $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 4$

A aceleração é $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$

Exercícios - lista 4

Nos itens 1 a 18, ache as derivadas aplicando as regras básicas:

1) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 1$

2) $f(x) = 5x^6 - 9x^4$

3) $f(x) = x^8 - 2x^7 + 3x + 1$

4) $f(x) = 5x^{-5} - 25x^{-1}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

6) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{4}{5x}$

7) $f(x) = x^2 (3x^3 - 1)$

8) $f(x) = (x^2 + 1)(2x^3 + 5)$

9) $f(x) = (x^3 - 1)(3x^2 - x)$

10) $f(x) = \sqrt{2}\,(x^5 - 2x^3 + 4)$

11) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2}$

12) $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

13) $f(x) = \dfrac{2x + 7}{3x - 1}$

14) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x^2 - 1}$

15) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x}$

16) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$

17) $f(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

18) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 4}$

Nos itens de 19 a 22, calcule $f'(2)$:

19) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$

20) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

21) $f(x) = x^{-3} - 1$

22) $f(x) = (x^2 + 1)(1 - x)$

Nos itens de 23 e 24, determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto especificado.

23) $f(x) = x^2 + 7x$; $P = (1,8)$

24) $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x}$; $P = (1,2)$

Nos itens de 25 e 26, determine a taxa de variação de f(x) em relação a x para o valor especificado.

25) $f(x) = x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $x = 1$

26) $f(x) = \dfrac{x}{2x + 3}$; $x = -1$

27) Calcula-se que daqui a t anos, a população de certo município será de $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t + 1}$ (milhares de pessoas).

a) Escreva uma expressão para a taxa com que a população estará variando daqui a t anos.
b) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 1 ano?
c) Qual será o aumento da população durante o segundo ano?
d) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 9 anos?
e) O que acontecerá com a taxa de crescimento da população em longo prazo?

28) A reação do corpo humano a uma dose de remédio pode ser modelada por uma função da forma $F = \frac{1}{3}(KM^2 - M^3)$ onde K é uma constante positiva e M é a quantidade de remédio absorvida pelo sangue. A derivada $\frac{dF}{dM}$ pode ser interpretada como uma medida da sensibilidade do corpo ao remédio.

a) Encontre uma expressão para a sensibilidade S do corpo ao remédio.
b) Determine $\frac{dS}{dM} = \frac{d^2F}{dM^2}$ e dê uma interpretação para essa derivada segunda.

Respostas:

1) $5x^4 - 9x^2$	2) $30x^5 - 36x^3$	3) $8x^7 - 14x^6 + 3$
4) $-25x^{-6} + 25x^{-2}$	5) $\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$	6) $\frac{3}{2}x - \frac{4}{5}x^{-2}$
7) $15x^4 - 2x$	8) $10x^4 + 6x^2 + 10x$	9) $15x^4 - 4x^3 - 6x + 1$
10) $\sqrt{2}\,(5x^4 - 6x^2)$	11) $2x^3$	12) $\frac{1}{(2-x)^2}$
13) $\frac{-23}{(3x-1)^2}$	14) $\frac{-20x}{(x^2-1)^2}$	15) $\frac{x^2}{(x^2+x)^2}$
16) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$	17) $\frac{2x^3-7}{x^2}$	18) $\frac{12x}{(x^2+4)^2}$
19) 4	20) – 1/18	21) – 3/16
22) – 9	23) 9	24) 4
25) – 3/2	26) 3	

27) a) $P'(t) = \frac{6}{(t+1)^2}$ (milhares de pessoas por ano) b) 1.500 pessoas por ano
c) 1.000 pessoas d) 60 pessoas por ano e) Tenderá a zero

28) a) $S = \frac{1}{3}(2KM - 3M^2)$

b) $\frac{dS}{dM} = \frac{1}{3}(2K - 6M)$ que é a taxa de variação da sensibilidade do corpo com a quantidade de remédio.

3.5 – Regra da Cadeia

Vamos estudar agora uma regra de derivação chamada **regra da cadeia** que quando usada com as regras básicas permite ampliar consideravelmente a classe de funções que podemos derivar.

Queremos determinar, por exemplo, a derivada de $y = (x^3 + 5)^2$

Podemos fazer isso desenvolvendo $(x^3 + 5)^2$ e derivando o polinômio resultante.

Assim, $y = (x^3 + 5)^2 = x^6 + 10x^3 + 25$

Logo $\dfrac{dy}{dx} = 6x^5 + 30x^2$ (1)

Também podemos fazer $u = x^3 + 5$ de modo que $y = u^2$

Calculamos, então, $\dfrac{dy}{du} = 2u$ e $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$

Daí $\dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u.\ 3x^2 = 6x^5 + 30x^2$ (2)

Por (1) e (2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Esta relação entre as derivadas ocorre de modo geral e é conhecida como **regra da cadeia**.

Regra da cadeia (versão informal): Se y é uma função derivável em u e u é uma função derivável em x, então y é uma função derivável em x e $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Exemplo: Determine a derivada de $y = (4x^5 – 7x^2)^{30}$

Solução: Seja $u = 4x^5 – 7x^2$ de modo que $y = u^{30}$

Então $\dfrac{dy}{du} = 30u^{29}$ e $\dfrac{du}{dx} = 20x^4 – 14x$

Pela regra da cadeia, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 30u^{29}(20x^4 – 14x) = 30(4x^5 – 7x^2)^{29}(20x^4 – 14x)$

Nos exemplos apresentados, as funções dadas eram potências de funções. Como essas potências ocorrem com frequência no Cálculo, é conveniente estabelecer uma regra de derivação que possa ser aplicada em tais casos.

Teorema (regra geral da potência): Se r é um número racional e u é uma função derivável de variável x então

$$(u^r)' = r.u^{r-1}.\, u'$$

Exemplos:

1) $y = (x^2 + 3x - 2)^9$

Solução: $y' = 9(x^2 + 3x - 2)^8(2x + 3)$

2) $y = \sqrt{6x - 7}$

Solução: Temos que $y = (6x - 7)^{1/2}$

Então $y' = \dfrac{1}{2}(6x - 7)^{-1/2}.\, 6 = \dfrac{3}{\sqrt{6x - 7}}$

3) $y = 4x^2(2x - 1)^4$

Solução: $y' = 8x(2x - 1)^4 + 4x^2 .\, 4(2x - 1)^3 .\, 2 = 8x(2x - 1)^4 + 32x^2(2x - 1)^3 =$

$= 8x(2x - 1)^3(2x - 1 + 4x) = 8x(2x - 1)^3(6x - 1)$

4) $y = \left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^{10}$

Solução: $y' = 10\left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^9 .\, \left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)' = 10\left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^9 .\, \dfrac{3}{(x + 1)^2} = \dfrac{30(x - 2)^9}{(x + 1)^{11}}$

Outros exemplos:

1) $y = (3x^3 + 4x^2 - 4)^{-5}$

2) $y = \sqrt[3]{5x^2 - x + 6}$

3) $y = 5x^6(2x + 7)^9$

4) $y = \left(\dfrac{-2}{x^3 + 5x}\right)^3$

Respostas:

1) $y' = (-5)(3x^3 + 4x^2 - 4)^{-6}(9x^2 + 8x)$

2) $y' = \dfrac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 6)^2}}$

3) $y' = 30x^5(2x + 7)^8(5x + 7)$

4) $y' = \dfrac{24(3x^2 + 5)}{(x^3 + 5x)^4}$

Exercícios - lista 5

Nas questões 1 a 16, calcule as derivadas:

1) $y = (5 - 2x)^{10}$

2) $y = (4x + 1)^{-5}$

3) $y = (2x^4 - x + 1)^{-4}$

4) $y = (x^2 - 3x + 2)^7$

5) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

6) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$

7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

8) $y = \dfrac{3}{(1 - x^2)^4}$

9) $y = 5x^2(2x + 3)^4$

10) $y = 6x\,(2x - 1)^3$

11) $y = (x^2 - x)(2x + 1)^4$

12) $y = (5x + 2)(x^2 + 1)^5$

13) $y = (2x + 1)^3(x^3 - 5)$

14) $y = (3x + 1)^4(2x - 1)^5$

15) $y = \left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^4$

16) $y = \left(\dfrac{4x + 1}{x + 2}\right)^3$

17) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 5}$ em $x = 1$.

18) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = (2x - 3)^5$ quando $x = 2$.

19) Uma doença está se espalhando de tal forma que, após t semanas, o número de pessoas infectadas é dado por $f(t) = 5175 - t^3(t - 8)$ com $0 \leq t \leq 8$. Ache a taxa de disseminação da doença após 3 semanas.

20) Foi observado que o fluxo de sangue de uma artéria para um pequeno capilar é dado pela função

$$F = KD^2\sqrt{A - C} \quad (cm^3 / seg)$$

onde D é o diâmetro do capilar, A é a pressão na artéria, C é a pressão no capilar e K é uma constante positiva. Qual é a taxa de variação do fluxo de sangue F em relação à pressão C no capilar, se A e D se mantêm constantes?

Respostas:

1) $-20(5-2x)^9$

2) $-20(4x+1)^{-6}$

3) $(-32x^3+4)(2x^4-x+1)^{-5}$

4) $7(x^2-3x+2)^6(2x-3)$

5) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

6) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}$

7) $\dfrac{-4x}{(4x^2+1)^{3/2}}$

8) $\dfrac{24x}{(1-x^2)^5}$

9) $10x(2x+3)^3(6x+3)$

10) $6(2x-1)^2(8x-1)$

11) $(2x+1)^3(12x^2-8x-1)$

12) $5(x^2+1)^4(11x^2+4x+1)$

13) $3(2x+1)^2(4x^3+x^2-10)$

14) $2(3x+1)^3(2x-1)^4(27x-1)$

15) $\dfrac{4(x-1)^3}{x^5}$

16) $\dfrac{21(4x+1)^2}{(x+2)^4}$

17) $m = 1/2$

18) $y = 10x - 19$

19) 108 pessoas por semana

20) $\dfrac{dF}{dC} = \dfrac{-KD^2}{2\sqrt{A-C}}$

3.6 – Derivadas de funções exponenciais e de funções logarítmicas

As funções exponenciais e logarítmicas estão entre as mais importantes do Cálculo, com muitas aplicações em campos tão diversos como a Física, a Biologia e a Economia. Nesta seção vamos apresentar as regras básicas de derivação para essas funções.

Seja $a \in IR_+^* - \{1\}$ e seja u uma função derivável de variável x

Se $f(x) = a^u$ então $f'(x) = u'.a^u.\ln a$

Caso particular: Se $f(x) = e^u$ então $f'(x) = u'.e^u$

Observe que se u é a função identidade então $f(x) = e^x$. Consequentemente, $f'(x) = e^x$.

Exemplos:

1) $f(x) = 5^{2x^2+7x}$

Solução: $f'(x) = (4x + 7).\ 5^{2x^2+7x}\ .\ \ln 5$

2) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Solução: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ .\ e^{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \sqrt{e^{6x}+5}$

Solução: Temos que $f(x) = \sqrt{e^{6x}+5} = (e^{6x} + 5)^{1/2}$

Então $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(e^{6x} + 5)^{-1/2}.6\,e^{6x} = \dfrac{3e^{6x}}{\sqrt{e^{6x}+5}}$

4) Uma colônia de bactérias começa com uma população de 10.000 indivíduos e após t horas a população é dada pela função $P(t) = 10.000\ e^{-0,04t}$. Qual é a taxa de variação da população após 100 horas?

Solução: $P'(t) = 10.000\ e^{-0,04t}.(-0,04) = -400\ e^{-0,04t}$

Após 100 horas temos $P'(100) = -400\ e^{-4} \cong -7$

A população está diminuindo a uma taxa de 7 indivíduos por hora.

Seja $a \in IR_+^* - \{1\}$ e seja u uma função derivável de variável x

Se $f(x) = \log_a u$ então $f'(x) = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Caso particular: Se f(x) = ln u então $f'(x) = \frac{u'}{u}$

Exemplos:

1) $f(x) = \log_2(7x^5 - 2x^4 + 3)$

Solução: $f'(x) = \frac{35x^4 - 8x^3}{(7x^5 - 2x^4 + 3)\ln 2}$

2) f(x) = ln x

Solução: $f'(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = \ln(5x^2 - 4x)^3$

Solução: Sabemos que $\ln(5x^2 - 4x)^3 = 3\ln(5x^2 - 4x)$

Então $f'(x) = 3.\frac{10x - 4}{5x^2 - 4x} = \frac{30x - 12}{5x^2 - 4x}$

4) $f(x) = (\ln(2x + 7))^3$

Solução: Pela regra geral da potência temos: $f'(x) = 3(\ln(2x + 7))^2 \frac{2}{2x + 7} = \frac{6(\ln(2x + 7))^2}{2x + 7}$

5) $f(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{x}\right)$

Solução: Temos que $\left(\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1.x - (x+1).1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

Então $f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x^2}.\frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x^2 + x}$

Outros exemplos:

Calcule as derivadas:

1) $f(x) = 3^{x^4 + 7x^3}$

2) $f(x) = e^{1/x}$

3) $f(x) = \log(4x^5 - 7)$

4) $f(x) = \ln\left(\sqrt{8x^3 + 5}\right)$

5) $f(x) = (\ln(3x^2 + x))^7$

6) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f(x) = xlnx em x = 2 (considere ln2 = 0,7).

Respostas:

1) $f'(x) = (4x^3 + 21x^2).\ 3^{x^4+7x^3}\ .\ \ln 3$

2) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}\ .\ e^{1/x} = \dfrac{-e^{1/x}}{x^2}$

3) $f'(x) = \dfrac{20x^4}{(4x^5-7)\ln 10}$

4) $f'(x) = \dfrac{12x^2}{8x^3+5}$

5) $f'(x) = \dfrac{7(6x+1)\ln(3x^2+x))^6}{3x^2+x}$

6) $y = 1{,}7x - 2$

3.7 – Regra de L'Hôpital

De modo geral, se temos $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, dizemos que o limite está associado a uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Calculamos alguns limites desse tipo no capítulo 2 utilizando recursos algébricos.

Por exemplo, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+3}{x+1} = -1$

Mas esses recursos não funcionam para determinar, por exemplo, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-8)}{3-x}$$

Se temos $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) quando $x \to a$, dizemos que o limite está associado a uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Os teoremas introduzidos no capítulo 2 também não permitem calcular o $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}}{2x+5}$ que está associado a uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

O teorema a seguir estabelece um método simples que usa a derivada para calcular esses limites chamado **regra de L'Hôpital**.

Teorema: (regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I e $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

a) Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Se $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

b) Suponha que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

Se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Observações: 1 – A regra de L'Hôpital pode ser aplicada à determinação de limites laterais e de limites no infinito.

2 – Informalmente, a regra de L'Hôpital diz que, se sua tentativa de calcular o limite de um quociente levar às formas indeterminadas $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, então calcule as derivadas do numerador e do denominador e tente novamente.

3 – A regra de L'Hôpital envolve a derivada do numerador e do denominador separadamente. Um erro comum é derivar o quociente inteiro usando a regra de derivação de quocientes.

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^4 - 12x^3 + 5}{20x^4 + 6x^2 - 10x} = -\dfrac{1}{8}$

2) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \dfrac{1/4}{10} = \dfrac{1}{40}$

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln(x^2 - 8)}{3 - x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\dfrac{2x}{x^2 - 8}}{-1} = -6$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x}}{2x + 5} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4e^{4x}}{2} = \infty$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

Algumas vezes, a aplicação da regra de L'Hôpital a uma forma indeterminada conduz a uma nova forma indeterminada. Quando isso acontece, uma segunda aplicação da regra pode ser necessária. Em alguns casos, é preciso aplicar a regra várias vezes para eliminar a indeterminação.

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x}{6x - 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{8e^{2x}}{6}=\infty$$

Há casos em que a indeterminação persiste não importando quantas vezes a regra seja aplicada e outros recursos, além da regra de L'Hôpital, precisam ser utilizados para determinar o limite.

Por exemplo, o cálculo do $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}$ leva à forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Aplicando a regra de L'Hôpital (duas vezes) obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{2x^3}\ \text{(que continua indeterminado)}$$

Para determinar o limite, devemos fazer uma mudança de variável:

Seja $\frac{1}{x}=y$. Daí $\frac{1}{y}=x$

$$\text{Então}: \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}}{1/y}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{e^y}=0$$

A regra de L'Hôpital se aplica **somente** a limites associados a formas indeterminadas. Assim, é importante verificar se um dado quociente tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ antes de aplicar a regra de L'Hôpital. Sabemos que $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{0}{1}=0$. Observe que o cálculo desse limite **não** conduz a uma forma indeterminada e, portanto, a regra de L'Hôpital **não** se aplica na determinação do limite. Se aplicarmos (erradamente) a regra vamos obter:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-e^{-x}}=1\ \text{(o que está errado)}$$

Outros exemplos:

1) $\lim_{x\to 1}\frac{20x^3-5x^2-15x}{x^4+3x^2-4}$ 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5}{4-7x}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{e^{3x}}$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3}-1}$ 5) $\lim_{x\to 7}\frac{\ln\left(x/7\right)}{7-x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{e^{2x}-2x-1}$

Respostas:

1) 7 / 2 2) $-\infty$ 3) 0 4) 1 / 2 5) $-1/7$ 6) 3

Exercícios - Lista 6

Nas questões de 1 a 12 calcule as derivadas, simplificando o resultado:

1) $f(x) = e^{5x^3 - x}$

2) $f(x) = 2^{5x^3 - x}$

3) $f(x) = 10^{-7x + 2}$

4) $f(x) = e^{-1/x}$

5) $f(x) = e^x \ln x$

6) $f(x) = \sqrt{e^{4x} + 5}$

7) $f(x) = \ln (5x + 4)$

8) $f(x) = \ln \sqrt{5x + 4}$

9) $f(x) = \ln (8 - 2x)^5$

10) $f(x) = (\ln (3x + 1))^2$

11) $f(x) = \log (3x^2 - 2x + 1)^2$

12) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{x}\right)$

Nas questões de 13 a 24 use a regra de L'Hôpital para determinar os seguintes limites:

13) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 - x - 14}$

14) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

15) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

16) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$

17) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$

18) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(2x - 3)}{\ln(3x - 5)}$

19) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

20) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

21) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^3 - 5x + 1}{\ln x}$

22) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(7 + x)}{x}$

23) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x}}{x^2}$

24) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4e^{-x} + 4}{x^2 + x}$

Respostas:

1) $f'(x) = (15x^2 - 1)e^{5x^3 - x}$

2) $f'(x) = (15x^2 - 1)2^{5x^3 - x} \ln 2$

3) $f'(x) = (-7\ln 10)\, 10^{-7x + 2}$

4) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x}$

5) $f'(x) = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

6) $f'(x) = \dfrac{2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x} + 5}}$

7) $f'(x) = \dfrac{5}{5x+4}$

8) $f'(x) = \dfrac{5}{10x+8}$

9) $f'(x) = \dfrac{-5}{4-x}$

10) $f'(x) = \dfrac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$

11) $f'(x) = \dfrac{12x-4}{(3x^2-2x+1)\ln 10}$

12) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$

13) 5 / 13

14) 32

15) 3

16) – 3

17) – 1 / 6

18) 2 / 3

19) ∞

20) 0

21) 7

22) 0

23) ∞

24) 4

3.8 – Derivação implícita

Todas as funções estudadas até agora foram dadas por equações da forma y = f(x), onde a variável dependente y é definida **explicitamente** por uma expressão envolvendo a variável independente x. Por exemplo, $y = x^3 - 4x + 1$ e $y = 7x + \sqrt{x-6}$

Muitas funções, no entanto, são definidas **implicitamente** por uma equação que envolve tanto a variável independente como a variável dependente. Por exemplo:

$$(1)\quad xy = 3 \qquad e \qquad (2)\quad 5 - x^2 + 4y^3 = 7y$$

Em alguns casos é possível resolver a equação e escrever a variável dependente na forma explícita. É o caso da equação (1) acima, onde $y = \frac{3}{x}$. Mas não é fácil resolver a equação (2) e escrever y explícitamente em função de x.

