Álgebra Linear II – GAN00164
Aula 09 – Estudo de operadores com auto valores complexos
Prof: Jones Colombo

Nesta aula vamos analisar o que acontece quando um operador possui autovalores complexos. Como já havíamos comentado, um operador linear $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre os $\mathbb{R}$, pode não ser diagonalizável em duas situações. A primeira é quando o polinômio característico possui raízes (auto valores) repetidas e a quantidade de autovalores associado a este autovalor não for em quantidade suficiente. A segunda ocorre quando o polinômio característico possui raízes complexas. Nesta aula vamos analizar o que esta acontecendo e determinar uma forma padrão para este tipo de operador.

Vamos iniciar com um exemplo. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (x - y, 2x - y)$. Seja α a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Então

$$A = [T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico fica $\Delta_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Neste momento não há nada que se pode fazer, pois o operador foi concebido para ser sobre um espaço vetorial real. Mas, vamos continuar fazendo o processo de diagonalizção como se o operador fosse $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, nesta situação tal operador é diagonalizável. Veja que $A-iI = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{bmatrix}$, observe que podemos obter a segunda linha por multiplicar a primeira por $1 + i$, portanto a primeira linha é múltipla da primeira, ao procurarmos o $\ker(A - iI)$, obtemos a restrição $(1 - i)x = y$, isto é, $(x, y) = (x, (1 - i)x) = x(1, 1 - i)$.

Ao procurarmos os autovalores associados ao autovalor $-i$, temos $A + iI = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{bmatrix}$, e multiplicando a primeira linha por $1 - i$ obtemos a segunda. Daí, que a restrição será $(1 + i)x = y$ e os autovetores serão da forma $(x, y) = (x, (1 + i)x) = x(1, 1 + i)$.

Portanto, o operador T com respeito a base $\beta = \{(1, 1 - i), (1, 1 + i)\}$ será representado pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

A princípio tal informação nos parece totalmente irrelevante, visto que não parece ter nenhuma conexão com o nosso operador inicial. Já veremos que isso não é bem assim.

Vamos demonstrar dois pequenos resultados.

Lema .1 *Seja A uma matriz real $n \times n$ e λ um de seus autovalores. Se v é um autovetor associado ao autovalor λ, então $\bar{\lambda}$ também é um autovalor de A, e $\bar{v}$ é um autovalor correspondente.*

A demonstração disso, segue por uma pequena observação. Como v é um autovetor associado ao autovalor λ, isto quer dizer

$$Av = \lambda v \text{ conjugando } \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}.$$

Como A é uma matriz real obtemos que $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Uma vez que v é não nulo uma vez que é um autovetor, segue que $\bar{v}$ também é não nulo. O lema esta provado.

Lema .2 *Seja A uma matriz real 2×2 com autovalores complexos $\lambda = a \pm bi$ (onde $b \neq 0$). Se $w = u + iv$ é o autovalor de A correspondente ao $\lambda = a - bi$, então $\beta = \{u, v\}$ é uma base e se P é a matriz de mudança de base da base β para a base canônica, então*

$$A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Inicialmente observe que os vetores u e v não podem ser múltiplos (reais) um do outro, pois se o fossem, digamos $u = av$ com $a \in \mathbb{R}$, então $w = u + iv = av + iv = (a+i)v$, como w é um autovetor complexo, qualquer múltiplo dele por um número complexo também o será. Logo o autovetor real v será um autovetor de A associado a autovalor complexo λ o que claramente não pode acorrer.
Vamos tentar escrever a matriz do operador A na base β, mas antes, veja que segue das equações $Aw = \lambda w$ e $A\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ temos

$$\begin{aligned} A(u + iv) &= Au + iAv = (a - ib)(u + iv) = (au + bv) + i(-bu + av), \\ A(u - iv) &= Au - iAv = (a + ib)(u - iv) = (au + bv) + i(bu - av). \end{aligned}$$

Somando as duas equações obtemos $2A(u) = 2(au + bv) \Rightarrow A(u) = au + bv$. Se fizermos a primeira equação menos a segunda equação obtemos $2iA(v) = 2i(-bu + av) \Rightarrow A(v) = -bu + av$. Desta forma, a matriz A na base β fica

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

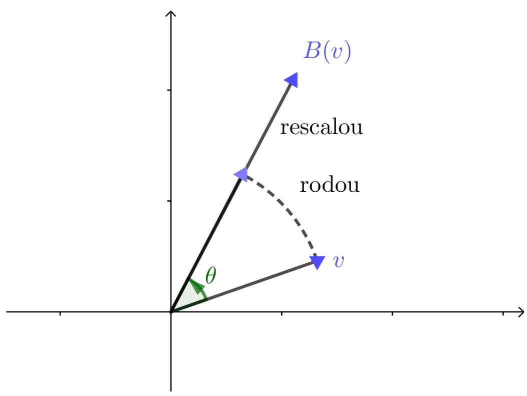
Observe que para este tipo de matriz $\det(B) = a^2 + b^2$ e podemos reescrever ela da seguinte forma

$$B = \det(B) \begin{bmatrix} \frac{a}{\det(B)} & -\frac{b}{\det(B)} \\ \frac{b}{\det(B)} & \frac{a}{\det(B)} \end{bmatrix}.$$

Nesta situação os pontos $(\frac{a}{\det(B)}, \frac{b}{\det(B)})$ estão sobre o círculo unitário, logo deve existir $\theta \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, tal que $(\frac{a}{\det(B)}, \frac{b}{\det(B)}) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, e podemos reescrever

$$B = \det(B) \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

A matriz B nos diz que os vetores escritos na base β são primeiramente rodados θ radianos no sentido anti-horário seguindo de uma contração ou expansão dependendo apenas se $\det(B) > 1$ ou $\det(B) < 1$.



Em posse destes fatos voltamos ao exemplo inicial. Como no lema acima vamos considerar o autovetor $(1, 1+i) = (1, 1)+i(0, 1)$, que esta associado ao autovalor $-i$. Considere a base $\beta' = \{(1, 1), (0, 1)\}$. Com respeito a esta base o operador $T(x, y) = (x - y, 2x - y)$ tem a seguinte matriz,

$$[T]_{\beta'}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

e isso quer dizer que T quando escrita na base β' faz somente uma rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário.
Apesar do que foi dito insinuar que os operadores com autovalores complexos fazem simplesmente uma rotação seguido de um reescalonamento do vetor, na prática o comportamento de um operador complexo é bem mais intricado. No nosso exemplo a matriz $P = [I]_{\alpha}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, $A = PBP^{-1}$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1. Vamos procurar os pontos do plano cujas coordenadas estão na base β' que são mapeados neste círculo. Não é difícil de perceber que estes pontos satisfazem $x^2 + (y - x)^2 = 1$, que é uma elipse. Isto quer dizer que os pontos da elipse são mapeados no círculo unitário por P^{-1}. Fiz uma sequência de imagem para tentar descrever o comportamento da dinâmica quando damos uma volta ao redor da círculo. O ponto $\times$ em azul é enviado (pela P^{-1}) no $\bullet$ em verde. O ponto $\bullet$ (verde) é enviado (pela B) no $\blacksquare$ (verde escuro). O ponto $\blacksquare$ em verde escuro é enviado (pela P) no $\circ$ em vermelho.