Álgebra Linear II – GAN00164
Aula 18 – Espaço Dual, Transposta e Adjunta
Prof: Jones Colombo

1 Dual

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{K}$, o espaço dual $V^\star$ é o espaço de todas transformações lineares de V em $\mathbf{K}$. Uma transformação linear de V em $\mathbf{K}$ é chamada de funcional linear. Sabemos que um funcional linear é definido unicamente pelos valores sobre elementos da base de V. Considere a base $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V. Para cada vetor u_i da base, associamos o funcional linear f_i determinado por $f_i(u_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é 1 se $i = j$ e 0 nos outros casos. No caso em que a dimensão V é finita, o conjunto $\beta^\star = \{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de $V^\star$ (veja teorema abaixo). Neste caso, $\beta^\star$ é denominado de base dual de β.

Exemplo .1 *Seja V o espaço vetorial de todas as funções polinômiais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tem grau menor ou igual a 2. Considere t_1, t_2 e t_3 três números reais distintos. Seja*

$$L_i(p) = p(t_i), \forall p(t) \in V \text{ e } i = 1, 2, 3.$$

Então L_1, L_2 e L_3 são funcionais lineares. Estes funcionais são LI, pois, suponha que

$$L = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3.$$

Se $L = 0$, isto é, se $L(p) = 0$ para todo $p \in V$ então aplicando L nas funções 1, x e x^2 obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ t_1c_1 + t_2c_2 + t_3c_3 &= 0 \\ t_1^2c_2 + t_2^2c_2 + t_3^2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Segue que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, por causa que o $\det$ da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

é diferente de zero, uma vez que t_1, t_2 e t_3 são dois a dois distintos.
Como V tem dimensão 3, estes funcionais forma uma base de $V^\star$. Qual é a base de V, para o qual L_1, L_2 e L_3 é a base dual.
Isto é, devemos encontrar polinômios p_1, p_2 e p_3 tais que

$$L_i(p_j) = \delta_{ij} \text{ ou } p_j(t_i) = \delta_{ij}.$$

Mas isso é facilmente resolvido, pensando que precisamos encontrar polinômios p_j de grau menor ou igual a 2 tal que $x = t_j$ dá 1 e em nos outros valores da zero.

$$p_1(x) = \frac{(x - t_2)(x - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)},\ p_2(x) = \frac{(x - t_1)(x - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)},\ \text{ e } p_3(x) = \frac{(x - t_1)(x - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

É claro também que para qualquer polinômio em $p \in V$ tenhamos

$$p = p(t_1)p_1 + p(t_2)p_2 + p(t_3)p_3 \text{ (interpolação de Lagrange)}.$$

Teorema .2 *Se V for espaço vetorial sobre $\mathbf{K}$ com base $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$, então $\beta^\star = \{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de $V^\star$.*

Demonstração Vamos verificar que $\beta^\star$ é L.I. Se $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0$, teremos $f(u_i) = 0(u_i) = 0$, o que implica que $0 = c_1 f_1(u_i) + \cdots + c_n f_n(u_i) = c_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, o que implica que $\beta^\star$ L.I. Agora, precisamos verificar que $\beta^\star$ gera $V^\star$. Inicialmente, para cada vetor $u \in V$ existe uma único $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nesta situação observe que $f_i((x_1, \ldots, x_n)) = x_i$.
Seja f um funcional linear. Lembrando que uma transformação linear é unicamente determinados pelos valores que toma ao ser avaliado nos vetores da base, considere $c_i = f(u_i)$. Afirmamos que: $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$. De fato, $f(u_i) = c_1 f_1(u_i) + \cdots + x_n f_n(u_i) = c_i$ para cada i, devido a definição de f_i. Como coincide em cada elemento da base, o funcional deve ser o mesmo e assim, conseguimos escrever o funcional linear f como combinação dos elementos de $\beta^\star$.

Corolário .3 *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então $V^\star$ é isomorfo a V.*

Demonstração Basta lembrar que espaço vetorial de mesma dimensão, quando a dimensão é finita, são isomorfos.