Vamos supor que conhecemos uma equação que define y implicitamente como uma função de x e precisamos determinar a derivada $\frac{dy}{dx}$.

Não é necessário escrever y explícitamente em função de x para encontrar $\frac{dy}{dx}$. Podemos derivar a equação termo a termo, utilizando a regra da cadeia quando derivarmos os termos contendo y e, a seguir, explicitamos $\frac{dy}{dx}$. Esta técnica é conhecida como **derivação implícita**.

Exemplos:

1) Suponha que a equação (2) acima, defina uma função derivável tal que y = f(x). Calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Temos que $5 - x^2 + 4y^3 = 7y$. Derivando implicitamente ambos os lados dessa equação em relação a x obtemos:

$$0 - 2x + 12y^2\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx}$$

Daí $12y^2\frac{dy}{dx} - 7\frac{dy}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx}(12y^2 - 7) = 2x$$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{12y^2 - 7}$

2) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função y = f(x) definida implicitamente na equação $x^2y^3 - 5y^3 = x + 6$ no ponto (2 , – 2).

Solução: Derivando implicitamente a equação dada em relação a x temos:

$$2xy^3 + x^2 . 3y^2 \frac{dy}{dx} - 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1 + 0$$

$$3x^2y^2 \frac{dy}{dx} - 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx}(3x^2y^2 - 15y^2) = 1 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

Para determinar o coeficiente angular m da reta tangente basta substituir x = 2 e y = – 2 na expressão da derivada. Então m = $\frac{33}{-12} = -\frac{11}{4}$

Em algumas aplicações, x e y estão relacionadas por uma equação, e ambas as variáveis são funções de uma terceira variável t (que quase sempre representa o tempo) e as fórmulas que descrevem x e y como funções de t não são conhecidas. Nesse caso, a derivação implícita pode ser usada para relacionar $\frac{dx}{dt}$ com $\frac{dy}{dt}$ e a equação relacionando as taxas pode ser utilizada para determinar uma delas quando a outra é conhecida. Nesse contexto, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são chamadas de **taxas relacionadas**.

Exemplos:

1) Seja $x^2 - y^2 = 1$ e suponha que x e y são funções de t. Determine $\frac{dx}{dt}$ sabendo que x = 4, y = 5 e $\frac{dy}{dt} = 0{,}08$.

Solução: Derivando implicitamente a equação dada em relação a t: $2x\frac{dx}{dt} - 2y\frac{dy}{dt} = 0$

Daí $x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = 0$.

Para x = 4, y = 5 e $\frac{dy}{dt} = 0{,}08$ temos: $4\frac{dx}{dt} - 0{,}4 = 0$.

Logo $\frac{dx}{dt} = 0{,}1$

2) Um tumor é modelado por uma esfera de raio R. Se o raio do tumor é atualmente R = 0,54 cm e está aumentando à taxa de 0,13 cm por mês, determine a taxa correspondente de aumento do volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Solução: Derivando implicitamente a equação em relação a t temos: $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi.\ 3R^2.\frac{dR}{dt}$

Daí $\frac{dV}{dt} = 4\pi.R^2.\frac{dR}{dt}$

Como R = 0,54 e $\frac{dR}{dt}$ = 0,13 então $\frac{dV}{dt} = 4\pi.(0{,}54)^2.(0{,}13) \cong 0{,}47$

Logo o tumor está aumentando 0,47cm^3 por mês.

Outros exemplos:

1) Sabendo que x e y estão relacionados pela equação $\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 = 5$, determine $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

2) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função y = f(x) definida implicitamente na equação $2x^2 + y^3 + y - 6 = 3xy$ no ponto (1, 2).

3) Suponha que x e y são funções da variável t e estão relacionadas pela equação $x^3 - 2y^2 + 5x = 16$. Se x = 2, y = – 1 e $\frac{dx}{dt} = 4$, determine $\frac{dy}{dt}$.

4) Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e o volume V estão relacionados pela equação $PV^{1,4} = C$ onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é 400 cm^3 e a pressão é 80 KPa e está decrescendo a uma taxa de 10 KPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse instante?

Respostas:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$

2) $m = \frac{1}{5}$

3) $\frac{dy}{dt} = -17$

4) 35,7 cm^3/min

Exercícios – lista 7

Nas questões de 1 a 4 encontre dy / dx através de derivação implícita:

1) $4xy^2 + 3x^2y = 2$

2) $x^2y - xy^2 + x^2 = 7$

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

4) $\sqrt{x + y} = x$

Nas questões de 5 a 8 determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente pela equação dada para o valor indicado.

5) $x^2 = y^3$; $x = 8$

6) $xy = 2$; $x = 2$

7) $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1$; $x = 0$

8) $(2x + y)^3 = x$; $x = -1$

Nas questões de 9 a 12 escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente pela equação dada no ponto indicado.

9) $4x^2 + 9y^2 = 36$; $P = (0, 2)$

10) $x^2y^3 - y^2 + xy = 1$; $P = (1,1)$

11) $x^2y^2 + 2xy = 0$; $P = (2, -1)$

12) $(1 - x + y)^3 = x + 7$; $P = (1, 2)$

13) Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída e inflado à razão de $0{,}002\pi$ mm^3/min. Qual é a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é R = 0,005 mm?

14) A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás está comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V estão relacionados pela equação PV = C onde C é uma constante. Suponha que em certo instante o volume é 600 cm^3, a pressão é 150 KPa e a pressão cresce a uma taxa de 20 KPa/ min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

Respostas:

1) $\dfrac{-4y^2 - 6xy}{8xy + 3x^2}$

2) $\dfrac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2xy}$

3) $\dfrac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

4) $2\sqrt{x + y} - 1$

5) $\dfrac{1}{3}$

6) $\dfrac{-1}{2}$

7) -4

8) $\dfrac{-5}{3}$

9) $y = 2$

10) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

11) $y = \dfrac{x}{2} - 2$

12) $y = \dfrac{13}{12}x + \dfrac{11}{12}$

13) 20 mm/min

14) – 80 cm^3/min

3.9 – Diferenciais

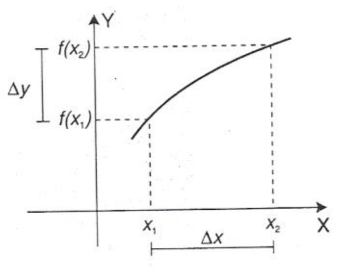
Problemas em que desejamos estimar a variação da variável dependente que corresponde a uma pequena mudança na variável independente ocorrem em muitas aplicações da vida real. Por exemplo, um comerciante deseja saber como um pequeno aumento no preço unitário de um produto irá afetar seu lucro; um sociólogo deseja saber como um pequeno aumento no investimento de capital de um projeto de moradias populares irá afetar a taxa de criminalidade; um pesquisador deseja saber como um pequeno aumento na quantidade de bactericida irá afetar a população de bactérias. Para calcular essas variações e estimar seus efeitos, usamos a **diferencial** de uma função, um conceito que será introduzido logo a seguir.

Seja x uma quantidade variável e suponha que x varie de x_1 a x_2. A diferença $x_2 - x_1$ é chamada de **acréscimo** (ou **incremento**) em x e denotada por Δx. Assim,

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Seja $y = f(x)$ onde f é uma função. Se x varia de x_1 a x_2 então o acréscimo de x acarreta um acréscimo de y, denotado por Δy. Nesse caso, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, também podemos escrever:



$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \qquad (1)$$

O gráfico da figura ao lado mostra um caso em que Δx e Δy são positivos, mas Δx pode ser positivo ou negativo, e Δy pode ser positivo, negativo ou zero. Nas aplicações, Δx e Δy são, em geral, pequenos numericamente.

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^3$

a) Determine Δx quando x varia de 3 a 3,2

b) Determine Δx quando x varia de 3 a 2,7

c) Determine Δy quando x varia de 2 a 2,01

d) Determine Δy quando x varia de 2 a 1,98

Solução:

a) $\Delta x = 3{,}2 - 3 = 0{,}2$

b) $\Delta x = 2{,}7 - 3 = -0{,}3$

c) $\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 8{,}120601 - 8 = 0{,}120601$

d) $\Delta y = f(1{,}98) - f(2) = 7{,}762392 - 8 = -0{,}237608$

Definição: Seja $y = f(x)$ onde f é uma função derivável e seja Δx um acréscimo de x.

a) A **diferencial dx** da variável independente x é $dx = \Delta x$

b) A **diferencial dy** da variável dependente y é $dy = f'(x)dx$

Observações: 1 – Para a variável independente x, não existe diferença entre Δx e dx: ambas medem a variação em x.

2 – Para a variável dependente y, Δy mede a variação real em y quando x varia de x a $x + \Delta x$, enquanto dy mede a variação aproximada em y correspondente à mesma variação em x.

Exemplo 2: Seja $y = x^3$

a) Determine dy

b) Use dy para aproximar Δy quando x varia de 2 a 2,01

b) Use dy para aproximar Δy quando x varia de 2 a 1,98

Solução:

a) $dy = f'(x)dx = 3x^2dx$

b) Temos $x = 2$ e $dx = 2{,}01 – 2 = 0{,}01$

Então $dy = 3x^2dx = 3.4.0{,}01 = 0{,}12$

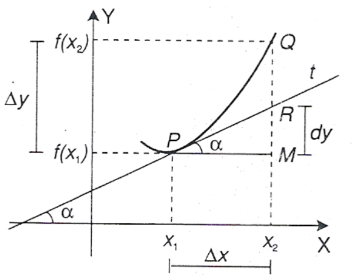
c) Temos $x = 2$ e $dx = 1{,}98 – 2 = – 0{,}02$

Então $dy = 3x^2dx = 3.4.(– 0{,}02) = – 0{,}24$

As aproximações 0,12 e – 0,24 calculadas no exemplo 2 estão bastante próximas das variações reais de Δy obtidas no exemplo 1: 0,120601 e – 0,237608.

Interpretação geométrica de dy

A figura abaixo representa o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$.



O acréscimo Δx que define a diferencial dx está geometricamente representado pela medida do segmento PM. O acréscimo Δy está representado pela medida do segmento MQ.

A reta t é tangente à curva no ponto P. Esta reta corta a reta $x = x_2$ no ponto R, formando o triângulo retângulo PMR. O coeficiente angular desta reta t é dado por $f'(x_1)$ ou tg α.

Observando o triângulo PMR, podemos dizer que $f'(x_1) = \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\overline{MR}}{\overline{PM}}$

onde $\overline{MR}$ e $\overline{PM}$ são, respectivamente, as medidas dos segmentos MR e PM.

Usando o fato de que $f'(x_1) = \dfrac{dy}{dx}$, temos daí que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\overline{MR}}{\overline{PM}}$

Então, como $\overline{PM} = dx$, concluímos que $dy = \overline{MR}$.

Exemplo 3: Dado $y = 4x^2 - 3x + 1$, os valores de Δy, dy e $\Delta y - dy$ para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}1$; $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}01$ e $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$ estão na tabela a seguir.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	0,1	1,34	1,3	0,04
2	0,01	0,1304	0,13	0,0004
2	0,001	0,013004	0,013	0,000004

Note, que quanto mais próximo de zero está Δx, menor é a diferença entre Δy e dy.

Nos exemplos anteriores fica claro que dy é uma boa aproximação para Δy desde que Δx seja "pequeno", isto é, se $\Delta x \cong 0$ então $\Delta y \cong dy$. Observamos também, que é mais fácil encontrar um valor aproximado para a variação exata de uma função com o auxílio da diferencial em lugar de calcular a variação real da própria função.

Reescrevendo a fórmula (1) como $f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + \Delta y$ e considerando $\Delta y \cong dy$, podemos concluir que, se $y = f(x)$ onde f é uma função derivável e Δx é um acréscimo de x então

$$f(x_1 + \Delta x) \cong f(x_1) + dy \quad \text{ou} \quad f(x_1 + \Delta x) \cong f(x_1) + f'(x_1)dx$$

Exemplo 4: Seja $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

a) Determine os valores de Δy e dy quando x varia de 2 para 2,02.
c) Determine o erro cometido nessa aproximação.

Solução:

a) $\Delta y = f(2{,}02) - f(2) = (12{,}2412 - 4{,}04 + 4) - (12 - 4 + 4) = 12{,}2012 - 12 = 0{,}2012$

$dy = f'(x)dx = (6x - 2)dx$

Para $x = 2$ e $dx = 0{,}02$ temos $dy = 10(0{,}02) = 0{,}2$

b) Determinamos o erro cometido calculando $\Delta y - dy = 0{,}2012 - 0{,}2 = 0{,}0012$

Exemplo 5: Seja $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5$. Use diferenciais para achar um valor aproximado para $f(0{,}97)$.

Solução:

Sabemos que $f'(x) = 20x^4 - 24x^3 + 6x$

Como $f(x_1 + \Delta x) \cong f(x_1) + f'(x_1)dx$ temos $f(0{,}97) = f(1 + (-0{,}03)) \cong f(1) + f'(1)(-0{,}03)$

Mas $f(1) = -4$ e $f'(1) = 2$

Então $f(0{,}97) = -4 - 0{,}06 = -4{,}06$

Exemplo 6: Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65{,}5}$ usando diferenciais.

Solução:

Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Daí $\sqrt[3]{65{,}5} = f(65{,}5) = f(64 + 1{,}5) \cong f(64) + f'(64).1{,}5$

Temos $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Então $f'(64) = \dfrac{1}{48} \cong 0{,}02083$

Logo, $\sqrt[3]{65{,}5} = 4 + (0{,}02083)(1{,}5) = 4 + 0{,}031245 = 4{,}031245$

Outros exemplos:

1) Seja $y = f(x) = 2x^3 + 5$. Determine os valores de Δy, dy e $\Delta y - dy$ quando x varia de 2 para 2,01.

2) Use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $\ln(1{,}05)$.

3) Seja $f(x) = 5x^2 + x$. Use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $f(2{,}02)$.

4) Use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $\sqrt{25{,}31}$

Respostas:

1) $\Delta y = 0{,}060602$; $dy = 0{,}06$; $\Delta y - dy = 0{,}000602$

2) 0,05 3) 22,42 4) 5,031

Exercícios – lista 8

1) Seja $f(x) = 3x^2 – 5$. Determine os valores de Δy e dy quando x varia de 2 para 2,1.

2) Seja $f(x) = 2x^2 – 4x + 5$. Determine os valores de Δy e dy quando x varia de 2 para 1,8.

3) Suponha que $f(x) = 6x^2 – 4$, $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$.
   a) Faça uma estimativa de Δy usando diferenciais.
   b) Determine o erro cometido na aproximação

4) Suponha que $f(100) = 200$ e $f'(100) = 10$. Faça uma estimativa do valor de:
   a) f(100,5) b) f(99,75)

5) Sendo $f(x) = 4x^2 – 3x + 1$, use diferenciais para achar um valor aproximado para f(2,1)

6) Sendo $f(x) = x^4$, use diferenciais para achar um valor aproximado para f(0,95)

7) Sendo $f(x) = 4x^5 – 6x^4 + 3x^2 – 5$, use diferenciais para achar um valor aproximado para f(1,03)

8) Use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $\sqrt{101}$

9) Use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $\sqrt{3{,}95}$

10) Use diferenciais para encontrar um valor aproximado para $\sqrt[4]{17}$

Respostas:

1) $\Delta y = 1{,}23$ e $dy = 1{,}2$

2) $\Delta y = – 0{,}72$ e $dy = – 0{,}8$

3) a) $\Delta y \cong 0{,}024$ b) 0,000006

4) a) 205 b) 197,5

5) 12,3

6) 0,8

7) – 3,94

8) 10,05

9) 1,9875

10) 2,031

3.10 – Problemas de máximos e mínimos

Em muitas aplicações precisamos achar os valores máximo e mínimo que uma grandeza pode atingir. Por exemplo: A eficácia de um remédio t horas após ter sido tomado é dada por $E(t) = \frac{1}{27}(9t + 3t^2 - t^3)$ com $0 \le t \le 5$. Para que valor de t a eficácia é máxima?

Para resolver este problema há duas considerações a fazer:

(1ª) A função E assume algum valor máximo no intervalo dado?

(2ª) Se existe este valor máximo, onde ele ocorre?

Se soubermos responder estas questões então poderemos resolver o problema. Para isso, precisamos de algumas definições e teoremas.

Definição: Seja f uma função com domínio D. Então f(c) é:

a) **máximo absoluto** (ou global) de f em D se e somente se $f(x) \le f(c)$ qualquer que seja x em D.

b) **mínimo absoluto** (ou global) de f em D se e somente se $f(x) \ge f(c)$ qualquer que seja x em D.

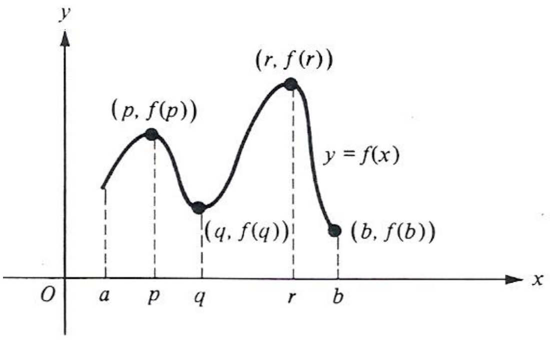


Figura 1

Máximos e mínimos absolutos também são chamados de **extremos absolutos** (ou globais). Geralmente omitimos os termos "absoluto" e "global", dizendo apenas máximo e mínimo.

