Álgebra Linear II – GAN00164
Aula 11 – Decomposição Primária e Forma de Jordan
Prof: Jones Colombo

Nesta aula vamos fazer um exercício para mostrar as etapas no estudo de um operador linear. Iniciamos com fazer a decomposição primáriado operador e depois de posse dela, obter uma base na qual o operador fica na forma de Jordan. Ao final faremos a uma espécie de demonstração do teorema da decomposição primária para este operador.
Inicialmente vamos enunciar o teorema da decomposição primária.

Teorema .1 (da decomposição primária) *Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um K-espaço vetorial de dimensão finita. Considere m_T o polinômio mímino de T,*

$$m_T = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

onde os p_i são polinômios irredutíveis, mônicos sobre F e dois a dois distintos, os r_i são inteiros positivos. Seja W_i o núcleo de $p_i^{r_i}(T)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Então

a) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$;

b) *Cada W_i é um subespaço T-invariante;*

c) *Se T_i é o operador obtido de T por restringir ao subespaço W_i, então o polinômio mínimo de T_i é $p_i^{r_i}$.*

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(x, y, z) \mapsto (3x - y + z, 7x - 5y + z, 6x - 6y + 2z)$. Seja α a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Então nesta base a matriz associada a T é

$$A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Veja que

$$\operatorname{tr}(A) = 0,\ \det(A) = -16,\ A_{11} = -4,\ A_{22} = 0,\ A_{33} = -8,\ \text{daí } \sum_i A_{ii} = -12.$$

Portanto, $\Delta_T(x) = x^3 - 12x + 16 = (x + 4)(x - 2)^2$. O primeiro candidato para ser o polinômio mínimo é $m_T(x) = (x + 4)(x - 2)$, mas calculando

$$A + 4I = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

e ao multiplicarmos $(A + 4I)(A - 2I) \neq 0$ (veja que na posição 11 aparece 6). Portanto, o polinômio mínimo deve ser $m_T(x) = \Delta_T(x)$. Desta forma T não é diagonalizavel. Vamos verificar as afirmações do teorema da decomposição primária.
Na notação, temos que $p_1(x) = x + 4$ e $p_2(x) = x - 2$. Vamos calcular $W_1 = \ker(A + 4I)$ e $W_2 = \ker(A - 2I)^2$.

$$A + 4I = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \text{ os vetores que a anulam são da forma } (x, y, z) = x(0, 1, 1),$$

e

$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{bmatrix}$ os vetores que a anulam são da forma $(x,y,z) = x(1,1,0)+z(0,0,1)$.

Daí que, $W_1 = \operatorname{span}\{(0,1,1)\}$ e $W_2 = \operatorname{span}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Claramente $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ que verifica o item a) do teorema. Os outros dois itens do teorema podem ser verificados, bastando para isso calcular a matriz de T com respeito a base $\beta = \{(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$.
Veja que

$$\begin{aligned} T(0,1,1) &= (0,-4,-4) = (-4)(0,1,1) + 0(1,1,0) + 0(0,0,1) \\ T(1,1,0) &= (2,2,0) = 0(0,1,1) + 2(1,1,0) + 0(0,0,1) \\ T(0,0,1) &= (1,1,2) = 0(0,1,1) + 1(1,1,0) + 2(0,0,1) \end{aligned}$$

Isto verifica que W_1 e W_2 são subespaços T-invariantes.

$$B = [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Veja que $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = 4x$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x+y, 2y)$ e claramente $p_1(x) = x-4$ e $p_2(x) = (x-2)^2$ são seus polinômios mínimos.
Isto conclui a verificação do teorema da decomposição primária. Além disso, como já obtivemos a forma de Jordan do operador, não é necessário fazer nenhum outro procedimento.

Vamos apresentar os elementos para a prova do teorema da decomposição primária, isto é vamos fazer a demonstração do teorema, para este caso em particular.
Devido a decomposição $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$; sabemos que existem operadores de projeção $P_i : V \to V$, que são polinômios em T e que por isso mesmo comutam com T. Além disso,

i) $I = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$;

ii) $P_iP_j = 0$, $i \neq j$;

iii) $P_i^2 = P_i$, isto é, P_i são projeções;

iv) $\mathcal{IM}(P_i) = \ker(p_i^{r_i}(T))$;

Definimos

$$f_i = \frac{m_T}{p_i^{r_i}}$$

no nosso caso, $f_1(x) = (x-2)^2$ e $f_2(x) = x+4$. Claramente $\mathrm{MDC}\{f_1, f_2\} = 1$, logo dividindo f_1 por f_2 obtemos $f_1 = (x-8)f_2 + 36$ e

$$\frac{1}{36}(x-2)^2 + \frac{1}{36}(8-x)(x-4) = 1.$$

Denote por

$$P_1 = \frac{1}{36}(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e por } P_2 = \frac{1}{36}(8I-A)(A-4I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora é claro que:

$$P_1 + P_2 = I;\ \ P_1^2 = P_1;\ \ P_2^2 = P_2; \text{ e que } P_1P_2 = 0.$$

Como $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ segue que

$$\mathcal{IM}(P_1) = \operatorname{span}\{(1,1,0)\}.$$

Como $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ segue que

$$\mathcal{IM}(P_2) = \operatorname{span}\{(1,1,1),(0,0,1)\}$$

Então, observe que $\mathcal{IM}(P_1) = \ker(p_1(T))$ e $\mathcal{IM}(P_2) = \ker(p_2^2(T))$.