Como a dualidade depende da base, então quando não houver ambiguidade podemos denotar $u_i^\star = f_i$ para enfatizar que f_i é dual de u_i. Se for um vetor $v = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ e não tem dúvida quanto a base a ser dualizada, podemos denotar por $v^\star = c_1 u_1^\star + \cdots + c_n u_n^\star$.
Com vimos no caso de dimensão finita, dado uma base de V, a associação $v \mapsto v^\star$ de V em $V^\star$ é um isomorfismo. No entanto, este isomorfismo depende da base escolhida para dualizar.
No caso do espaço de dimensão infinita, dual de uma base nem sempre é uma base. Veja exemplo

Exemplo .4 *(dual da base no espaço de dimensão infinita). Considere*

$$V = \mathbb{R}[x] = \{ \text{ polinômios com coeficientes em } \mathbb{R}\}.$$

Então $\beta = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ é uma base de V e $\beta^\star = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ o seu dual. Então $f_i(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_i$. Vamos mostrar que β não gera o $V^\star$. Considere o funcional linear $f(p) = p(1)$ que é uma evaliação do polinômio p no ponto $x = 1$. Afirmamos que f não é gerado pelos elementos de $\beta^\star$.
Suponha por absurdo que $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$ (só é permitido a combinação finita). Então $f(t^{n+1}) = c_1 f_1(t^{n+1}) + \cdots + c_n f_n(t^{n+1}) = 0$ o que é absurdo, pois $f(t^{n+1}) = 1^{n+1} = 1$. Assim, f não é gerado pelo $\beta^\star$.

Imitando o caso de dimensão finita é possível de mostrar que é L.I.. Assim, teremos

Proposição .5 *Existe aplicação linear injetora $V \mapsto V^\star$.*

.

Exemplo .6 *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para o qual desejamos encontrar as soluções. Se definirmos f_i, $i = 1, \ldots, m$ por colocar $f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$ então desejamos encontrar o subespaço W de V tais que para todo $u \in W$ tenhamos $f_i(u) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Em outras palavras, queremos encontrar o subespaço anulador de $f_1, \ldots, f_m$. Fazendo o processo de escalonamento da matriz nos fornece um método sistemático para encontrar tal subespaço. A n-upla $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$ são as coordenadas do funcionais lineares f_i relativa a base que é a dual da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

2 Teorema de Representação

Considere um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Considere um vetor não nulo $w \in V$ e a função $\varphi_w : V \to \mathbf{K}$ definida por $\varphi_w(v) = \langle v, w \rangle$. É fácil de verificar que $\varphi_w \in V^\star$.

Teorema .7 (Representação) *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle , \rangle$, então para todo funcional linear $f \in V^\star$, existe um único vetor $u_f \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u_f \rangle$.*

Demonstração Considere uma aplicação $\varphi : V \to V^\star$ definida por $\varphi(w) = \varphi_w : V \to \mathbf{K}$, onde $\varphi_w(v) = \langle v, w \rangle$. Como $\langle v, w_1 + \lambda w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle v, w_2 \rangle$, podemos mostrar que $\varphi_(w_1 + \lambda w_2)(u) = \varphi_{w_1} + \bar{\lambda} \varphi_{w_2}$. (exercício), o que é denominado de funcional linear conjugado, devido a conjugação do escalar. O funcional linear conjugado tem a propriedade similar ao funcional linear (se $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ é um funcional linear). Por exemplo, se for injetor no espaço de mesma dimensão, ele será bijetora. Como V e $V^\star$ tem mesma dimensão (provado pela base dual), basta mostrar que φ é injetora. Agora se $\varphi(w) = 0$, então $\varphi_w(v) = \langle v, w \rangle = 0$ para todo vetor $v \in V$. Em particular, $\varphi_w(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 = 0$, o que implica que $w = 0$. Como $\ker(\varphi) = \{0\}$, ele será injetora e consequentemente será bijetora.