Observe que a função f representada na figura 1 possui em [a, b] máximo absoluto quando x = r e mínimo absoluto quando x = b.

Funções definidas pela mesma regra podem ter extremos diferentes, dependendo do intervalo.

Seja $f(x) = x^2$. Vemos nos gráficos esboçados ao lado que:

(a) no intervalo $(-\infty, \infty)$ não existe máximo absoluto de f e existe mínimo absoluto quando x = 0.

(b) no intervalo [0, 2] existe máximo absoluto de f quando x = 2 e mínimo absoluto quando x = 0.

(c) no intervalo (0, 2] existe máximo absoluto de f quando x = 2 e não existe mínimo absoluto.

(d) no intervalo (0,2) não existem extremos absolutos.

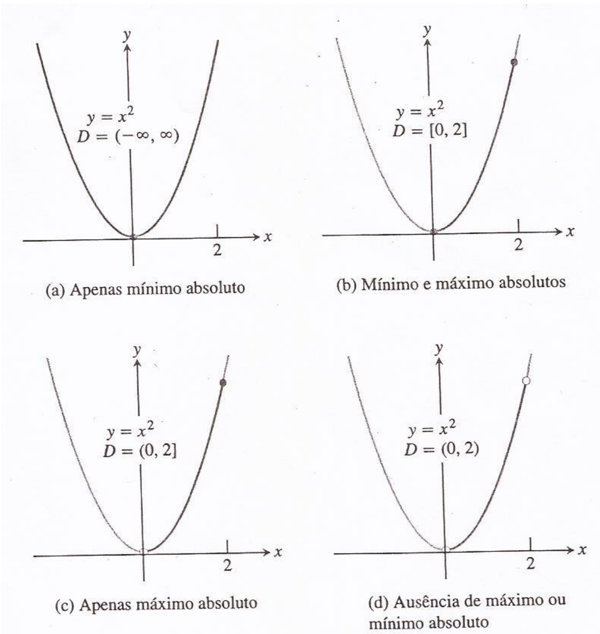


Figura 2

No exemplo anterior, vimos que uma função contínua pode não possuir extremos absolutos em um intervalo I. Porém se a função contínua é definida em um intervalo fechado e limitado então estes valores sempre existem.

Teorema: Se f é contínua em [a, b] então existem x_1 e x_2 em [a, b] tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em [a, b] (ou seja, $f(x_1)$ é mínimo absoluto de f em [a, b] e $f(x_2)$ é máximo absoluto de f em [a, b]).

Mesmo dentro de um intervalo, os extremos podem ocorrer "localmente". Na figura 1 anterior, temos em x = p e em x = r "máximos locais" e em x = q um "mínimo local".

Definição:

a) Uma função f tem um **máximo local** (ou relativo) em x = c se existe um intervalo aberto (a, b) contendo c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x em (a, b).

b) Uma função f tem um **mínimo local** (ou relativo) em x = c se existe um intervalo aberto (a, b) contendo c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo x em (a, b).

Máximos e mínimos locais também são chamados de **extremos locais** (ou relativos).

Podemos encontrar os extremos relativos calculando a derivada e determinando onde a derivada se anula e os pontos onde a derivada não existe. Esses pontos são chamados de pontos críticos.

Definição: Um **ponto crítico** de uma função f é qualquer ponto c do domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Para encontrar todos os extremos locais de uma função f, começamos achando todos os pontos críticos (que são os "candidatos" a extremos locais). Cada ponto crítico deve ser testado para verificar se é realmente um extremo local. Esse teste pode ser feito usando a derivada primeira de f.

Teste da derivada primeira para extremos locais

Seja c um ponto crítico de f(x)

a) Se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c então f tem um máximo local em x = c.

b) Se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c então f tem um mínimo local em x = c.

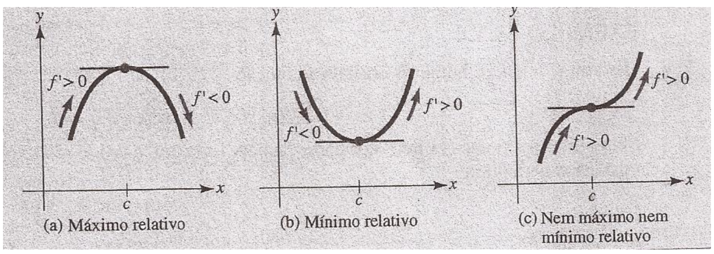


Figura 3

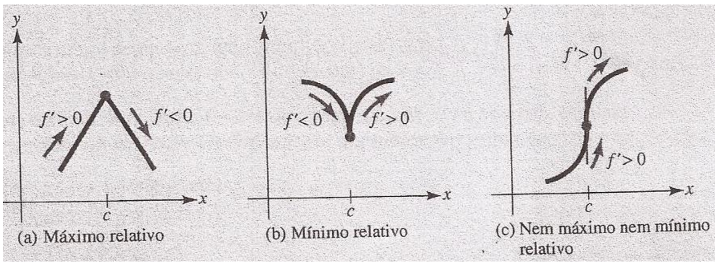
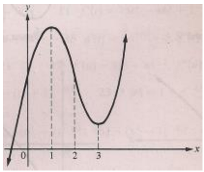


Figura 4

Exemplo: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$



Então $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Logo $f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Como $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ e para $x > 1$ temos pelo teste da derivada primeira que f possui um máximo local em $x = 1$.

Como $f'(x) < 0$ para $x < 3$ e $f'(x) > 0$ e para $x > 3$ temos pelo teste da derivada primeira, que f possui um mínimo local em $x = 3$.

A derivada segunda também pode ser usada para classificar os pontos críticos de uma função como máximos ou mínimos locais. Para isso, basta aplicar o resultado conhecido como:

Teste da derivada segunda para extremos relativos:

Suponhamos que $f'(c) = 0$

a) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo local em $x = c$.

b) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo local em $x = c$.

Exemplo: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

Temos que $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$ é igual a zero em $x = -2$ e em $x = 1$ que são os pontos críticos de f. Para testar esses pontos, calculamos $f''(x) = 12x + 6$ e determinamos seu valor em $x = -2$ e em $x = 1$. Então, como $f''(-2) = -18$, f tem um máximo local em $x = -2$; como $f''(1) = 18$, f tem um mínimo local em $x = 1$.

Observação: Embora tenha sido fácil usar o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos no exemplo anterior, ele apresenta algumas limitações. O teste se aplica aos pontos críticos nos quais a derivada primeira é nula, mas não aos pontos em que a derivada primeira não existe. Além disso, se tanto $f'(c)$ como $f''(c)$ são nulas, o teste da derivada segunda não permite chegar a nenhuma conclusão.

Notamos nas figuras 3 e 4, que se f tem um extremo local em $x = c$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Assim, um extremo absoluto de uma função contínua f num intervalo fechado e limitado

I ocorre em pontos interiores onde a derivada é zero ou em pontos interiores onde a derivada f ′ não existe ou nas extremidades do intervalo I.

Para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua f em [a, b] devemos:

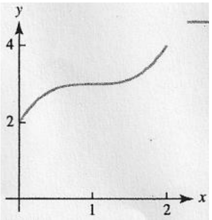
1 – Achar todos os pontos críticos c de f em (a, b).

2 – Calcular todos os valores f(c) para os pontos críticos do passo 1 e determinar f(a) e f(b).

3 – Selecionar o maior e o menor dos valores do passo 2. Esses são, respectivamente, os valores de máximo e mínimo absolutos de f em [a, b].

Exemplos:

1) Determine os extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ em [0, 2]



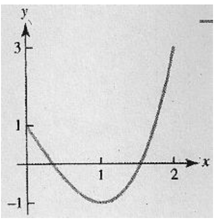
Solução: Temos que $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$.

Para $3(x - 1)^2 = 0$ temos x = 1

Calculamos, então, f(1) = 3, f(0) = 2 e f(2) = 4

Comparando esses resultados, concluímos que f tem um máximo absoluto em x = 2 e um mínimo absoluto em x = 0.

2) Determine os extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ em [0, 2].

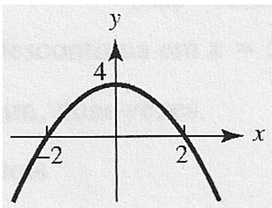


Solução: Nesse caso, $f'(x) = 3x^2 - 3$. Para $3x^2 - 3 = 0$ temos $x = \pm 1$.

Entretanto, apenas x = 1 pertence ao intervalo [0, 2]. Calculamos, então, f(1) = –1, f(0) = 1 e f(2) = 3

Logo, no intervalo [0, 2], f tem um máximo absoluto em x = 2 e um mínimo absoluto em x = 1.

3) Determine os extremos absolutos de $f(x) = 4 - x^2$ no intervalo [–2, 2]



Solução: Temos que $f'(x) = -2x$. Para $-2x = 0$ temos x = 0.

Calculamos f(0) = 4, f(–2) = 0 e f(2) = 0

Então f tem um máximo absoluto em x = 0 e assume em [–2, 2], o valor mínimo zero duas vezes, ou seja, em x = – 2 e em x = 2. Isso significa que é possível um mínimo (máximo) absoluto ocorrer em dois ou mais pontos do intervalo.

Podemos resolver, agora, o problema dado no início desta seção.

Solução: Temos que $E(t) = \frac{1}{27}(9t + 3t^2 - t^3)$ em [0, 5].

Então $E'(t) = \frac{1}{27}(9 + 6t - 3t^2)$

Para $E'(t) = 0$ temos $t = 3$ ou $t = -1$, mas apenas $t = 3$ pertence ao intervalo $[0, 5]$.

Calculamos, então, $E(0) = 0$, $E(3) = 1$ e $E(5) = -\frac{5}{27}$

Comparando esses resultados, concluímos que E tem um máximo absoluto em $t = 3$, isto é, a eficácia do remédio é máxima, 3 horas após ter sido tomado.

Quando o intervalo no qual desejamos analisar a existência de extremos absolutos de uma função contínua não é fechado e limitado, o método descrito anteriormente não é adequado, pois não há garantia de existência desses extremos. Para fazer esta análise necessitamos do seguinte resultado:

Teorema (do único ponto crítico): Seja f uma função contínua no intervalo I e seja c um ponto interior a I. Se c é o único extremo local de f em I então c será o máximo de f em I se c for um máximo local em I ou será o mínimo de f em I se c for um mínimo local em I.

Então, para encontrar, caso existam, os extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo I qualquer, devemos:

Determinar os pontos críticos no interior de I.

– Se houver um único ponto crítico então este será um extremo local. Testa-se para ver se é máximo ou mínimo. Se for máximo local, será o máximo absoluto. Neste caso, a função não possui mínimo absoluto no interior do intervalo. Mas pode assumir um mínimo absoluto em algum extremo do intervalo. É preciso analisar o comportamento da função perto destes extremos. Usamos o mesmo raciocínio caso o extremo local seja um mínimo local.

– Se não houver pontos críticos no interior de I, não haverá máximo e mínimo no interior de I. Nesse caso, se existirem extremos, estes ocorrerão nos extremos de I. Saberemos analisando o comportamento da função em I.

– Se existir mais de um ponto crítico no interior de I, calculamos o valor da função nos pontos críticos e nos eventuais extremos do intervalo. Comparamos os resultados para determinar o máximo e o mínimo.

Exemplo: A concentração de um fármaco no sangue, após sua administração, em uma única dose, é dada por $C(t) = \frac{10t}{t^2 + 2t + 1}$, $t \geq 0$, onde t é o tempo em horas. Determine em que instante a concentração da substância no sangue será máxima.

Solução: Temos que $C'(t) = \frac{10(t^2 + 2t + 1) - 10t(2t + 2)}{(t^2 + 2t + 1)^2} = \frac{10t^2 + 20t + 10 - 20t^2 - 20t}{(t^2 + 2t + 1)^2} =$

$$= \frac{-10t^2 + 10}{(t^2 + 2t + 1)^2} = \frac{-10(t^2 - 1)}{((t+1)^2)^2} = \frac{-10(t+1)(t-1)}{(t+1)^4} = \frac{-10(t-1)}{(t+1)^3}$$

Assim temos $C'(t) = 0 \leftrightarrow t = 1$

Logo $t = 1$ é o **único ponto crítico** de C no intervalo $(0, \infty)$.

Como para $t < 1$ temos $C'(t) > 0$ e para $t > 1$ temos $C'(t) < 0$, pelo teste da derivada primeira, C possui um máximo local em $t = 1$ e, portanto, em $t = 1$ temos o máximo absoluto de C no intervalo $[0, \infty)$.

Assim, a concentração do fármaco será máxima uma hora após a sua administração.

Exercícios – lista 9

Nas questões de 1 a 5, determine os extremos absolutos (classificando-os) nos intervalos dados:

1) $f(x) = 2x^3 – 3x^2 + 1$ em $[–1, 2]$

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ em $[– 4, 0]$

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 12x – 7$ em $[– 3, 0]$

4) $f(x) = x^3 – 3x^2 + 1$ em $[–2, 3]$

5) Estima-se que uma colônia de bactérias tenha t horas após a introdução de uma toxina, uma população de $p(t) = – t^2 + 2t + 15$ (em milhares de indivíduos). Use o Cálculo para determinar o tempo no qual a população está no seu ponto máximo e calcule a população neste ponto.

6) A capacidade aeróbica de um indivíduo é dada por $A(x) = 110\dfrac{(\ln x - 2)}{x}$ para $x \geq 10$. Em que idade a sua capacidade aeróbica é máxima?

7) Uma equipe de médicos está estudando a capacidade do corpo humano de metabolizar um novo medicamento usado para preparar os pacientes para cirurgias cardíacas. Injetando doses conhecidas nos voluntários e colhendo amostras de sangue a cada 30 minutos para análise, a equipe concluiu que a concentração da substância na corrente sanguínea t horas após a injeção é dada pela função $C(t) = \dfrac{3t}{t^2 + 4}$ e que o remédio será mais eficaz se atingir a concentração máxima no momento de começar a cirurgia. Quantas horas antes da operação o remédio deve ser administrado?

8) A população (em milhares de indivíduos) de uma colônia de bactérias é dada por $f(t) = \dfrac{24t + 10}{t^2 + 1}$ t horas após a introdução de uma toxina. Determine o instante em que a população é máxima e a população nesse instante.

9) Suponha que o percentual de álcool no sangue, t horas após o seu consumo, seja dado pela função $f(t) = 0{,}2t\,e^{-t/2}$. Determine o nível máximo de álcool no sangue e quando ele ocorre.

Respostas:

1) máximo absoluto em $x = 2$ e mínimo absoluto em $x = –1$.

2) máximos absolutos em $x = –3$ e em $x = 0$ e mínimos absolutos em $x = –1$ e em $x = – 4$

3) máximo absoluto em $x = – 2$ e mínimo absoluto em $x = 0$

4) máximo absoluto em $x = 0$ e em $x = 3$ e mínimo absoluto em $x = – 2$

5) t = 1h; 16.000 bactérias

6) Aproximadamente 20 anos

7) Duas horas antes da operação

8) t = 0,67 h (40 min); 18.000 bactérias

9) Aproximadamente 15 % e duas horas após o consumo

Capítulo 4 – Funções de duas variáveis

Trabalhamos até agora exclusivamente com funções reais de uma variável real, mas sabemos que existem situações práticas nas quais a função depende de duas (ou mais) variáveis. Por exemplo: de modo geral, a concentração C de uma droga no sangue é função de duas variáveis: a quantidade da droga ministrada na injeção e o tempo desde que a injeção foi aplicada.

Neste capítulo introduziremos as ideias básicas do Cálculo para funções de mais de uma variável. Apresentaremos inicialmente, a definição e vários exemplos de **funções de duas** (ou mais) **variáveis**. A seguir, as definições e regras desenvolvidas anteriormente para derivar funções de uma variável serão utilizadas para calcular as "**derivadas parciais**". Finalmente, estudaremos **problemas de máximos e mínimos** (com e sem restrição) de funções de duas variáveis.

4.1 – Funções de duas variáveis

Definição: Uma **função real f de duas variáveis** é uma relação que, a cada par ordenado (x, y) de números reais pertencente a um dado conjunto D, associa um único número real z, indicado por f(x, y).

O conjunto D é chamado de **domínio** da função e o número z = f(x, y) é chamado de **imagem** ou **valor** de (x, y) por f.

Na equação z = f(x, y) chamamos z de variável dependente e x e y de variáveis independentes.

Em geral, utilizamos apenas uma expressão em x e y para especificar f(x, y). Nesse caso, fica subentendido que o domínio da função f é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais para os quais a expressão é válida.

Exemplos:

1) Seja $f(x, y) = x + xy + y^2 + 2$. Determine o domínio de f e f(2, –1)

Solução: O domínio de f é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais.

$f(2, -1) = 2 - 2 + 1 + 2 = 3$

2) Dada a função $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 5y}{x - y}$, determine o domínio de f e f(1, –2)

Solução: A expressão da função dada é válida para qualquer par ordenado (x, y) tal que $x - y \neq 0$ ou $x \neq y$. Logo, o domínio de f é formado pelos pares ordenados de números reais (x, y) tais que $x \neq y$.

$f(1, -2) = \dfrac{3 - 10}{1 + 2} = -\dfrac{7}{3}$

3) Dada a função $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, determine o domínio de f, f(2, –1).

Solução: Nesse caso, devemos ter x – y ≥ 0 ou x ≥ y. Assim, o domínio de f é constituído pelos pares ordenados (x, y) de números reais tais que x ≥ y e f(2, –1) = $\sqrt{2-(-1)}$ = $\sqrt{3}$

4) Seja $f(x, y) = xe^y + \ln x$. Determine o domínio de f e calcule f(1, 0) e f(2, 2).

Solução: A expressão xe^y é definida para todos os números reais x e y e ln x é definido apenas para x > 0, então o domínio de f é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais tais que x > 0. Temos que $f(1, 0) = 1.e^0 + \ln 1 = 1$ e $f(2, 2) = 2e^2 + \ln 2 \cong 15,5$

5) O Quociente de Inteligência (QI) de uma pessoa é dado pela função f(m, a) = $\frac{100m}{a}$ onde m é a idade mental e a é a idade cronológica. Calcule: a) f(12, 11); b) f(16, 17)

Solução: a) f(12, 11) = $\frac{1200}{11} \cong 109{,}1$ b) f(16, 17) = $\frac{1600}{17} \cong 94{,}12$

Observação: Funções de três ou mais variáveis são definidas por uma extensão da definição de função de duas variáveis.

