Álgebra Linear II – GAN00164
Aula 06 – Forma de Jordan para matrizes 2×2+ Polinômio Mínimo

Prof: Jones Colombo

Polinômio Mínimo

A primeira observação a fazer é a de que qualquer que seja a matriz $A_{n\times n}$, sempre existe um polinômio que o anula.

De fato, considere os n^2+1 vetores $I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ dentro do espaço das matrizes de ordem n. O espaço vetorial formado pelas matrizes de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n^2. Portanto, n^2+1 vetores são sempre LD's. Isto quer dizer, que devem existir constantes, $c_0, c_1, \ldots, c_{n^2}$ não todas nulas tais que esta combinação linear

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n^2} A^{n^2} = 0.$$

Portanto, o polinômio não nulo $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n^2} x^{n^2}$ anula A.

Já sabemos que basta considerar polinômios de ordem n, visto que pelo teorema de Calyley-Hamilton o polinômio característico da matriz sempre o anula.

Definição Dizemos que um polinômio $f(x) \neq 0$ é mônico se o seu coeficiente do termo de maior grau for igual a um.

Seja A uma matriz $n \times n$ considere todos os polinômios não nulos que se anulam ao serem avaliados em A. Logo deve existir alguns de menor grau, entre estes escolha o mônico. Diremos que este polinômio é o **polinômio mínimo** de A e o denotamos por $m_A(x)$.

Fato 1 O polinômio mínimo $m_A(x)$ de uma matriz A, divide qualquer polinômio que anule esta matriz. Em particular divide o seu polinômio característico.

Fato 2 O polinômio característico $\Delta_A(x)$ e o polinômio mínimo $m_A(x)$ de uma matriz A tem os mesmo fatores irredutíveis.

Forma de Jordan para matrizes 2×2

Vamos fazer o estudo do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $(x, y) \mapsto (4x-y, x+2y)$. Seja $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ a base canônica, então a matriz deste operador com respeito a base α fica

$$A = [T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico será $\Delta_T(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Agora como $A - 3I \neq 0$ segue que o polinômio mínimo é $m_T(x) = \Delta_T(x)$. Portanto, este operador não é diagonalizavel. Em geral isto é tudo que podemos fazer. Mas vamos exibir uma base na qual o operador acima é representado por uma matriz na forma de Jordan.

Em geral, dado um operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cujo o $m_T(x) = \Delta_T(x) = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = (x-\lambda)^2$, escolhemos um vetor qualquer que não é mútiplo do autovetor associado ao autovalor λ. Digamos u.

Afirmação: A base $\beta = \{(T-\lambda I)u, u\}$ é uma base na qual a matriz fica na forma de Jordan.

Observe que $T\,(T-\lambda I)u) = (T^2 - \lambda T)u$, mas sabemos que $0 = T^2 - 2\lambda T + \lambda^2 I \Rightarrow T^2 - \lambda T = \lambda T - \lambda^2 I$,

$$\begin{aligned}(\lambda T - T^2)u = (\lambda T + \lambda^2 I)u &= \lambda(T-\lambda I)u + 0u \\ Tu = Tu - \lambda I u + \lambda I u &= 1(T-\lambda I)u + \lambda u.\end{aligned}$$

Isto demonstra a afirmação.
Portanto, precisamos encontrar o autovalor associado ao autovetor, justamente para não pegar ele sem querer.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o vetor que anula $A - 3I$ deve satisfazer a restrição $x = y$. Segue, que um vetor genérico é da forma $(x, y) = (x, x) = x(1, 1)$. Pelo exposto acima basta escolhermos um vetor que não é múltiplo escalar de $(1, 1)$. Vamos tomar $e_1 = (1, 0)$.
Logo $\beta = \{(A - 3I)e_1, e_1\}$, nos fornece uma base onde a matriz de T assume a forma

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$