Observação .8 *(isomorfismo de representação) Note que a função acima não depende da base. Neste caso, ele será dito isomorfismo conjugado natural. No caso real, a aplicação acima é um isomorfismo. No caso complexo, poderá construir o isomorfismo para teorema de representação, mas ele não será unicamente determinado (não é natural). Para tanto, escolha uma base β de V e usando a conjugação complexa relativa a esta base, defina $\psi(c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n) = \bar{c_1} \langle w_1, w \rangle + \cdots + \bar{c_n} \langle w_n, w \rangle$. Então ψ será um isomorfismo que permite representar o funcional linear como produto interno (mas dependerá da base). Note que, na maioria dos casos, o que interessa e ter vetor que represente o funcional linear. Trabalhando com um pouco de cuidado, podemos partir da expressão envolvendo o produto interno (sem ter a base específica) e chegar na expressão com o produto interno (sem ter base específica), usando uma base ortonormal.*

Observação .9 *No caso de dimensão infinita, a aplicação de representação acima é apenas injetiva. Assim, nem todo funcional linear pode ser representado pelo vetor isto sugere que nem todo funcional linear pode ser obtido como produto interno.*

2.1 O Dual do Dual - A imagem no Espelho serei eu?

Como $V^\star$ é um espaço vetorial, podemos analisar o dual de $V^\star$. O espaço dual do dual $V^{\star\star} = (V^\star)^\star$ é interessante por ter transformação linear injetora natural $L : V \to V^{\star\star}$ mesmo sem ter o produto interno.

Lema .10 *Se V é um espaço vetorial, então $L : V \to (V^\star)^\star$ definido por $L(u) = L_u$ onde $L_u(f) = f(u)$ para todo $f \in V^\star$ é injetora.*

Demonstração Vamos mostrar que L é linear. Considere $u, v \in V$, $f \in V^\star$ e $\lambda \in \mathbf{K}$. Calculando: $L(u+\lambda v)(f) = f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v) = (L(u) + \lambda L(v))(f)$. Se $L(u) = L_u = 0$ então $L_u(f) = f(u) = 0$ para todo funcional linear $f \in V^\star$ e consequentemente, $u = 0$. Faça o exercício **??**.

Teorema .11 (dual do dual) *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então $L : V \to V^{\star\star}$ é isomorfismo natural.*

Demonstração Segue da injetividade, pois V é um espaço vetorial de dimensão finita (Mostre que $\dim V = \dim V^{\star\star}$ como exercício, para completar o argumento). O fato de ser natural é devido ao fato da definição de L não depender de uma base específica.

Observação .12 *O isomorfismo L é natural. Isto significa que ele não depende da base. Assim, identificamos $V^{\star\star}$ com V via L, e escrevemos $V^{\star\star} = V$ quando a dimensão é finita. No caso de $V^\star$, precisará de produto interno para ter isomorfismo (ou isomorfismo conjugado) natural. Assim, só podemos identificar $V^\star$ com V de forma precisa quando temos o produto interno.*

Observação .13 *A aplicação L será bijetora se, e somente se, for de dimensão finita. Em álgebra, não permitimos combinação linear infinita, mas na análise, pode ocorrer uma combinação linear infinita, o que permite ter espaços de dimensão infinita com L bijetora.*

3 Anulador

Vamos discutir a relação entre funcionais lineares e subespaços vetoriais. Se f for um funcional linear não nulo, então o seu posto deve ser 1, pois a imagem de um funcional é espaço vetorial múltiplo do corpo, por isso,

$$\dim \ker(f) = \dim V - 1$$

Nos espaços vetoriais de dimensão finita, um subespaço de dimensão $n-1$ são chamado de um hiperespaço.
Cada hiperespaço é o núcleo de algum funcional linear? A resposta desta pergunta é facilmente respondida com um sim. Já é um pouco mais complicado mostrar que cada subespaço d-dimensional de um espaço n-dimensional é a interseção dos núcleos de $n-d$ funcionais lineares.

Definição .14 *Seja $X \subset V$. O conjunto $X^0 = \{f \in V^\star : \forall u \in X,\ f(u) = 0\}$ é denominado de anulador de X.*

É claro que X^0 será subespaço vetorial de $V^\star$ seja X subespaço vetorial de V ou não.