Exemplo: f(x, y, z) = xy + xz + yz

4.2 – Derivadas parciais

Em muitos problemas que envolvem funções de duas variáveis, o objetivo é determinar a taxa de variação de uma função em relação a uma das variáveis enquanto a outra é mantida constante. Vamos supor, por exemplo, que a concentração C = f(x, t) de uma droga no sangue é função da quantidade x de droga injetada e do tempo t desde que a droga foi injetada. Se t permanece constante, a taxa de variação de C em relação a x descreve a concentração da droga no sangue em função da quantidade injetada. Se x permanece constante, a taxa de variação de C em relação a t descreve a concentração da droga no sangue em função do tempo.

Dada uma função de duas variáveis z = f(x, y), suponha que o valor de y seja mantido constante e o valor de x varie livremente. Nesse caso, f se torna função apenas de x e podemos calcular a sua derivada da forma usual. Esta derivada é chamada de **derivada parcial de f em relação a x** e representada por

$$f_x \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}$$

Assim, por exemplo, se $f(x, y) = x^2y^3 + y$ e se fizermos y = 2, vamos obter $f(x, 2) = x^2 2^3 + 2$ ou $f(x, 2) = 8x^2 + 2$. Esta função depende apenas da variável x e sua derivada é a derivada parcial de f em relação a x. Então

$$f_x(x, 2) = 2.8x + 0 = 16x$$

Se substituirmos o valor 2 de y por outra constante y_0, a função $f(x, y_0)$ também será uma função apenas de x. Nesse caso, teremos $f(x, y_0) = x^2 y_0^3 + y_0$ e a derivada parcial de f em relação a x será

$$f_x(x, y_0) = 2x\,y_0^3$$

Na verdade, é possível pensar em y como uma grandeza constante sem necessidade de usar uma notação especial para indicar este fato. Podemos simplesmente escrever:

$$f_x(x, y) = 2xy^3$$

o que significa que mantivemos y constante e calculamos a derivada de f como se fosse função apenas de x.

Analogamente, se mantivermos x fixo e permitirmos que y varie, teremos uma função apenas da variável y. Neste caso, a derivada é chamada de **derivada parcial de f em relação a y** e representada por

$$f_y \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial y}$$

Para o exemplo dado temos: $f_y(x, y) = x^2 3y^2 + 1 = 3x^2y^2 + 1$

Podemos obter uma definição formal para a derivada parcial usando uma expressão análoga à que define a derivada para funções de uma variável.

Definição: Seja f uma função real de duas variáveis reais x e y.

A **derivada parcial de f em relação a x** é a função tal que

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ se o limite existir}$$

A **derivada parcial de f em relação a y** é a função tal que

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ se o limite existir}$$

Observação: Na prática, para achar f_x consideramos y como constante e derivamos f em relação a x utilizando as regras de derivação para funções de uma variável; para achar f_y consideramos x como constante e derivamos f em relação a y.

Exemplos: Calcule as derivadas parciais:

1) $f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$

$f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + 7$ e $f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy - 8$

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4xy^2 + 6y}$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4xy^2 + 6y)^{-½}(2x + 4y^2) = (x^2 + 4xy^2 + 6y)^{-½}(x + 2y^2) = \frac{x + 2y^2}{\sqrt{x^2 + 4xy^2 + 6y}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4xy^2 + 6y)^{-½}(8xy + 6) = (x^2 + 4xy^2 + 6y)^{-½}(4xy + 3) = \frac{4xy + 3}{\sqrt{x^2 + 4xy^2 + 6y}}$$

3) $z = \ln(5x^2 + 4y^3)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{10x}{5x^2 + 4y^3} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{12y^2}{5x^2 + 4y^3}$$

4) $f(x, y) = x^2 . e^{xy}$

$f_x(x, y) = 2x\, e^{xy} + x^2 y\, e^{xy}$ e $f_y(x, y) = x^3\, e^{xy}$

5) $z = \dfrac{4x}{y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4}{y^2} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4x.2y}{y^4} = \frac{-8x}{y^3}$$

6) $f(x, y) = \dfrac{3x + y^2}{x + 2y}$

$$f_x(x, y) = \frac{3(x+2y) - (3x + y^2).1}{(x+2y)^2} = \frac{3x + 6y - 3x - y^2}{(x+2y)^2} = \frac{6y - y^2}{(x+2y)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y(x+2y) - (3x + y^2).2}{(x+2y)^2} = \frac{2xy + 4y^2 - 6x - 2y^2}{(x+2y)^2} = \frac{2xy + 2y^2 - 6x}{(x+2y)^2}$$

7) A concentração C de bactérias no sangue (em milhões de bactérias/ml) após uma injeção de antibiótico é função da dose injetada x (em gramas) e do tempo t (em horas) desde a injeção. Suponha que $C = f(x, t) = te^{-xt}$. Determine $f_x(1, 2)$ e $f_t(1, 2)$.

Solução: Sabemos que $f_x(x, y) = -t^2 e^{-xt}$ e $f_t(x, y) = e^{-xt} - xte^{-xt}$

$f_x(1, 2) = -4e^{-2} = -0{,}54$ (significa que há um decréscimo de 0,54 milhões de bactérias /ml por grama de antibiótico).

$f_t(1, 2) = e^{-2} - 2e^{-2} = -0{,}14$ (significa que há decréscimo de 0,14 milhões de bactérias /ml por hora).

Outros exemplos: Calcule as derivadas parciais:

1) $f(x, y) = 6x^2 + 5y^3 + 10xy - 2x$

2) $f(x, y) = e^{xy^5}$

3) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \dfrac{2y^2}{3x}$

4) $f(x, y) = \dfrac{y - x}{x + y}$

Respostas:

1) $f_x(x, y) = 12x + 10y - 2$ $\qquad f_y(x, y) = 15y^2 + 10x$

2) $f_x(x, y) = y^5 e^{xy^5}$ $f_y(x, y) = 5xy^4 e^{xy^5}$

3) $f_x(x, y) = 2x + 2y^2 - \dfrac{2y^2}{3x^2}$ $f_y(x, y) = 4xy + \dfrac{4y}{3x}$

4) $f_x(x, y) = \dfrac{-2y}{(x+y)^2}$ $f_y(x, y) = \dfrac{2x}{(x+y)^2}$

Observação: As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de mais de duas variáveis. Assim, por exemplo, se w = f(x, y, z), mantendo x e y fixos e deixando z variar obtemos a derivada parcial f_z.

Exemplo: Seja $f(x, y, z) = xy^2z^3 - 5x + 4y^2 + 7$.

Então $f_x(x, y, z) = y^2z^3 - 5$; $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + 8y$ e $f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$

Como as funções de uma variável, as funções de duas (ou mais) variáveis podem ser derivadas mais de uma vez. Vamos considerar, por exemplo, a função $f(x, y) = 3x^2y^3 + 2x^2 - 5y^2$. Suas derivadas parciais são $f_x(x, y) = 6xy^3 + 4x$ e $f_y(x, y) = 9x^2y^2 - 10y$. Essas derivadas também são funções de duas variáveis e podemos, portanto, calcular suas derivadas parciais. São elas:

$(f_x)_x(x, y) = 6y^3 + 4$ e $(f_x)_y(x, y) = 18xy^2$

$(f_y)_x(x, y) = 18xy^2$ e $(f_y)_y(x, y) = 18x^2y - 10$

Essas quatro funções são chamadas de **derivadas parciais de segunda ordem** da função f.

Por simplicidade, omitimos os parênteses e representamos as derivadas parciais de segunda ordem de uma função f de duas variáveis da seguinte maneira:

$f_{xx} \rightarrow$ derivada parcial de f_x em relação a x

$f_{xy} \rightarrow$ derivada parcial de f_x em relação a y

$f_{yx} \rightarrow$ derivada parcial de f_y em relação a x

$f_{yy} \rightarrow$ derivada parcial de f_y em relação a y

Exemplo: Seja $f(x, y) = \ln y + ye^{2x}$. Determine f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy}

Solução: Como $f_x(x, y) = 2ye^{2x}$ e $f_y(x, y) = \dfrac{1}{y} + e^{2x}$ temos que:

$f_{xx}(x, y) = 4ye^{2x}$ $f_{xy}(x, y) = 2e^{2x}$ $f_{yx}(x, y) = 2e^{2x}$ $f_{yy}(x, y) = \dfrac{-1}{y^2}$

Observação: As derivadas parciais de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} são chamadas de **derivadas mistas** de segunda ordem de f. Se f_{xy} existe e é contínua em um intervalo aberto I, então f_{yx} existe em I e $f_{xy} = f_{yx}$

Exercícios – lista 10

Nos questões de 1 a 10, calcule as derivadas parciais em relação à x e em relação à y:

1) $f(x,y) = 2xy^5 + 3x^2y + x^2$

2) $f(x,y) = 5x^2y + 2xy^3 + 3y^2$

3) $f(x,y) = (3x + 2y)^5$

4) $f(x,y) = (x + xy + y)^3$

5) $f(x,y) = \dfrac{3x}{2y}$

6) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^3}$

7) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y}{y-x}$

8) $f(x,y) = \dfrac{2y^2}{3x+1}$

9) $f(x,y) = xye^{3x}$

10) $f(x,y) = x\ln y$

Nas questões de 11 a 14, determine: a) $f_{xx}(x, y)$ b) $f_{xy}(x, y)$ c) $f_{yx}(x, y)$ d) $f_{yy}(x, y)$

11) $f(x, y) = 6x^2 + 7xy + 5y^2$

13) $f(x, y) = x^2y + xy^{-2}$

12) $f(x, y) = \dfrac{2y}{x^2}$

14) $f(x, y) = e^x \ln y$

15) Uma medida da sensação de calor é o chamado **índice de temperatura aparente** dado pela equação

$$A(t, h) = 0{,}885t - 22{,}4h + 1{,}20th - 0{,}544$$

onde A é a temperatura aparente em graus Celsius, t é a temperatura do ar em graus Celsius e h é a umidade relativa do ar em forma decimal.

a) Determine $\dfrac{\partial A}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial A}{\partial h}$

b) Use o resultado do item (a) para determinar as taxas de variação da temperatura aparente em relação à temperatura do ar e em relação à umidade quando a temperatura ambiente é 32 º C e a umidade relativa do ar é de 80 %.

16) A capacidade vital V dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino com x anos de idade e y centímetros de altura, V pode ser aproximado pela fórmula

$$V = 27{,}63y - 0{,}112xy$$

Calcule $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ e interprete os resultados.

Respostas:

1) $f_x(x, y) = 2y^5 + 6xy + 2x$ $\qquad$ $f_y(x, y) = 10xy^4 + 3x^2$

2) $f_x(x, y) = 10xy + 2y^3$ $\qquad$ $f_y(x, y) = 5x^2 + 6xy^2 + 6y$

3) $f_x(x, y) = 15(3x + 2y)^4$ $\qquad$ $f_y(x, y) = 10(3x + 2y)^4$

4) $f_x(x, y) = 3(x + xy + y)^2(1 + y)$ $\qquad$ $f_y(x, y) = 3(x + xy + y)^2(x + 1)$

5) $f_x(x, y) = \dfrac{3}{2y}$ $\qquad$ $f_y(x, y) = \dfrac{-3x}{2y^2}$

6) $f_x(x, y) = \dfrac{-3y^2}{x^4}$ $\qquad$ $f_y(x, y) = \dfrac{2y}{x^3}$

7) $f_x(x, y) = \dfrac{5y}{(y-x)^2}$ $\qquad$ $f_y(x, y) = \dfrac{-5x}{(y-x)^2}$

8) $f_x(x, y) = \dfrac{-6y^2}{(3x+1)^2}$ $\qquad$ $f_y(x, y) = \dfrac{4y}{3x+1}$

9) $f_x(x, y) = ye^{3x}(1 + 3x)$ $\qquad$ $f_y(x, y) = xe^{3x}$

10) $f_x(x, y) = \ln y$ $\qquad$ $f_y(x, y) = \dfrac{x}{y}$

11) a) 12 $\qquad$ b) 7 $\qquad$ c) 7 $\qquad$ d) 10

12) a) $\dfrac{12y}{x^4}$ $\qquad$ b) $\dfrac{-4}{x^3}$ $\qquad$ c) $\dfrac{-4}{x^3}$ $\qquad$ d) 0

13) a) $2y$ $\qquad$ b) $2x - 2y^{-3}$ $\qquad$ c) $2x - 2y^{-3}$ $\qquad$ d) $6xy^{-4}$

14) a) $e^x \ln y$ $\qquad$ b) $\dfrac{e^x}{y}$ $\qquad$ c) $\dfrac{e^x}{y}$ $\qquad$ d) $\dfrac{-e^x}{y^2}$

15) a) $\dfrac{\partial A}{\partial t} = 0{,}885 + 1{,}20\,h$ e $\dfrac{\partial A}{\partial h} = -22{,}4 + 1{,}20t$

b) $\dfrac{\partial A}{\partial t}(32; 0{,}8) = 1{,}845$ e $\dfrac{\partial A}{\partial h}(32; 0{,}8) = 16{,}0$

16) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -0{,}112y$ cm/ano é a taxa na qual a capacidade pulmonar decresce com a idade para um homem adulto

$\dfrac{\partial V}{\partial y} = 27{,}63 - 0{,}112x$ cm/ano. É difícil de interpretar, já que encaramos a altura y de um adulto como fixa em lugar de como função da idade x.

4.3 – Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Sabemos que a derivada é uma ferramenta indispensável à resolução de problemas onde figurem extremos de funções de uma variável. Nesta seção estudaremos como determinar valores de máximos e mínimos de funções de duas variáveis e veremos que as derivadas parciais são úteis para esse fim.

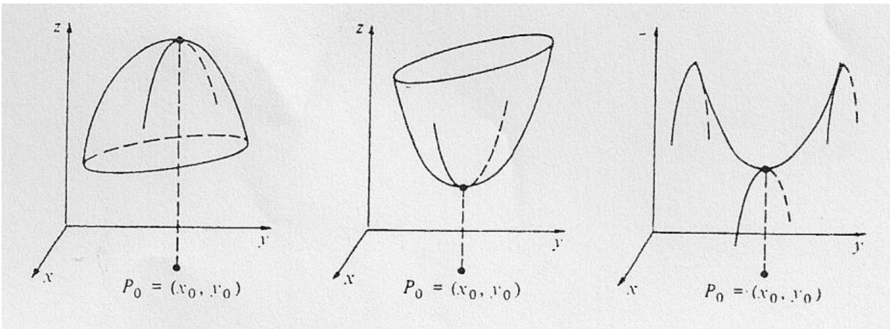
Definição: Seja f uma função de duas variáveis.

a) Dizemos que f possui um **máximo relativo** em (x_0, y_0), se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para qualquer ponto (x, y) na vizinhança de (x_0, y_0).

b) Dizemos que f possui um **mínimo relativo** em (x_0, y_0), se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para qualquer ponto (x, y) na vizinhança de (x_0, y_0).

c) Dizemos que f possui um **extremo relativo** em (x_0, y_0) se f possui um máximo relativo ou um mínimo relativo em (x_0, y_0).

Na figura à esquerda, (x_0, y_0) é um máximo relativo e no centro da figura, (x_0, y_0) é um mínimo relativo.



Suponha que f tenha um extremo relativo no ponto (x_0, y_0). Nesse caso, mantendo y fixo com o valor y_0 e deixando x variar, obtemos uma função de uma variável $f(x, y_0)$ com um extremo relativo em x_0. De acordo com o teste da derivada primeira para máximos e mínimos relativos de funções de uma variável, a derivada desta função deve se anular em x_0, isto é, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

Da mesma forma, mantendo x fixo com o valor x_0 e deixando y variar, obtemos uma função de uma variável $f(x_0, y)$ com um extremo relativo em y_0. Como a derivada desta função deve se anular em y_0, temos que $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Essas considerações nos levam a formular o seguinte teorema que estabelece a condição necessária para uma função de duas variáveis f ter um extremo relativo.

Teorema: Se f possui um extremo relativo em (x_0, y_0) então $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

As soluções deste sistema de equações recebem o nome de **pontos críticos** de f.

O ponto crítico que não é extremo relativo é chamado de **ponto de sela**. O ponto (x_0, y_0) à direita da figura anterior corresponde a um ponto de sela.

Vamos apresentar a seguir um teorema baseado nas derivadas parciais de segunda ordem, fundamental para determinar se um ponto crítico é um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela.

Teorema: (teste da derivada segunda)

Seja f uma função de duas variáveis e seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f.
Seja $D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0).f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$

a) Se $D(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ então f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0).
b) Se $D(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ então f tem um máximo relativo em (x_0, y_0).
c) Se $D(x_0, y_0) < 0$ então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0).
d) Se $D(x_0, y_0) = 0$ então não é possível chegar a nenhuma conclusão: (x_0, y_0) pode ser um extremo relativo ou um ponto de sela.

As conclusões do teorema anterior estão resumidas na tabela abaixo.

Sinal de $D(x_0, y_0)$	Sinal de $f_{xx}(x_0, y_0)$	Comportamento no ponto (x_0, y_0)
+	+	Mínimo relativo
+	–	Máximo relativo
–		Ponto de sela

Exemplo 1: Seja $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$

Solução: Começamos calculando as derivadas parciais e construindo o sistema:

$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$ e $f_y(x, y) = 6xy - 6y$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos quatro pontos críticos: (1, 1), (1, –1), (0, 0) e (2, 0).

Para testar estes pontos precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem:

$f_{xx}(x, y) = 6x - 6$ $f_{xy}(x, y) = 6y$ $f_{yy}(x, y) = 6x - 6$

Assim $D(x, y) = (6x - 6)(6x - 6) - (6y)^2 = (6x - 6)^2 - 36y^2$

O resultado da aplicação do teste da derivada segunda é o seguinte:

$D(1, 1) = -36 \Rightarrow (1, 1)$ é ponto de sela
$D(1, -1) = -36 \Rightarrow (1, -1)$ é ponto de sela
$D(0, 0) = 36$ e $f_{xx}(0, 0) = -6 \Rightarrow$ f tem um máximo relativo em (0, 0)
$D(2, 0) = 36$ e $f_{xx}(2, 0) = 6 \Rightarrow$ f tem um mínimo relativo em (2, 0)

Exemplo 2: Uma combinação de dois medicamentos está sendo testada no combate a certa infecção bacteriana. Os estudos mostraram que a duração da infecção em testes de laboratório pode ser modelada pela função $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120$ onde x é a dose do primeiro medicamento em centenas de mg e y é a dose do segundo medicamento em centenas de mg. Determine a dose de cada medicamento para que a duração da infecção seja mínima.

Solução: $f_x(x, y) = 2x - 18 + 2y$ e $f_y(x, y) = 4y - 24 + 2x$

$$\begin{cases} 2x - 18 + 2y = 0 \\ 4y - 24 + 2x = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos um ponto crítico: (6, 3).

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem temos:

$f_{xx}(x, y) = 2$ $f_{xy}(x, y) = 2$ $f_{yy}(x, y) = 4$

Então $D(x, y) = 8 - 4 = 4$

Logo $D(6, 3) = 4$ e $f_{xx}(6, 3) = 2 \Rightarrow$ f possui um mínimo relativo em (6, 3)

Portanto a dose de x deve ser 600 mg e a de y 300 mg.

Outros exemplos: Nos itens de 1 a 5 encontre os pontos críticos das funções dadas e classifique cada um deles como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela:

1) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y + x + 3$

2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2$

3) $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

4) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$

5) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2xy + y^2$

2) Certa doença pode ser tratada administrando pelo menos 70 unidades do medicamento C, mas este remédio pode produzir graves efeitos colaterais. Em busca de uma alternativa menos arriscada, um médico decide usar os medicamentos A e B, que não produzem efeitos colaterais se a dose combinada dos dois medicamentos for menor que 60 unidades. O médico sabe que, quando x unidades do medicamento A e y unidades do B são administradas a um paciente, o efeito é equivalente ao de administrar z unidades do medicamento C, onde

$$z = 0,05(xy - 2x^2 - y^2 + 95x + 20y)$$

a) Para que doses x e y o nível equivalente z do medicamento C é máximo?

b) Se o médico administrar doses adequadas de A e B, será possível tratar a doença sem efeitos colaterais?

Respostas:

1) (2, 5) é ponto de sela

2) (1, –2) é mínimo relativo

3) (0, 0) é ponto se sela e (–1, –1) é máximo relativo

4) (3, 1) é mínimo relativo, (–1, –1) é máximo relativo e (3, –1) e (–1, 1) são pontos de sela

5) (0, 0) é ponto de sela e (–1, 1) e (2, –2) são mínimos relativos

6) a) 30 unidades de A e 25 unidades de B, o que resulta em uma dose equivalente de z = 83,75 unidades (como é maior que 70, a combinação é eficaz).

b) Como o número total de unidades é 55 (que é menor que 60) não há risco de efeitos colaterais.

Observação: Se $D(x_0, y_0) = 0$, o teste da derivada segunda para funções de duas variáveis não é conclusivo e f pode ter um extremo relativo ou um ponto de sela em (x_0, y_0) e outros métodos precisam ser usados para determinar sua natureza.

Exemplo: $f(x, y) = x^4 + y^4$

Solução: Nesse caso $f_x(x, y) = 4x^3$ e $f_y(x, y) = 4y^3$

Então $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema encontramos um único ponto crítico: (0, 0)

As derivadas de segunda ordem são:

$f_{xx}(x, y) = 12x^2$ $\quad$ $f_{xy}(x, y) = 0$ $\quad$ $f_{yy}(x, y) = 12y^2$

Logo $D(x, y) = 144x^2y^2$ e $D(0, 0) = 0$

O teste da derivada segunda não permite chegar a nenhuma conclusão, mas como $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) > 0$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos concluir que f tem um mínimo relativo em (0, 0).

Exercícios – lista 11

Nas questões de 1 a 10 encontre os pontos críticos das funções dadas e classifique cada um deles como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela:

1) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

2) $f(x, y) = xy - x - y$

3) $f(x, y) = x^3y + 3x + y$

4) $f(x, y) = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 1$

5) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy^2 - 2$

6) $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$

7) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

8) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 32y + 4$

9) $f(x, y) = x^2y + 3xy - 3x^2 - 4x + 2y$

10) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

11) Uma combinação de dois medicamentos está sendo testada no combate a certa infecção. Os estudos mostraram que a duração (em dias) da infecção em testes de laboratório pode ser modelada pela função $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$ onde x é a dose em mg do primeiro medicamento e y é a dose em mg do segundo medicamento. Determine a dose de cada medicamento para que a duração da infecção seja mínima e a duração correspondente.

12) A eficácia do tratamento de uma doença depende da combinação de dois medicamentos A e B. A duração, em dias, do tratamento pode ser modelada pode ser modelada pela função

$$f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 2xy + 8x - 17$$

onde x é a dose em mg de A e y é a dose em mg de B. Para que doses de A e B a eficácia do tratamento é máxima? Qual é essa duração?

Respostas:

1) (0,1) é mínimo relativo

2) (1,1) é ponto de sela

3) (–1, –1) é ponto de sela

4) (–2,1) é máximo relativo

5) (0,0) é mínimo relativo e (1, –2) e (1,2) são pontos de sela

6) (0,0) é ponto de sela e (1, –1) é mínimo relativo

7) (0,0) é ponto de sela e (–1,2) e (4, –8) são mínimos relativos

8) (–3, –4) e (2,4) são pontos de sela, (–3,4) é máximo relativo e (2,– 4) é mínimo relativo

9) (–1, –2) e (–2,8) são pontos de sela

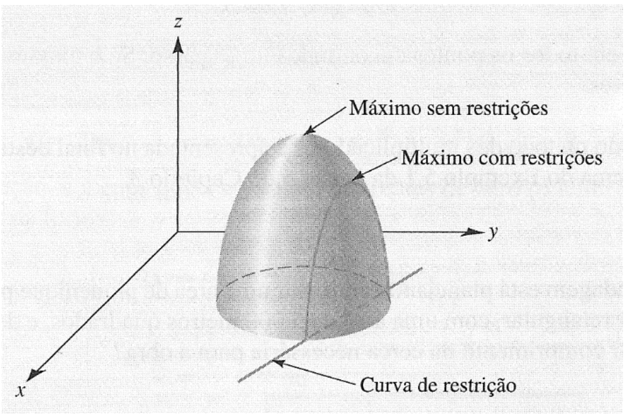
10) (–2,1) e (1, –1) são pontos de sela, (–2,–1) é máximo relativo e (1,1) é mínimo relativo

11) 2 mg do medicamento x e 1 mg do medicamento y; 6 dias

12) 6 mg de A e 2 mg de B; f(6, 2) = 7 (dias)

4.4 – Multiplicadores de Lagrange

Em termos matemáticos, um problema de **otimização com restrição** de duas variáveis é um problema no qual queremos maximizar (ou minimizar) uma função f cujas variáveis independentes x e y estão sujeitas a uma condição adicional na forma de uma equação $g(x, y) = k$, $k \in IR$, conhecida como **equação de restrição**.



Para visualizar o que significa o processo de otimização com restrição de uma função de duas variáveis x e y, podemos pensar na função como uma superfície no espaço tridimensional e na restrição como uma curva no plano xy.

Quando procuramos, por exemplo, o máximo de uma função sujeita a uma dada restrição, estamos limitando nossa busca à parte da superfície que está diretamente em cima da curva que representa a restrição. O ponto mais alto dessa parte da superfície é o máximo com a restrição.

Em alguns casos, a equação de restrição pode ser substituída na função a ser otimizada e o problema fica reduzido a outro envolvendo máximos e mínimos não sujeitos a restrições, sendo resolvido pelos métodos da seção precedente. Entretanto, este procedimento nem sempre é possível, como no caso em que a função a ser otimizada envolve mais de duas variáveis e várias restrições.

O método apresentado a seguir deve-se ao matemático francês Joseph Lagrange e é aplicável a todos os casos e pode ser generalizado para qualquer número de variáveis ou restrições.

O **método dos multiplicadores de Lagrange** se baseia no fato de que todo extremo relativo de uma função real f de duas variáveis x e y com uma restrição $g(x, y) = k$ ocorre em um ponto crítico da função (de Lagrange):

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k)$$

onde λ é uma nova variável (o multiplicador de Lagrange).

Para determinar os pontos críticos de F, calculamos suas derivadas parciais:

$F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y)$
$F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y)$
$F_\lambda(x, y, \lambda) = -(g(x, y) - k)$

E resolvemos o sistema de equações $\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$

Isto é, resolvemos $\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ -(g(x, y) - k) = 0 \end{cases}$

Ou ainda, $\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$

Os pontos (x_0, y_0) que fornecem os extremos de f com a restrição g(x, y) = k estão entre os pontos determinados pelas duas primeiras coordenadas desses pontos críticos.

Resumo do método dos multiplicadores de Lagrange
Os pontos onde uma função real f de duas variáveis tem extremos relativos sujeitos à restrição g(x, y) = k estão incluídos entre os pontos determinados pelas duas primeiras coordenadas das soluções (x_0, y_0, λ_0) do sistema $\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$

Uma desvantagem do método de Lagrange é que ele fornece somente os pontos críticos da função sem discriminar se é máximo, mínimo ou nenhum dos dois.

Existe uma versão do teste das derivadas parciais de segunda ordem que pode ser usada para determinar que tipo de extremo com restrição corresponde a cada ponto crítico (x_0, y_0), mas neste texto vamos supor que se f possui um máximo (ou mínimo) relativo com restrição em (x_0, y_0), ele será dado pelo maior (menor) dos valores de $f(x_0, y_0)$.

Exemplos:

1 – A função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ possui um valor mínimo com a restrição x + y = 6. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar esse mínimo.

Solução: Vamos supor que g(x, y) = x + y e que k = 6

Queremos encontrar o valor mínimo de f sujeita à restrição g(x, y) = k. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x = \lambda & (1) \\ 2y = \lambda & (2) \\ x + y = 6 & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2) obtemos $4x = 2y \therefore y = 2x$

Substituindo em (3) obtemos: $x + 2x = 6 \therefore 3x = 6 \therefore x = 2$

Logo, x = 2, y = 4 e $\lambda = 8$

Ou seja, (2, 4, 8) é a única solução do sistema. Assim o único valor extremo de f sujeita à restrição dada ocorre no ponto (2, 4). Portanto o valor mínimo desejado é f(2, 4) = 24

2 – A função $f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2$ possui um valor máximo com a condição $x + 2y = 2$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar esse máximo.

Solução: Vamos supor que $g(x, y) = x + 2y$ e que $k = 2$

Queremos encontrar o valor máximo de f sujeita à restrição $g(x, y) = k$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda & (1) \\ x - 6y = 2\lambda & (2) \\ x + 2y = 2 & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2) obtemos $x - 6y = 2(2x + y) \therefore x - 6y = 4x + 2y \therefore 3x = -8y \therefore x = -\frac{8}{3}y$

Substituindo em (3) obtemos:

$$-\frac{8}{3}y + 2y = 2 \therefore -8y + 6y = 6 - 8y - 2y = 6 \therefore y = -3$$

Logo, $x = 8$, $y = -3$ e $\lambda = 13$.

Ou seja, $(8, -3, 13)$ é a única solução do sistema. Assim o único valor extremo de f sujeita à restrição dada ocorre no ponto $(8, -3)$. Portanto o valor máximo desejado é $f(8, -3) = 13$.

3 – Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os valores de máximo e mínimo da função $f(x, y) = 42x + 28y$ com condição $xy = 600$.

Solução: Vamos supor que $g(x, y) = xy$ e que $k = 600$

Então $\begin{cases} 42 = \lambda y & (1) \\ 28 = \lambda x & (2) \\ xy = 600 & (3) \end{cases}$

Pela equação (3) sabemos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Logo em (1) podemos escrever $\lambda = \frac{42}{y}$ e em (2) podemos escrever $\lambda = \frac{28}{x}$

Daí temos: $\frac{42}{y} = \frac{28}{x} \therefore y = \frac{42x}{28} = \frac{3}{2}x$

Substituindo em (3) obtemos: $x\frac{3}{2}x = 600 \therefore x^2 = 400 \therefore x = \pm 20$

Assim, se $x = 20$ temos $y = 30$ e se $x = -20$ temos $y = -30$

Portanto os pontos críticos de f são $(20,30)$ e $(-20, -30)$

Além disso. f(20,30) = 1.680 e f(–20, –30) = – 1.680

Logo o valor máximo é 1.680 e o valor mínimo é – 1.680

4 – Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os valores máximos e mínimos da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 5$

Solução: Vamos supor que $g(x, y) = x^2 + y^2$ e que k = 5

Temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x = \lambda 2x & (1) \\ 2y + 2 = \lambda 2y & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Por (1) temos $4x - 2\lambda x = 0 \therefore 2x(2 - \lambda) = 0$

Então podemos ter 2x = 0 ou 2 – λ = 0. Ou seja: x = 0 ou λ = 2

Se x = 0 temos por (3) que $y = \pm\sqrt{5}$

Se λ = 2 temos por (2) que 2y + 2 = 4y. Portanto, neste caso, temos y = 1.

Substituindo este valor em (3) encontramos $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Assim os pontos críticos de f são: $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, (2, 1) e (– 2, 1).

Daí, $f(0, \sqrt{5}) = 5 + 2\sqrt{5} \cong 9{,}5$

$f(0, -\sqrt{5}) = 5 - 2\sqrt{5} \cong 0{,}5$

f(2, 1) = 11

f(– 2, 1) = 11

Logo, o valor máximo é 11 e o valor mínimo é 0,5

Exercícios – lista 12

1) Ache o valor máximo de $f(x, y) = 2x + 3y - x^2 - y^2$ sujeita à restrição $x + 2y = 9$

2) Ache o valor mínimo de $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ com a restrição $x + y = 15$

3) Ache o valor máximo de $f(x, y) = x + 5y - 2xy - x^2 - 2y^2$ com a restrição $2x + y = 4$

4) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar os pontos críticos de $f(x, y) = x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 5$

5) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar os pontos críticos de $f(x, y) = xy$ com a restrição $x^2 + y^2 = 8$

6) Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$ com a restrição $x^2 + y^2 = 4$

7) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar os pontos críticos de $f(x, y) = 6x - 8y$ sujeita à restrição $3x^2 + 4y^2 = 7$

8) Ache o valor mínimo da função $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4$ sujeita à restrição $3x + 5y = 47$.

Respostas:

1) $f(2, 7/2) = -\frac{7}{4}$

2) $f(8, 7) = -18$

3) $f(3/2, 1) = -\frac{3}{4}$

4) $(1, 2)$ e $(-1, -2)$

5) $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ e $(-2, -2)$

6) $(-2, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$

7) $(1, -1)$ e $(-1, 1)$

8) $f(4, 7) = 30$

Capítulo 5 – Integral de uma função real

No capítulo 3 estudamos várias regras para obter a derivada de uma função, mas em muitas aplicações conhecemos a derivada e precisamos encontrar a função. Neste capítulo vamos introduzir a "antiderivação" que inverte o processo de derivação. Vamos estudar também algumas técnicas usadas para determinar as "integrais indefinidas" e resolver problemas relacionados ao cálculo da área de regiões planas. O resultado principal estabelecido neste capítulo é o teorema fundamental do cálculo que mostra a relação entre derivadas e integrais.

5.1 – Antiderivada – Integral indefinida

Nos exemplos e problemas estudados no capítulo 3, começamos com uma função dada e calculamos a derivada para obter informações a respeito da função. Em muitas situações, no entanto, o problema é o inverso: conhecemos a derivada e estamos interessados em determinar a função. Isso acontece, por exemplo, quando sabemos a taxa com a qual uma população está aumentando e queremos calcular qual será a população em um determinado instante futuro. A função encontrada nesse problema é uma **antiderivada**.

Definição 1: Uma função g é uma **antiderivada** (ou primitiva) de uma função f em um intervalo I, se $g'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Se considerarmos, por exemplo, a função $f(x) = 3x^2$, é fácil verificar que $g(x) = x^3$ é uma antiderivada de f, pois $g'(x) = 3x^2$.

Portanto dizer que g é uma antiderivada de f equivale a dizer que f é a derivada de g, mas agora pensamos em f como a função dada e em g como a função a ser encontrada. O processo de encontrar uma antiderivada é conhecido como **antiderivação**.

A antiderivada de uma função não é única. De fato, as funções

$$g_1(x) = x^3 + 5 \qquad g_2(x) = x^3 - \sqrt{2} \qquad g_3(x) = x^3 + \frac{4}{7}$$

também são antiderivadas de $f(x) = 3x^2$, pois suas derivadas são iguais a f.

Note que qualquer função do tipo $h(x) = x^3 + C$ onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f.

Podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema: Seja g uma antiderivada de f em um intervalo I.

Se h é outra antiderivada de f em I então existe uma constante C tal que $h(x) = g(x) + C$ para todo x em I.

Assim, quando achamos uma antiderivada g de uma função f, encontramos uma infinidade de antiderivadas de f e todas da forma g + C onde C é uma constante.

Ao considerarmos todas as antiderivadas de uma dada função é conveniente introduzirmos uma nova terminologia e uma nova notação, como se segue.

Definição 2: A **integral indefinida** de f, indicada por $\int f(x)\, dx$, é a família de todas as antiderivadas de f. Assim, se g é uma antiderivada de f e C é uma constante arbitrária, então

$$\int f(x)\, dx = g(x) + C$$

Nessa definição f(x)dx é chamado de **integrando** e C de **constante de integração**.

Daremos razões, mais adiante, para o uso da diferencial dx que aparece no integrando. No momento vamos considerar que o símbolo dx indica que a antiderivada deve ser calculada em relação a variável x.

Para o exemplo dado escrevemos $\int 3x^2\, dx = x^3 + C$

Usando os resultados do capítulo 3, podemos obter as integrais indefinidas das principais funções que decorrem imediatamente das respectivas regras de derivação.

Regras básicas de antiderivação

1) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

2) Se a é um número real então $\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$

3) $\int dx = x + C$

4) Se $n \in Q$ e $n \neq -1$ então $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x| + C$

6) Se $k \in IR^*$ então $\int e^{kx}\, dx = \dfrac{1}{k} e^{kx} + C$

Observação: A regra 1 pode ser estendida a qualquer número finito de parcelas.