Teorema .15 *Se W é um subespaço vetorial de V, V tem dimensão finita, então $W^{00} = W$ para isso utilizamos a identificação dada por L do Teorema .11, isto é, $W^{00} = L(W)$.*

Demonstração Se $u \in W$ então $L_u(f) = f(u) = 0$ para todo $f \in W^0$. Logo, $W \subset W^{00}$ via identificação por L. Agora, veremos que se $u \notin W$, então $L_u \notin W^{00}$. Seja $\beta = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}\}$, a base de V obtido pela extensão da base $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ de W. Então podemos dualizar o vetor relativamente a esta base. Se $u \notin W$, então ele é escrita como combinação finita $u = a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + b_1v_1 + \cdots + b_{n-r}v_{n-r}$ com algum b_j não nulo. Temos que $f = v_j^\star \in W^0$ (prove) e $f(u) = b_j \neq 0$. Como é de dimensão finita, todo elemento de $W^{\star\star}$ é imagem do isomorfismo L, o que conclui a demonstração.

Observação .16 *A demonstração do teorema acima poderá ser adaptado ao caso de dimensão infinita, mas só poderá concluir que $L(V) \cap W^{00} = L(W)$. Uma vez que L é apenas injetiva, poderá existir elementos de W^{00} fora de $L(V)$.*

Teorema .17 *Se W é um subespaço vetorial de V, V tem dimensão finita, então*

$$\dim V = \dim W + \dim W^0.$$

4 Transposta

Definição .18 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, a aplicação $T^t : W^\star \to V^\star$ definida por $T^t(f) = f \circ T : V \to \mathbf{K}$ para cada $f \in W^\star$ é denominado de transposta de T.*

Teorema .19 *Dado $T : V \to W$, temos*

1. $\ker(T^t) = (\mathcal{IM}(T))^0$.
2. *Se V e W forem de dimensão finita, vale também*
   (a) $\dim \mathcal{IM}(T^t) = \dim \mathcal{IM}(T)$;
   (b) $\mathcal{IM}(T^t) = (\ker(T))^0$.

Demonstração $f \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(f) = f \circ T = 0 \Leftrightarrow \forall u \in V$, $f(Tu) = 0$ mas isto é equivalente a $\forall v \in \mathcal{IM}(T)$, $f(v) = 0 \Leftrightarrow f \in (\mathcal{IM}(T))^0$.
(a) Como os espaços são de dimensão finita, temos $\dim \mathcal{IM}(T) + \dim (\mathcal{IM}(T))^0 = \dim W$. Pelo item anterior, Temos que $\dim \mathcal{IM}(T) + \dim \ker(T^t) = \dim W$. Mas $\dim \mathcal{IM}(T^t) + \dim \ker(T^t) = \dim W$ e consequentemente, $\dim \mathcal{IM}(T) = \dim \mathcal{IM}(T^t)$.
(b) Como $\dim (\ker(T))^0 = \dim \mathcal{IM}(T) = \dim \mathcal{IM}(T^t)$ (porquê?), basta mostrar que $\mathcal{IM}(T^t) \subset (\ker(T))^0$. Considere $f \in \mathcal{IM}(T^t)$. Então $f = T^t(g) = g \circ T$ para algum $g \in W^\star$ e logo, para todo $u \in \ker(T)$, $f(u) = g(Tu) = g(0) = 0$. Logo, $\mathcal{IM}(T^t) \subset (\ker(T))^0$.

Teorema .20 *Se $T : V \to W$, transformação linear no espaços de dimensão finita e α e β são bases de V e W respectivamente, então $[T]_{\alpha^\star}^{\beta^\star} = \left([T]_\beta^\alpha\right)^t$.*

5 Adjunta - Imagem no Espelho

Como vimos para cada transformação linear $T : V \to W$ podemos associar a transformação linear $T^t : W^\star \to V^\star$. O produto interno nos fornece uma forma de permanecer com V e W, isto vai ser particularmente interessante para operadores lineares $T : V \to V$. Desta forma temos podemos analisar as transformações lineares sob um novo ângulo. Este novo ponto de vista é particularmente interessante quando ocorre a existência de relações entre T e $T^\star$.
Considere $T : V \to W$ uma transformação linear, com V e W munidos dos produtos internos $\langle , \rangle_V$ e $\langle , \rangle_W$, respectivamente.
A adjunta de T uma transformação linear $S : W \to V$, tal que, para cada $v \in V$ e $w \in W$ quaisquer se tenha:

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, S(w) \rangle_V .$$

Assim, a imagem $S(w) \in V$ de um vetor arbitrário $w \in W$ é, por definição, aquele vetor de V tal que representa o funcional linear $\langle T(v), w\rangle_W : V \to \mathbf{K}$. O teorema .11 garante que $S(w)$ existe e é único. Além disso, dados $w, w' \in W$, $\lambda \in \mathbf{K}$ tem-se, para cada $v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle v, S(w+\lambda w')\rangle_V &= \langle T(v), w+\lambda w'\rangle_W \\ &= \langle T(v), w\rangle_W + \bar{\lambda}\,\langle T(v), w'\rangle_W \\ &= \langle v, S(w)\rangle_V + \bar{\lambda}\,\langle v, S(w')\rangle_V \\ &= \langle v, S(w)+\lambda S(w')\rangle_V . \end{aligned}$$

Assim $S(w+\lambda w')$ e $S(w)+\lambda S(w')$ são vetores em V cujos produto interno por qualquer vetor $v \in V$ são iguais. Portanto, $S(w+\lambda w') = S(w)+\lambda S(w')$. Vamos denotar S por $T^\star$.

Teorema .21 *Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ bases ortonormais. Se $A = [T]_\alpha^\beta = [a_{ij}]_{m\times n}$ a matriz do operador $T : V \to W$ com respeito às bases α e β então a matriz da adjunta $T^\star : W \to V$ com respeito a β e α é a transposta $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$ de A.*

Demonstração A matriz das transformações T e $T^\star$ são dadas pelas relações

$$\begin{aligned} T(u_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_j \;\; (j = 1, \ldots, n) \\ T^\star(v_i) &= \sum_{r=1}^{n} b_{ri} u_r \;\; (i = 1, \ldots, m). \end{aligned}$$

Onde $B = [b_{ri}]_{n\times m}$ é a matriz de $T^\star$ com respeito às bases β e α. Como ambas as bases são ortogonais, temos, para cada $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$:

$$b_{ji} = \langle u_j, T^\star(v_i)\rangle_V = \langle T(u_j), v_i\rangle_W = a_{ij},$$

portanto, $B = A^t$, transposta de A.
Desta forma quando as bases são ortonormais o operador $T^\star$ coincide com T^t.

Teorema .22 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno. Para todo subespaço vetorial $W \subset V$ vale a decomposição em soma direta $V = W \oplus W^\perp$.*

Demonstração Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal, cujos m primeiros elementos $u_1, \ldots, u_m$ formam uma base de W (começa-se com uma base de W complementa ela para tornar uma base de V e aplica-se Gram Schmidt). Para cada $v \in V$, $v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = z + w$, onde $z = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m$ e $w = a_{m+1}u_{m+1} + \cdots + a_nu_n \in W^\perp$. Portanto, $V = W + W^\perp$. Como $W \cap W^\perp = \{0\}$, segue que $V = W \oplus W^\perp$.

Corolário .23 $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Corolário .24 *Para todo subespaço vetorial $W \subset V$, vale $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.*

Demonstração Em geral, qualquer que seja $x \subset V$, vale que $\left(X^\perp\right)^\perp \subset X$. Em particular, o subespaço W esta contido em $\left(W^\perp\right)^\perp$. Do corolário anterior vale que

$$\dim\left(W^\perp\right)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W,$$

logo $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.