Exemplos:

1) $\int (x^2 + 5)\, dx = \int x^2\, dx + 5\int dx = \dfrac{x^3}{3} + C_1 + 5(x + C_2) = \dfrac{x^3}{3} + 5x + C$ onde $C = C_1 + 5C_2$

Na prática, quando as regras básicas são usadas para calcular integrais indefinidas, as constantes individuais de integração que aparecem podem ser combinadas em uma única constante. Assim, a solução acima pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\int (x^2 + 5)\, dx = \int x^2\, dx + 5\int dx = \frac{x^3}{3} + 5x + C$$

2) $\int \left(6x^3 - 7\sqrt{x} + \frac{5}{x^6}\right) dx = \int \left(6x^3 - 7x^{1/2} + 5x^{-6}\right) dx = 6\int x^3\, dx - 7\int x^{1/2}\, dx + 5\int x^{-6}\, dx =$

$= 6\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^{3/2}}{3/2} + 5\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{3x^4}{2} - \frac{14x^{3/2}}{3} - \frac{1}{x^5} + C$

3) $\int \frac{2x^7 + 5x^3 + 4x^2 - 6x}{2x^3}\, dx = \int \left(x^4 + \frac{5}{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx =$

$= \int x^4\, dx + \frac{5}{2}\int dx + 2\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-2}\, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5}{2}x + 2\ln|x| - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{5x}{2} + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$

4) $\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-1/2} dx - 5\int x^{2/3}\, dx =$

$= \frac{1}{2}\ln|x| + 3\frac{x^{1/2}}{1/2} - 5\frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{1}{2}\ln|x| + 6\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^5} + C$

Outros exemplos:

1) $\int (5x^4 + 2x^3 - 4x + 1)\, dx$

2) $\int (x^2 + 5)(8x - 3)\, dx$

3) $\int (3x + 2)^2\, dx$

4) $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2}\, dx$

5) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + 2}{x^2}\, dx$

6) $\int \left(\frac{7}{x} + 6\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right) dx$

Respostas:

1) $x^5 + \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + C$

2) $2x^4 - x^3 + 20x^2 - 15x + C$

3) $3x^3 + 6x^2 + 4x + C$

4) $\frac{x^2}{2} - 2x + C$

5) $x^3 + 5x - \frac{2}{x} + C$

6) $7\ln|x| + 4\sqrt{x^3} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

Exercícios - lista 13

Use as regras básicas para calcular as integrais abaixo:

1) $\int (3x^2 - 4x - 5)\ dx$

2) $\int (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)\ dx$

3) $\int (2x^3 - 4x^2 - 5x + 6)\ dx$

4) $\int (2x^3 - 1)(x^2 + 5)\ dx$

5) $\int (3x^2 - 5\sqrt{x} + 2)\ dx$

6) $\int (4x^2 + 3)^2\ dx$

7) $\int (x^2 + 3x + x^{-2})\ dx$

8) $\int (3x^{-2} + 5x^{-4})\ dx$

9) $\int (25x^3 - 1)x^{-1/2}\,dx$

10) $\int \left(\sqrt{x^7} + 5\ \sqrt[4]{x}\right)\ dx$

11) $\int \dfrac{x^3 + 2x - 7}{x}\ dx$

12) $\int \left(3x^2 - 6x + 4x^{-1}\right) dx$

13) $\int \dfrac{3x^5 - x^4 + 7x^3 + 4x}{x^3}\ dx$

14) $\int \dfrac{9x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 1}{x^2}\ dx$

Respostas:

1) $x^3 - 2x^2 - 5x + C$

2) $\dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 4x + C$

3) $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x + C$

4) $\dfrac{x^6}{3} + \dfrac{5x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3} - 5x + C$

5) $x^3 - \dfrac{10}{3}x^{3/2} + 2x + C$

6) $\dfrac{16x^5}{5} + 8x^3 + 9x + C$

7) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x^{-1} + C$

8) $-3x^{-1} - \dfrac{5}{3}x^{-3} + C$

9) $\dfrac{50}{7}x^{7/2} - 2x^{1/2} + C$

10) $\dfrac{2}{9}x^{9/2} + 4x^{5/4} + C$

11) $\dfrac{1}{3}x^3 + 2x - 7\ln|x| + C$

12) $x^3 - 3x^2 + 4\ln|x| + C$

13) $x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 7x - 4x^{-1} + C$

14) $3x^3 - 2x^2 + 5x - 2\ln|x| + x^{-1} + C$

5.2 – Integração por substituição

Existem várias técnicas para escrever uma integral em uma forma à qual se aplique uma ou mais das regras básicas.

Queremos calcular, por exemplo, $\int 3(3x+4)^9\,dx$ (1)

Podemos expandir a expressão $(3x + 4)^9$ e, em seguida integrar termo a termo, mas isso seria muito trabalhoso. Então vamos tentar simplificar a integral fazendo uma mudança de variáveis.

Seja u = 3x + 4. Daí du = 3dx

Substituindo essas expressões em (1) obtemos:

$$\int 3(3x+4)^9\,dx = \int (3x+4)^9 3\,dx = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C \qquad (2)$$

Substituindo u por 3x + 4 em (2) temos nosso resultado: $\int 3(3x+4)^9\,dx = \dfrac{(3x+4)^{10}}{10} + C$

Como a variável x foi substituída por uma nova variável, esta maneira de calcular integrais indefinidas é conhecida como **integração por substituição ou mudança de variável.**

A justificativa do procedimento usado no exemplo anterior é dada pelo teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para derivação.

Teorema: Seja h uma função derivável de variável x e seja g uma antiderivada de f. Então, se u = h(x),

$$\int f(h(x))h'(x)dx = \int f(u)du = g(u) + C = g(h(x)) + C$$

Exemplos:

1) $\int \sqrt{5x+8}\,dx$

Solução: Seja u = 5x + 8

Daí du = 5dx. Então dx = $\frac{1}{5}$du

Logo $\int \sqrt{5x+8}\,dx = \int \sqrt{u}.\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^{1/2}du = \frac{1}{5}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{(5x+8)^3} + C$

2) $\int x(3x^2+1)^8\,dx$

Solução: Seja $u = 3x^2 + 1$

Daí du = 6xdx. Então xdx = $\frac{1}{6}$ du

Logo $\int x(3x^2+1)^8\,dx = \int (3x^2+1)^8 x dx = \frac{1}{6}\int u^8\,du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^9}{9} + C = \frac{(3x^2+1)^9}{54} + C$

3) $\int \frac{18x^2dx}{(2x^3+7)^4}$

Solução: Seja u = $2x^3$ + 7

Daí du = $6x^2$dx. Então 3du = $18x^2$dx

Logo $\int \frac{18x^2dx}{(2x^3+7)^4} = \int (2x^3+7)^{-4}\,18x^2dx = \int u^{-4}\,3du = 3\int u^{-4}\,du = 3\,\frac{u^{-3}}{-3} + C =$

$= -\frac{1}{u^3} + C = -\frac{1}{(2x^3+7)^3} + C$

4) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

Solução: Seja u = x – 1. Daí du = dx (1)

Da primeira igualdade em (1) temos: x = u + 1 $\therefore$ $x^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$

Então $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int (u^2+2u+1)\sqrt{u}\,du = \int (u^{5/2}+2u^{3/2}+u^{1/2})\,du =$

$= \frac{u^{7/2}}{7/2} + 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C =$

$= \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$

Outros exemplos:

1) $\int x^2(2x^3+1)^7\,dx$ 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+5}}$ 3) $\int \frac{15x^2dx}{(x^3+2)^5}$ 4) $\int x\sqrt{x+5}\,dx$

Respostas:

1) $\frac{1}{48}(2x^3+1)^8 + C$ 2) $\frac{\sqrt{4x^2+5}}{4} + C$

3) $\frac{-5}{4(x^3+2)^4} + C$ 4) $\frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$

Exercícios – lista 14

Calcule as integrais:

1) $\int (4x+3)^4\, dx$

2) $\int x(4x^2+7)^9 dx$

3) $\int 4x\sqrt{x^2+5}\, dx$

4) $\int 3x(4-3x^2)^{-8}\, dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2+16}}\, dx$

6) $\int \frac{8x+2}{(4x^2+2x+6)^{17}}\, dx$

7) $\int \frac{6x^2}{(x^3+1)^3}\, dx$

8) $\int \frac{x-3}{(x^2-6x+1)^2} dx$

9) $\int (2x^2-1)(6x^3-9x+1)^{-3/2}\, dx$

10) $\int (x^2+3x+5)^8(18x+27)\, dx$

11) $\int x(x+1)^{-1/2}dx$

12) $\int x(5-x)^{1/2}dx$

Respostas:

1) $\frac{(4x+3)^5}{20}+C$

2) $\frac{(4x^2+7)^{10}}{80}+C$

3) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$

4) $\frac{1}{14(4-3x^2)^7}+C$

5) $\frac{3}{20}\ (5x^2 + 16)^{2/3} + C$

6) $\frac{-1}{16}\ (4x^2 + 2x + 6)^{-16} + C$

7) $-(x^3 + 1)^{-2} + C$

8) $\frac{-1}{2}(x^2 - 6x + 1)^{-1} + C$

9) $-\frac{2}{9}(6x^3 - 9x + 1)^{-1/2} + C$

10) $(x^2 + 3x + 5)^9 + C$

11) $\frac{2}{3}\ (x + 1)^{3/2} - 2(x + 1)^{1/2} + C$

12) $-\frac{10}{3}(5 - x)^{3/2} + \frac{2}{5}(5 - x)^{5/2} + C$

5.3 – Integração por Partes

Nesta seção vamos estudar uma técnica conhecida como **integração por partes** baseada na regra do produto para diferenciais. Essa técnica é particularmente útil no caso de integrandos que envolvem produtos de funções algébricas e funções exponenciais ou logarítmicas.

Sejam u e v funções de variável x

Sabemos que d(uv) = udv + vdu

Ou, equivalentemente, udv = d(uv) – vdu

Integrando ambos os membros dessa equação temos: $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$

Ou ainda, $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ (1)

A equação (1) é chamada de **fórmula para integração por partes**.

Essa fórmula transforma o problema do cálculo de $\int udv$ no cálculo de $\int vdu$. Através de uma escolha conveniente de u e dv será mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira.

Na fórmula acima, deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas as constantes podem ser representadas por uma única constante que será introduzida no final do processo.

Exemplos:

1) $\int x \ln x \, dx$

Solução: Como ln x não pode ser integrado usando as regras dadas até agora vamos fazer:

$$u = \ln x \quad e \quad dv = x\,dx$$

de modo que $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

Então $\int x \ln x \, dx = \int (\ln x)\, xdx = \int udv$

Pela fórmula de integração por partes temos:

$$\int x \ln x \, dx = uv - \int vdu = (\ln x)\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

2) $\int x\, e^{4x} dx$

Solução: Nesse caso, vamos fazer:

$u = x$ e $dv = e^{4x}dx$

Daí $du = dx$ e $v = \int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x}$

Então $\int x\,e^{4x}dx = \int udv$

Pela fórmula de integração por partes temos:

$$\int x\,e^{4x}dx = uv - \int vdu = x.\ \frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}\,dx = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{1}{4}\int e^{4x}\,dx = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$$

Às vezes, a integração por partes leva a uma nova integral que também pode ser integrada por partes.

Exemplo: $\int x^2e^x\,dx$

Solução: Vamos fazer $u = x^2$ e $dv = e^xdx$

Daí $du = 2x\,dx$ e $v = \int e^x\,dx = e^x$

Então $\int x^2e^x\,dx = \int udv$

Pela fórmula de integração por partes temos:

$$\int x^2e^x\,dx = uv - \int vdu = x^2\,e^x - \int 2xe^x\,dx \qquad (1)$$

Para achar a $\int 2xe^x\,dx$ também precisamos utilizar a integração por partes. Nesse caso, seja $u = 2x$ e $dv = e^xdx$. Então $du = 2\,dx$ e $v = e^x$

Logo $\int 2xe^x\,dx = 2x\,e^x - \int e^x\,2dx = 2x\,e^x - 2\int e^xdx = 2x\,e^x - 2\,e^x$

Daí e de (1) $\int x^2e^x\,dx = x^2\,e^x - (2x\,e^x - 2\,e^x) + C = x^2\,e^x - 2x\,e^x + 2\,e^x + C$

Algumas integrais podem ser calculadas por integração por partes ou por substituição. As soluções podem parecer diferentes, mas se estiverem corretas, poderão diferir, no máximo, por uma constante.

Exemplo: $\int x\sqrt{x+5}\,dx$

Solução: Fazendo $u = x$ e $dv = \sqrt{x+5}$, temos que $du = dx$ e $v = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$

Então, usando o método de integração por partes, achamos:

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$$

Fazendo u = x + 5 e utilizando o método de integração por substituição, encontramos:

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

Observe que $\frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} = (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{4}{15}(x+5)\right) =$

$$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{4x}{15} - \frac{20}{15}\right) = (x+5)^{3/2}\left(\frac{10x}{15} - \frac{4x}{15} + \frac{10}{5} - \frac{10}{3}\right) =$$

$$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{5} + \frac{10}{5} - \frac{10}{3}\right) = (x+5)^{3/2}\left(\frac{2}{5}(x+5) - \frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}$$

Outros exemplos:

1) $\int \ln(2x^2)dx$

2) $\int 6x\, e^{-2x}dx$

Respostas:

1) $x\ln(2x^2) - 2x + C$

2) $-3x\,e^{-2x} - \frac{3}{2}\,e^{-2x} + C$

Exercícios – lista 15

Use o método de integração por partes para calcular as integrais abaixo:

1) $\int \ln x \, dx$

2) $\int x e^{x} dx$

3) $\int x \ln(3x) \, dx$

4) $\int x e^{-2x} dx$

5) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

6) $\int x^{-2} \ln x \, dx$

7) $\int x e^{x/2} dx$

8) $\int x^{2} \ln x^{2} \, dx$

9) $\int 5x e^{3x} dx$

10) $\int 3x^{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Respostas:

1) $x \ln x - x + C$

2) $x e^{x} - e^{x} + C$

3) $\frac{x^2}{2} \ln(3x) - \frac{x^2}{4} + C$

4) $\frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$

5) $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$

6) $\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

7) $2x e^{x/2} - 4 e^{x/2} + C$

8) $\frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C$

9) $\frac{5}{3} x e^{3x} - \frac{5}{9} e^{3x} + C$

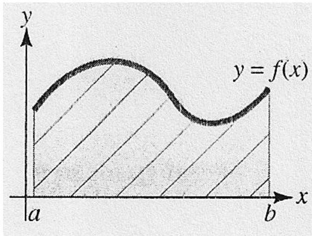
10) $x^3 \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{3} + C$

5.4 – Integral Definida – Noção intuitiva

Já sabemos que a derivada tem origem geométrica: está ligada ao problema de traçar a reta tangente a uma curva. A integral definida também tem origem geométrica: está ligada ao problema de determinar a área de uma região plana limitada por uma curva qualquer.

Não é difícil calcular a área de regiões cujos limites são definidos por linhas retas, como retângulos e triângulos. O problema se torna mais difícil quando os limites da região são definidos total ou parcialmente por linhas curvas.

Uma das primeiras soluções conhecidas de um problema deste tipo foi a do matemático grego Arquimedes que calculou a área sob uma curva parabólica.



Vamos considerar uma função f contínua em um intervalo [a, b] e supor que f(x) ≥ 0 para x nesse intervalo. Queremos calcular a área A da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b, isto é, a região compreendida entre o gráfico de f, o eixo x e as retas verticais x = a e x = b.

Para calcular a área A pelo método de Arquimedes, devemos cobrir a região sob o gráfico de f com um conjunto de retângulos adjacentes, todos com a base inferior no eixo x. A altura de cada retângulo é o valor da função para um valor de x correspondente a um dos pontos da base do retângulo, isto é, escolhemos a altura de tal forma que o lado superior do retângulo intercepte o gráfico da função (figura 1).

O método de Arquimedes envolve duas ideias principais: a primeira é a de que podemos calcular a área aproximada de região somando as áreas desses retângulos. A segunda é a de que podemos tornar a aproximação cada vez melhor usando uma quantidade maior de retângulos (vemos na figura 2 que estes retângulos representam melhor a região que os da figura 1).

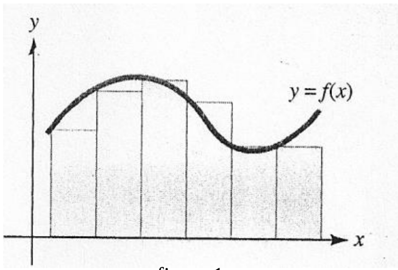


figura 1

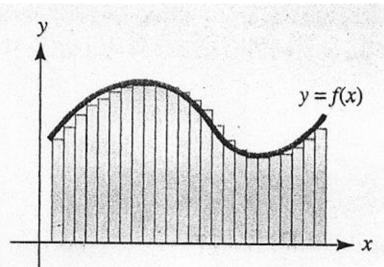


figura 2

Assim, dividimos o intervalo [a, b] cujo comprimento é b – a em n subintervalos, cada um dos quais tendo comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, isto é,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots , [x_{n-1}, x_n] \text{ onde } x_0 = a \text{ e } x_n = b$$

Consideramos os retângulos de largura Δx e altura $f(x_i^*)$ onde x_i^* é um número qualquer no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i^*)\,\Delta x$.

A área A é aproximada pela soma das áreas desses retângulos, que é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\,\Delta x + ... + f(x_n^*)\,\Delta x$$

Como observamos anteriormente, essa aproximação torna-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de subdivisões do intervalo [a, b]. Então definimos a área A como o limite de S_n quando n cresce infinitamente. Ou seja: $A = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

O limite acima aparece também na definição de integral definida:

Definição: Seja f uma função definida e limitada em [a, b]. Dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Sejam $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , x_{n-1} x_{n-} 1, $x_n = b$ os extremos desses subintervalos. Escolhemos em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto arbitrário x_i^* e teremos a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\,\Delta x + ... + f(x_n^*)\,\Delta x$$

chamada **Soma de Riemann**. Dizemos que f é **integrável** em [a, b] se existir um número real L tal que $L = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Neste caso, L é a **integral definida de a até b** e usamos a notação de Leibniz para representá-lo: $L = \int_a^b f(x)dx$.

Observações:

1 – Nesta notação, a e b são chamados limites de integração: a é o limite de integração inferior e b é o limite de integração superior.

2 – A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número real e não depende de x. Podemos usar qualquer outra letra sem mudar o valor da integral: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$

3 – Se f é contínua em [a, b] podemos provar que o limite da definição acima sempre existe, ou seja f é integrável em [a, b].

Propriedades das integrais definidas:

Sejam f e g funções integráveis em [a, b] e c um número real qualquer.

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) $\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

d) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

O teorema a seguir mostra como calcular a integral definida de uma função contínua, desde que possamos encontrar uma antiderivada desta função. Devido à sua importância em estabelecer a relação entre a derivação e a integração, este teorema, descoberto independentemente por Newton na Inglaterra e Leibniz na Alemanha é conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo**:

Seja f uma função contínua em [a, b]. Se g é uma antiderivada de f em [a, b] então

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Exemplo 1: $\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\,dx$

Solução: Sabemos que $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$ onde C é uma constante arbitrária é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo temos:

$$\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\,dx = g(4) - g(1) = 52 - 4 = 48$$

Observações: 1 – A diferença g(b) – g(a) também costuma ser indicada por $g(x)\Big|_a^b$

Usando a notação anterior no exemplo 1 escrevemos:

$$\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\,dx = (x^3 - 2x^2 + 5x + C)\Big|_1^4 = 52 - 4 = 48$$

2 – No cálculo da integral definida do exemplo 1, a constante de integração “desapareceu”. Isto acontece sempre, pois se g + C denota a antiderivada de uma função f, então:

$$(g(x) + C)\Big|_a^b = (g(b) + C) - (g(a) + C) = g(b) + C - g(a) - C = g(b) - g(a)$$

Assim, em todos os cálculos envolvendo uma integral definida, iremos ignorar a constante de integração.

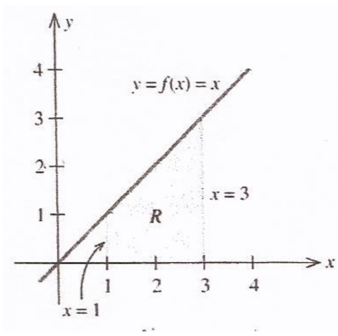
Exemplo 2: $\int_{-1}^1 (x^4 + 2x + 1)\,dx$

Solução: Sabemos que $g(x) = \dfrac{x^5}{5} + x^2 + x$ é uma antiderivada de $f(x) = x^4 + 2x + 1$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo temos:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + 2x + 1)\, dx = g(1) - g(-1) = \left(\frac{1}{5} + 1 + 1\right) - \left(-\frac{1}{5} + 1 - 1\right) = \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$$

Se f é contínua em [a, b] e $f(x) \geq 0$ para x nesse intervalo então $\int_a^b f(x)dx$ é a **área A** da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b, conforme vimos no início desta seção.

Exemplo 1: Calcule a área da região R sob o gráfico de f(x) = x entre x = 1 e x = 3

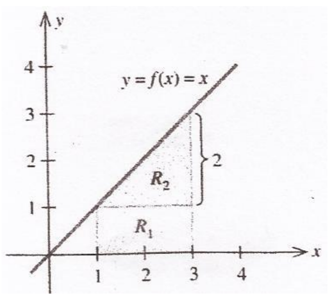


Solução: Como f é contínua e $f(x) \geq 0$ em [1, 3], a área A é dada pela integral definida de f de 1 a 3, isto é,

$$A = \int_1^3 x\, dx$$

Temos que $g(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma antiderivada de f.

Então $A = \int_1^3 x\, dx = g(3) - g(1) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

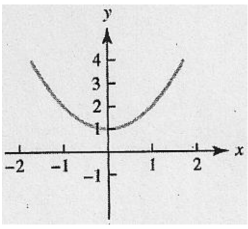


Para verificar o resultado do exemplo1, observe que a área A é a soma da área do retângulo R_1 com a área do triângulo R_2 (figura ao lado).

Então $A = 2.1 + \frac{2.2}{2} = 2 + 2 = 4$

O que coincide com o resultado obtido anteriormente.

Exemplo 2: Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ entre x = – 1 e x = 2.



Solução: Observamos que f é contínua em [–1, 2] e $f(x) \geq 0$ em [–1, 2].

Então a área é dada por $A = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx$

Como $g(x) = \frac{x^3}{3} + x$ é uma antiderivada de f temos:

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx = g(2) - g(-1) = \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1 = 6$$

A região sob o gráfico de uma função f entre x = a e x = b pode estar inteiramente abaixo do eixo x como mostra a figura (1) abaixo.

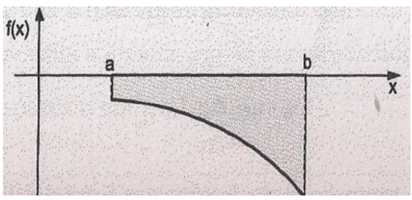


figura 1

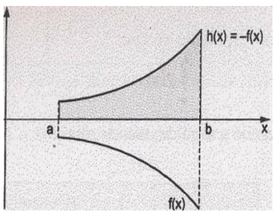


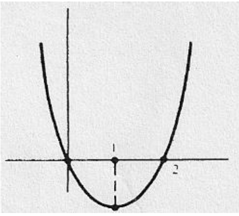
figura 2

Nesse caso, para calcular a área da região destacada, vamos considerar a função h = – f definida no intervalo [a, b]. Os gráficos de f e h são simétricos em relação ao eixo x (figura 2), e a área A da região compreendida pelo gráfico de f e o eixo x entre x = a e x = b é igual à área B da região sob o gráfico de h entre x = a e x = b.

Então $A = B = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Assim, se f é contínua em [a, b] e f(x) ≤ 0 para x nesse intervalo, então área da região compreendida pelo gráfico de f e o eixo entre x = a e x = b é dada por $A = -\int_a^b f(x)dx$

Exemplo 3: Ache a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$ entre x = 1 e x = 2.



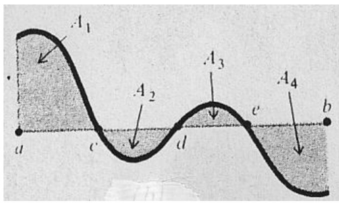
Solução: Observamos que f é contínua em [1, 2] e f(x) ≤ 0 em [1, 2].

Então a área é dada por $A = -\int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx$

Como $g(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$ é uma antiderivada de f temos:

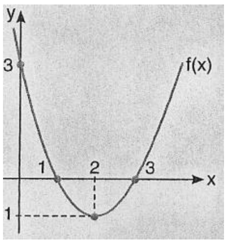
$$A = -\int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx = -(g(2) - g(1)) = -\left[\left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = -\left[-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

Se a curva está parcialmente acima do eixo x e parcialmente abaixo como é mostrado na figura ao lado, então a área pode ser calculada pela soma das áreas correspondentes a partes da região que estão acima e abaixo do eixo x.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx - \int_e^b f(x)dx$$

Exemplo 4: Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ entre x = 0 e x = 3.



Solução: Vemos no gráfico ao lado que f(x) ≥ 0 em [0, 1] e f(x) ≤ 0 em [1, 3]. Então a área A é dada por:

$A = A_1 + A_2$ onde $A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx$ e $A_2 = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx$

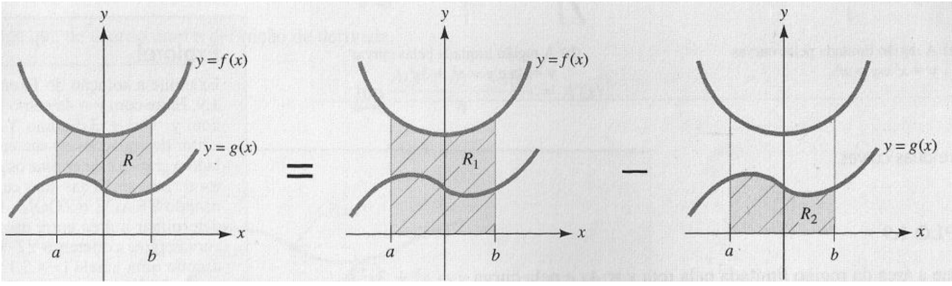
Como $g(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ é uma antiderivada de f, temos que:

$$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = g(1) - g(0) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = -(g(3) - g(1)) = -\left(0 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Logo $A = A_1 + A_2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$

Para determinar a área da região R entre os gráficos de f e g de x = a até x = b (figura abaixo), basta subtrair a área da região limitada pelo gráfico de g da área da região limitada pelo gráfico de f.



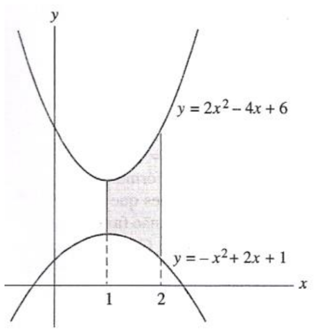
Então área de R = área de R_1 – área de R_2

Ou seja, área de R = $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Portanto, se f e g são funções contínuas em [a, b] tais que f(x) ≥ g(x) em [a, b] e se R é a região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas x = a e x = b, então a área de R é dada pela

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Exemplo 5: Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ entre x = 1 e x = 2



Solução: f e g são funções contínuas em [1, 2] e tais que f(x) ≥ g(x) em [1, 2].

Então a área é dada por: $A = \int_1^2 ((2x^2 - 4x + 6) - (-x^2 + 2x + 1))\,dx =$

$= \int_1^2 (3x^2 - 6x + 5)\,dx = (x^3 - 3x^2 + 5x)\Big|_1^2 = (8 - 12 + 10) - (1 - 3 + 5) =$

$= 6 - 3 = 3$

A integral definida pode ser aplicada a problemas de Física, Biologia e outras ciências. Por exemplo:

1) Suponha que um corpo esteja se movendo em linha reta com uma velocidade dada por uma função contínua v(t). A mudança de posição do corpo (deslocamento) entre os instantes t = a e t = b é dada por uma integral definida:

$$\int_a^b v(t)dt$$

2) Se uma entidade viva (planta, animal ou colônia de células) está crescendo a uma taxa f(t) onde t representa o tempo em unidades apropriadas, o crescimento total entre os instantes t = a e t = b é dado pela $\int_a^b f(t)dt$

3) Suponha que uma droga é injetada em um paciente a uma taxa de Q(t) centímetros cúbicos por minuto no instante t. A quantidade total da droga injetada entre os instantes t = a e t = b é dado pela

$$\int_a^b Q(t)dt$$

A integral definida também pode ser usada para expressar o valor médio (VM) de uma função contínua f em um intervalo [a, b]:

$$VM = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemplo: Em certo experimento, o número de bactérias presentes em uma cultura após t minutos é dado pela função $Q(t) = 2.000e^{0,05t}$. Determine o número médio de bactérias presentes na cultura durante os primeiros 5 minutos do experimento.

$$\text{Solução: } VM = \frac{1}{5-0}\int_0^5 2.000e^{0,05t}dt = \frac{1}{5}2.000\int_0^5 e^{0,05t}dt = \left(400\ \frac{1}{0,05}e^{0,05t}\right)\Big|_0^5 =$$

$$= \left(8.000e^{0,05t}\right)\Big|_0^5 \cong 2.272$$

Exercícios – lista 16

1) Calcule as integrais definidas:

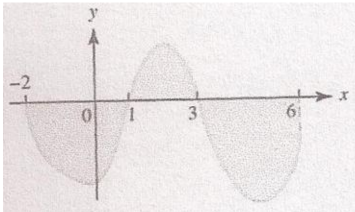
a) $\int_{1}^{4} (x^2 - 4x - 3)\, dx$

b) $\int_{-1}^{2} (x + x^4)\, dx$

c) $\int_{4}^{8} \left(6 - \frac{x}{2}\right) dx$

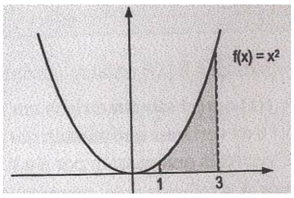
d) $\int_{1}^{3} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{x^2}\, dx$

2) O gráfico de uma função f aparece na figura ao lado e sabemos que $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = -\ 2{,}8$ e $\int_{1}^{3} f(x)\, dx = 1{,}2$ e $\int_{1}^{6} f(x)\, dx = -\ 3{,}5$. Determine a área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo x entre x = – 2 e x = 6.

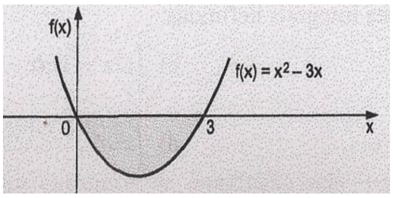


3) Calcule a área das regiões destacadas nas figuras abaixo:

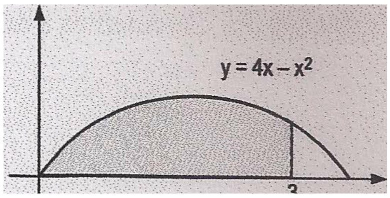
a) $f(x) = x^2$



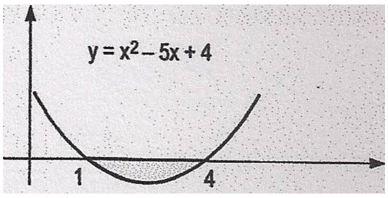
b) $f(x) = x^2 - 3x$



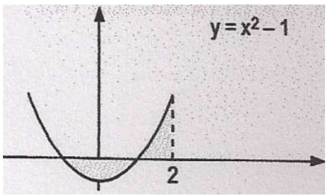
c) $f(x) = 4x - x^2$



d) $f(x) = x^2 - 5x + 4$



e) $f(x) = x^2 - 1$



4) Nos próximos 5 dias quantas pessoas poderão ser expostas a um certo vírus se sabemos que em t dias, a partir de agora, o vírus terá se disseminado a uma taxa de $9t(8 - t)$ pessoas por dia? Quantas pessoas estarão em contato com o vírus durante o quinto dia?

5) Um objeto se move de tal forma que sua velocidade após t minutos é de $5 + 2t + 3t^2$ metros por minuto. Que distância o objeto percorre durante o segundo minuto?

6) Um estudo indica que daqui a x meses, a população de uma determinada cidade estará aumentando à taxa de $10 + 2\sqrt{x}$ pessoas por mês. Em quanto aumentará a população da cidade nos próximos 9 meses?

7) Estima-se que daqui a t meses a população de certa cidade estará aumentando à razão de $4 + 5t^{2/3}$ habitantes por mês. Qual será o aumento da população nos próximos 8 meses?

8) Um medicamento é injetado em um paciente a uma taxa de $0{,}9 - 0{,}27\sqrt{x}$ cm^3 por minuto no instante x. Determine a quantidade total de remédio injetada entre o primeiro e o quarto minuto após a aplicação começar.

9) Os registros mostram que, t horas após a meia noite, a temperatura em certa cidade (em graus Celsius) foi de

$$f(t) = -0{,}3t^2 + 4t + 10$$

Determine a temperatura média na cidade entre 9h e meio dia.

10) Calcule a área limitada pelos gráficos de $f(x) = 5 - x^2$ e $g(x) = x + 3$

11) Determine a área limitada pelos gráficos de $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 4 - x^2$

12) Calcule a área limitada pelos gráficos de $f(x) = x^3 - 3x + 3$ e $g(x) = x + 3$

Respostas:

1) a) -18 b) $81 / 10$ c) 12 d) 2

2) 8,7

3) a) $\frac{26}{3}$ b) $\frac{9}{2}$ c) 9 d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{8}{3}$

4) 525 pessoas; 141 pessoas

5) 15 m

6) 126 pessoas

7) 128 habitantes

8) 1,44 cm^3

9) 18,7º C

10) $\frac{9}{2}$

11) $\frac{8}{3}$

12) 8

Capítulo 6 – Equações Diferenciais

O estrôncio-90 é um elemento radioativo e, como todo elemento dessa natureza, sofre desintegração. Qual é o tempo decorrido, desde certo instante, para que uma amostra de estrôncio-90 tenha sua massa reduzida a 80% do seu valor? Para equacionar este problema, devemos utilizar a seguinte lei que rege o fenômeno da desintegração: sendo Q(t) a massa presente no instante t, a taxa de variação de Q é proporcional à massa presente nesse instante, isto é: $\frac{dQ}{dt} = cQ$ onde c é uma constante conhecida. Estamos em presença de uma equação cuja incógnita é uma função, a saber, Q. Pelo fato de aparecer uma derivada, a equação é referida como "equação diferencial". Problemas como este aparecem com extraordinária frequência nas ciências aplicadas, o que confere uma importância destacada à teoria das equações diferenciais. Neste capítulo, faremos uma breve introdução ao estudo das "equações diferenciais ordinárias".

6.1 – Definição e classificação de equações diferenciais ordinárias

Definição: **Equações diferenciais** são aquelas em que ocorrem derivadas de funções. São exemplos de equações diferenciais:

1) $y' = 2x$

2) $y'' + y = 0$

3) $xy' + y = 3$

4) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 7y = 0$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Em geral, uma equação diferencial é dita **ordinária** (abreviada por **EDO**) quando envolve uma ou mais derivadas de uma função y de uma variável independente x; a equação também pode envolver o próprio y, funções de x e constantes. São exemplos de EDO as equações (1), (2), (3) e (4). A equação (5) é um exemplo de **equação diferencial parcial (**abreviada por **EDP**). Neste caso a função incógnita possui duas ou mais variáveis independentes e, portanto, as derivadas são parciais.

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que aparece na equação. Nos exemplos dados, as equações (1) e (3) são de primeira ordem e (2), (4) e (5) são de segunda ordem.

Sabemos que para resolver a equação algébrica $x^2 - 3x + 2 = 0$ devemos procurar um número que substituindo x na equação, reduza o membro da esquerda a zero. Os números 1 e 2 possuem esta propriedade e assim esta equação possui duas soluções: 1 e 2. Para resolver uma equação diferencial, devemos procurar funções em lugar de números. Ou seja: encontrar a solução de uma equação diferencial é determinar uma função cujo domínio é um intervalo aberto e que verifique a equação para esse intervalo.

Por exemplo, a função $y = x^2$ é uma solução da equação diferencial de primeira ordem $xy' = 2y$ para todo $x \in IR$.

De fato, temos que $y' = 2x$ e substituindo na equação dada obtemos: $x2x = 2x^2$ que é uma identidade.

Outros exemplos:

1) Mostre que $y = e^{2x}$ e $y = e^{3x}$ são soluções em IR da equação diferencial de segunda ordem $y'' - 5y' + 6y = 0$.

2) Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

3) Mostre que $y = \ln x$ é uma solução da equação diferencial $xy'' + y' = 0$ em $(0, +\infty)$, mas não é solução em $(-\infty, +\infty)$.

Observação: Soluções de equações diferenciais podem ocorrer também na forma de função implícita e às vezes é difícil ou impossível expressar a variável dependente explicitamente em termos da variável independente.

Por exemplo, $xy = \ln y + C$ é uma solução de $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$ qualquer que seja a constante C.

De fato, derivando a equação $xy = \ln y + C$ implicitamente em relação a x obtemos:

$$y + xy' = \frac{1}{y}y' + 0 \leftrightarrow \left(x - \frac{1}{y}\right)y' = -y \leftrightarrow \left(\frac{xy - 1}{y}\right)y' = -y \leftrightarrow y' = \frac{-y^2}{xy - 1} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

Uma solução de uma equação diferencial usualmente contém uma ou mais constantes arbitrárias, conforme a ordem da equação. O tipo mais simples de equação diferencial tem a forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ onde f é uma dada função. A sua solução é dada pela integral indefinida $y = \int f(x)\,dx$.

Assim, uma solução de uma equação diferencial é uma função ou família de funções que satisfazem a equação.

Exemplo 1: Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 + 5$

A solução desta equação é $y = \int (x^2 + 5)\,dx$

Então $y = \frac{x^3}{3} + 5x + C$

Uma solução desta forma, que envolve uma constante arbitrária e inclui todas as soluções possíveis, é chamada de **solução geral** da equação diferencial.

Exemplo 2: Resolva a equação diferencial de segunda ordem $y'' = 12x + 4$

Solução: Como a equação é de segunda ordem serão necessárias duas integrações sucessivas para resolvê-la. Consequentemente, na solução geral vão figurar duas constantes arbitrárias que não podem ser combinadas em uma única constante.

Assim, $y' = \int (12x + 4)\, dx = 6x^2 + 4x + C_1$

Daí $y = \int (6x^2 + 4x + C_1)\, dx$

Logo $y = 2x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2$ (solução geral)

Os problemas que dão origem a equações diferenciais estão frequentemente vinculados a condições adicionais, chamadas **condições iniciais**, sobre as variáveis envolvidas. As condições iniciais podem ser usadas para destacar uma **solução particular** da solução geral. O problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é chamado de **problema de valor inicial**.

Sabendo, por exemplo, que $y = 4$ quando $x = 3$ obtemos da solução geral do exemplo 1, a seguinte solução particular da equação dada:

$$y = \frac{x^3}{3} + 5x - 20$$

Outros exemplos:

1) Determine a solução geral da equação diferencial $y' = 20x^3 - 6x^2 + 7$

2) Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x^2} + 15x^2 + 10$

3) Determine a solução geral da equação diferencial $y' = e^{3x} - x$

4) Determine a solução particular da equação $y' = 8x^3 - 3x^2 - 5$ sabendo que $y = 5$ quando $x = -1$

5) Ache a solução particular da equação $y'' = 12x - 2$ sabendo que $y = 3$ e $y' = 8$ quando $x = 1$.

Respostas:

1) $y = 5x^4 - 2x^3 + 7x + C$

2) $y = \frac{-6}{x} + 5x^3 + 10x + C$

3) $y = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{x^2}{2} + C$

4) $y = 2x^4 - x^3 - 5x - 3$

5) $y = 2x^3 - x^2 + 4x - 2$

Exercícios – lista 17

Nos itens de 1 a 6 determine a solução de cada equação diferencial:

1) $y' = 5x^4 + 3x^2 + 1$ 2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x^2 - 4)^2}{2x^2}$ 3) $y' = 6x^{-2} + 15x^2 + 10$

4) $y' = 140\, e^{7x}$ 5) $\dfrac{dy}{dx} = 5e^{-2x} + \dfrac{9}{x}$ 6) $\dfrac{dy}{dx} = x^4 - 4x^{2/3}$

Nos itens 7 a 12 ache a solução particular da equação diferencial dada que satisfaz à condição inicial indicada:

7) $y' = x^2 + 3x$; $y = 2$ quando $x = 1$ 8) $y' = x^3 + x^{-2}$; $y = 1$ quando $x = -2$

9) $y' = \sqrt{x} + 2$; $y = 5$ quando $x = 4$ 10) $y' = (5x + 12)^3$; $y = 1$ quando $x = -2$

11) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - e^{-x}$; $y = \dfrac{1}{2}$ quando $x = 0$ 12) $\dfrac{dy}{dx} = x + e^{-x}$; $y = 1$ quando $x = 0$

13) Determine a função cuja reta tangente tem coeficiente angular dado por $5x^4 - x + 5$ e cujo gráfico passa pelo ponto (0,8).

14) Estima-se que daqui a x semanas o número de passageiros de uma nova linha de metrô estará aumentando à razão de $18x^2 + 500$ passageiros por semana. Sabe-se que na primeira semana 8.506 passageiros usaram a linha. Quantos passageiros estarão usando a nova linha daqui a 5 semanas?

15) Uma epidemia de gripe atinge uma cidade e P(t) representa o número de pessoas doentes com a gripe no instante t, medido em dias a partir do início da epidemia com P(0) = 100. Suponha que após t dias a gripe esteja se espalhando a uma taxa de $120t - 3t^2$ pessoas por dia. Determine o número de pessoas doentes no 10º dia após o início da epidemia.

16) Estima-se que daqui a x meses, a população de uma cidade estará aumentando à razão de $2 + 6\sqrt{x}$ habitantes por mês. A população atual é de 5.000 pessoas. Qual será a população daqui a 9 meses?

Nos itens 17 e 18 ache a solução geral de cada equação diferencial de segunda ordem:

17) $y'' = 3x^2 + 2x + 1$ 18) $y'' = 5(x + 7)^{-3}$

Nos itens 19 e 20 ache a solução particular de cada equação que satisfaz a condição dada:

19) $y'' = 15\sqrt{x}$ sabendo que $y = 4$ e $y' = 7$ quando $x = 1$

20) $y'' = 2$ sabendo que $y' = 0$ quando $x = 1$ e $y = 0$ quando $x = -3$

Respostas:

1) $y = x^5 + x^3 + x + C$

2) $y = \frac{1}{6}x^3 - 4x - 8x^{-1} + C$

3) $y = -6x^{-1} + 5x^3 + 10x + C$

4) $y = 20e^{7x} + C$

5) $y = \frac{-5}{2}e^{-2x} + 9\ln|x| + C$

6) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{12}{5}x^{5/3} + C$

7) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{6}$

8) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} - \frac{7}{2}$

9) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x - \frac{25}{3}$

10) $y = \frac{(5x+12)^4}{20} + \frac{1}{5}$

11) $y = x^3 - x^2 + e^{-x} - \frac{1}{2}$

12) $y = \frac{x^2}{2} - e^{-x} + 2$

13) $f(x) = x^5 - \frac{x^2}{2} + 5x + 8$

14) 11.250 passageiros

15) 5.100 pessoas

16) 5.126 pessoas

17) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$

18) $y = \frac{5}{2}(x+7)^{-1} + C_1x + C_2$

19) $y = 4x^2\sqrt{x} - 3x + 3$

20) $y = x^2 - 2x - 15$

6.2 – Equações diferenciais separáveis.

Uma **equação diferencial separável** é uma equação diferencial de primeira ordem da forma: $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$. Ela é dita separável, pois pode ser resolvida separando as variáveis e integrando ambos os lados da equação. Assim, se $f(y) \neq 0$ podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \text{onde} \quad h(y) = \frac{1}{f(y)}$$

Daí $h(y)dy = g(x)dx$

Portanto $\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$

Exemplo 1: A equação $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ é separável, pois podemos escrever:

$\frac{1}{y^2}\, dy = 2x\, dx.$

Calculando a integral indefinida em ambos os lados temos: $\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 2x\, dx$

Daí, $-\frac{1}{y} = x^2 + C$. Então $-y = \frac{1}{x^2 + C}$

Logo $y = \frac{-1}{x^2 + C}$ (solução explícita)

Exemplo 2: A equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ também é separável, pois podemos escrever:

$y\, dy = x^2\, dx$

Então $\int y\, dy = \int x^2 dx$

Daí $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C_1$ ou $y^2 = \frac{2x^3}{3} + C$ (solução implícita)

Outros exemplos:

1) Encontre a solução geral da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 4x}{y^2}$

2) Encontre a solução particular da equação $\sqrt{x^3 + 8}\, dy = x^2\, dx$ sabendo que $y = 4$ quando $x = 1$

Respostas:

1) $y = \sqrt[3]{15x - 6x^2 + C}$

2) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 8} + 2$

A equação $\frac{dy}{dx}$ = f(x) também é **separável** já que pode ser reescrita na forma dy = f(x) dx.

Apresentaremos agora aplicações importantes desta equação no caso em que f(x) = ky onde k é uma constante.

Para encontrar a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad (1)$$

devemos procurar uma função y que é igual a sua derivada. A função $y = e^x$ tem esta propriedade, portanto $y = e^x$ é uma solução de (1). Na verdade, qualquer múltiplo de e^x também tem esta propriedade. Logo, a família de funções $y = Ce^x$ é a solução geral da equação (1).

Se k é uma constante, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad (2)$$

é semelhante. A equação (2) diz que a taxa de variação de y é diretamente proporcional a y.

Colocando $y = Ce^{kx}$ na equação (2), verificamos que $y = Ce^{kx}$ é uma solução.

Podemos provar o seguinte resultado: A solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$ é $y = Ce^{kx}$ para qualquer constante C.

- Isto representa **crescimento exponencial** para k > 0 e **decaimento exponencial** para k < 0.

- A constante C é o valor de y quando x é zero.

- A constante k é chamada de constante de proporcionalidade.

O número de bactérias em certas culturas se comporta desta maneira. Se o número de bactérias é pequeno, então a taxa de crescimento é pequena; entretanto, à medida que o número de bactérias aumenta a taxa de crescimento também aumenta.

Exemplo 1: O número de bactérias em uma cultura aumenta de 600 para 1.800 em duas horas. Supondo que a taxa de aumento seja diretamente proporcional ao número de bactérias presentes, determine:
a) Uma fórmula para o número de bactérias no instante t.
b) O número de bactérias depois de quatro horas.

Solução:

a) Seja y o número de bactérias depois de t horas

Temos que $\frac{dy}{dt} = ky$

Então $y = Ce^{kt} = 600e^{kt}$

Como $y = 1.800$ quando $t = 2$ temos $1.800 = 600\ e^{2k}$

Daí $e^{2k} = 3$, isto é, $e^{k} = \sqrt{3}$

Logo $y = 600(\sqrt{3})^{t}$

b) Para $t = 4$ temos $y = 600(\sqrt{3})^{4} = 5.400$ (bactérias)

Exemplo 2: Em algumas reações químicas a taxa à qual a quantidade de uma substância varia com o tempo é proporcional à quantidade presente. Isso acontece, por exemplo, quando δ-glucono-lactone muda para ácido glucônico. Se 100 gramas de δ-glucono-lactone são reduzidas a 54,9 gramas em uma hora, quantos gramas restarão depois de 10 horas?

Solução:

Temos que $54{,}9 = 100\ e^{-k.1}$. Daí $e^{-k} = 0{,}549$

Então $y = 100.(0{,}549)^{t}$

Para $t = 10$ temos $y = 100.(0{,}549)^{10}$

Logo $y \cong 0{,}25$ g

Outro exemplo de aplicação do resultado anterior é a quantidade de droga no corpo de um paciente. Depois de cessar a administração da droga, a taxa à qual a droga deixa o corpo é proporcional à quantidade que permanece no corpo. Se Q representar a quantidade de droga que permanece no corpo, $\frac{dQ}{dt} = -kQ$

O sinal negativo indica que a quantidade da droga no corpo está decrescendo.

A solução desta equação diferencial é $Q = Q_0 e^{-kt}$

Temos que a quantidade decresce exponencialmente, a constante k depende da droga e Q_0 é a quantidade da droga no corpo no tempo zero.

Algumas vezes, obtemos informações sobre a taxa relativa de decaimento de uma droga quando conhecemos sua meia vida, que como sabemos, é o tempo necessário para que a quantidade da droga no organismo fique reduzida pela metade.

Exemplo 3: Ácido Valpróico é uma droga usada para controlar epilepsia e sua meia vida no corpo humano é de cerca de 15 horas.

a) Use a meia vida para achar a constante k na equação $\frac{dQ}{dt} = -kQ$

b) Em quanto tempo restarão 10 % da droga?

Solução:

a) Sabemos que $Q = Q_0e^{-kt}$. Então $0{,}5Q_0 = Q_0e^{-k.15}$

Daí $0{,}5 = e^{-15k} \Rightarrow \ln 0{,}5 = -15k \Rightarrow k = -\dfrac{\ln 0{,}5}{15} \Rightarrow k = 0{,}0462$

b) Vamos escrever $0{,}10Q_0$ para a quantidade restante Q e resolver a equação para o tempo t:

$0{,}10Q_0 = Q_0e^{-0{,}0462t} \Rightarrow 0{,}10 = e^{-0{,}0462t} \Rightarrow \ln 0{,}10 = -0{,}0462t$

$$t = \frac{\ln 0{,}10}{-0{,}0462} = \frac{-2{,}3026}{-0{,}0462} \cong 50 \text{ h}$$

Exercícios – lista 18

Nos itens 1 a 4 determine a solução geral de cada equação diferencial separável:

1) $\sqrt{2x+1}\ dy = y^2\ dx$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7-6x}{y^2}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y^2}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x-y}$

Nos itens 5 a 8 ache a solução particular de cada equação diferencial separável:

5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{2\sqrt{x}}$; y = 2 quando x = 4

6) $x^2dy = (2x^2 - 3)dx$; y = 1 quando x = 1

7) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y^2$; y = 1 quando x = 0

8) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^2}$; y = 3 quando x = 2

9) Bitartarato de hidrocodona é usado para suprimir a tosse. Depois que a droga foi completamente absorvida, a quantidade da droga no corpo decresce a uma taxa proporcional à quantidade que resta no corpo. A meia vida do bitartarato de hidrocodona no corpo é de 3,8 horas e a dose é 10 mg. Quanto da dose de 10 mg resta no corpo após 12 horas?

10) Warfarin é uma droga usada como anticoagulante. Depois da administração da droga ser interrompida, a quantidade que resta no corpo do paciente decresce a uma taxa proporcional à quantidade restante. A meia vida do warfarin no corpo é 37 horas. Depois de quantos dias o nível da droga no sangue fica reduzido a 25% do nível original?

11) O número de bactérias em uma cultura aumenta de 5.000 para 15.000 em 10 horas. Supondo que a taxa de crescimento seja proporcional ao número de bactérias presentes, estabeleça uma fórmula para o número de bactérias na cultura no instante t. Estime o número de bactérias no término de 20 horas.

Respostas:

1) $y = \dfrac{-1}{\sqrt{2x+1} + C}$

2) $y = \sqrt[3]{21x - 9x^2 + C}$

3) $y = \sqrt[3]{3x^2 + C}$

4) $2e^y = e^{2x} + C$ ou $y = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+C}{2}\right)$

5) $y = \dfrac{-2}{2\sqrt{x} - 5}$

6) $y = 2x + \dfrac{3}{x} - 4$

7) $y = \dfrac{-1}{x^3 - 1}$

8) $y = \sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{2} + 21}$

9) Aproximadamente1,12 mg

10) Aproximadamente 3 dias

11) $Q(t) = 5.000\, e^{\frac{\ln 3}{10}t}$ 45.000 bactérias

6.3 – Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Uma **equação diferencial linear de primeira ordem** é aquela que pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

onde p e q são funções (contínuas) de x em um dado intervalo.

Exemplo 1: xy' + y = 2x é uma equação diferencial linear de primeira ordem, pois para $x \neq 0$ esta equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \text{ onde } p(x) = \frac{1}{x} \text{ e } q(x) = 2 \qquad (2)$$

Sabemos, pela regra do produto, que $xy' + y = (xy)'$

Podemos então rescrever a equação dada como: $(xy)' = 2x$

Integrando ambos os lados obtemos: $\int (xy)' \, dx = \int 2x \, dx$

Daí $xy = x^2 + C$ (solução implícita) ou $y = x + \frac{C}{x}$ (solução explicita)

Note que se a equação estivesse na forma (2) teríamos que multiplicar primeiro cada lado da equação por x.

Toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida, pela multiplicação de ambos os lados da equação por uma função adequada I(x) chamada de **fator integrante.** Podemos provar que $I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

Assim, para resolver a equação diferencial $y' + p(x)y = q(x)$ multiplicamos ambos os lados pelo fator integrante $I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ e integramos ambos os lados.

Para o exemplo anterior $I(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

Exemplo 2: Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2$

A equação dada é linear porque tem a forma de (1), com $p(x) = 3x^2$ e $q(x) = 6x^2$. O fator integrante é $I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{x^3} obtemos:

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y = 6x^2 e^{x^3}$$

Daí $\frac{dy}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$

Integrando ambos os lados temos: e^{x^3} y = $\int(6x^2e^{x^3})dx = 2e^{x^3} + C$

Logo y = 2 + Ce^{-x^3}

Exemplo 3: Ache a solução para o problema de valor inicial: $x^2y' + xy = 1$, $x > 0$ e $y(1) = 2$

Para x > 0 podemos reescrever a equação dada como: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$

Assim, a equação é linear com p(x) = $\frac{1}{x}$ e q(x) = $\frac{1}{x^2}$

O fator integrante é I(x) = $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por x obtemos: $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$

Daí $\frac{d}{dx}(xy) = \frac{1}{x}$

Integrando ambos os lados temos: xy = $\int \frac{1}{x}dx$ = ln x + C

Logo: y = $\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$ (solução geral)

Substituindo os valores, y = 2 e x = 1 na solução geral, obtemos C = 2

Portanto a solução particular desejada é y = $\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}$

Exercícios – lista 19

Nos itens de 1 a 6 determine as soluções de cada equação.

1) $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x$ para $x > 0$

2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-5x}$

3) $x^2y' + 4xy = x^5$ para $x \neq 0$

4) $y' + 2xy = 2x$

5) $x\,y' + y = 0$ para $x \neq 0$

6) $x\,y' + y = 3x^2 + 4x + 4$ para $x \neq 0$

Nos itens de 7 a 9 resolva o problema de valor inicial.

7) $xe^x\,y' + e^x(1 + x)y - 1 = 0$, $y(1) = e^{-1}$

8) $(1 + x)y' + y = 1$, $y(0) = 1$

9) $y' + \dfrac{3y}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 0$, $y(1) = 0$

Respostas:

1) $y = x^2 + \dfrac{C}{x}$

2) $y = -\dfrac{1}{3}e^{-5x} + C\,e^{-2x}$

3) $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{C}{x^4}$

4) $y = 1 + Ce^{-x^2}$

5) $y = \dfrac{C}{x}$

6) $y = x^2 + 2x + 4 + \dfrac{C}{x}$

7) $y = e^{-x}$

8) $y = 1$

9) $y = \dfrac{1-x^2}{x^3}$

Bibliografia

1 – Cálculo volumes 1 e 2
James Stewart; Thomson Pioneira

2 – Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações
Laurence D. Hoffmann e Gerald Bradley; Editora LTC

3 – Cálculo – Conceitos e aplicações
Alex Himonas e Alan Howard; Editora LTC

4 – Cálculo – volumes 1 e 2
Mustafa A. Munem e Davis J. Foulis; Editora LTC

5 – Cálculo com Geometria Analítica – volume 1
E. W. Swokowski; Editora Makron Books

6 – Cálculo com aplicações – Ron Larson e Bruce H Edwards
Editora LTC