Teorema .25 *Dada a transformação linear $T : V \to W$, entre espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno, tem-se*

$$\begin{aligned}\ker(T^\star) &= \mathcal{IM}(T)^\perp,\\ \mathcal{IM}(T^\star) &= \ker(T)^\perp,\\ \ker(T) &= \mathcal{IM}(T^\star)^\perp \text{ e}\\ \mathcal{IM}(T) &= \ker(T^\star)^\perp\end{aligned}$$

Demonstração Basta verificar a primeira das igualdades, pois as outras seguem por utilizar $T^{\star\star} = T$ e $V^{\perp\perp} = V$. Agora,

$$\begin{aligned}v \in \ker(T^\star) \Leftrightarrow T^\star(v) = 0 \Leftrightarrow \langle u, T^\star(v)\rangle = 0 \text{ para todo u } \in V\\ \Leftrightarrow \langle T(u), v\rangle = 0 \text{ para todo u } \in V \Leftrightarrow v \in \mathcal{IM}(T)^\perp.\end{aligned}$$

Corolário .26 *Para que um sistema de m equações lineares com n incógnitas*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_j \;\; (i = 1, \ldots, m)$$

tenha solução é necessário e suficiente que o vetor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ seja perpendicular a toda a solução $y = (y_1, \ldots, y_m)$ do sistema homogêneo transposto

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_j = 0 \;\; (i = 1, \ldots, m).$$

Demonstração Considere $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pelo último teorema o sistema $Tx = b$ tem solução se, e somente se, b é ortogonal ao núcleo de $T^\star$, isto é, todas as soluções $y \in \mathbb{R}^m$ do sistema homogêneo $T^\star y = 0$.

Teorema .27 *O posto de $T^\star$ é igual ao posto de A.*

Alguns operadores importantes

1. Se $T^\star = A$ é denominado de auto adjunto. Para diferenciar o caso real do complexo, também pode ser chamado de simétrico (caso real) e hermitiano (caso complexo), mas chamaremos simplesmente de auto adjunto em muitos casos, só será mencionado como auto adjunto. Alguns casos especiais de auto adjuntos importantes são $T^\star T$ e $T^\star + T$.

2. $T^\star = T^{-1}$. Devido a diferença significativa sobre algumas propriedades do caso real e do complexo, usaremos nome especial para caso real (denominado de ortogonal) e para o caso complexo (denominado de unitário). Caso não precise distinguir, escreveremos a propriedade em vez de citar pelo nome. O caso bastante importante deste tipo é a mudança de coordenadas, de uma base ortonormal para outra base ortonormal.

3. $TT^\star = T^\star T$ então T é denominado de operador normal. A condição é bem mais fraca que nos casos de auto adjunta ou $T^\star = T^{-1}$ (auto adjunta, ortogonal e unitário são normais) mas também é parte importante do estudo dos operadores.

4. $P^2 = P$ é denominado de operadores de projeção. Sob que condições $P^\star = P$.

5. Se tiver o produto interno, o operador auto adjunto que satisfaz a condição $\forall v \in V : \langle v, T(v)\rangle > 0$ é denominado de positivo. Note que ele tem a ver com o adjunto e o produto interno.

6 Exercícios

1. Demonstre o teorema .20.

2. Mostre que se $X \subset V$ e $W = \mathrm{span}\{X\}$, então $X^0 = W^0$.

3. Considere os subespaços W_1 e W_2 de V, mostre que:

- **a)** Se $W_1 \subset W_2$ então $W_2^0 \subset W_1^0$.
- **b)** $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap w_2^0$.
- **c)** No caso de dimensão finita, $V = W_1 \oplus W_2$, implica que $W_1^0 \cap W_2^0 = \{0\}$.

4. Mostre que $(A + cB)^\star = A^\star + \bar{c}B^\star$, $(AB)^\star = B^\star A^\star$ e se A for inversível, $(A^{-1})^\star = (A^\star)^{-1}$.

5. Operador com a propriedade $A^t = -A$ é denominado de anti simétrico. Reescreva a nota de aula, para mostrar que no caso real, qualquer operador é soma de forma única, de operador simétrica e anti simétrico. Agora, pense em fazer o mesmo no caso complexo.

6. Explique a importância de usar a base ortonormal quanto trabalha com a matriz transposta, mesmo sem estar usando o espaço dual.

7. Mostre que se A for auto adjunto, $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $v \in V$.

8. Mostre que, se V for espaço de dimensão finita, então $f(u) = 0$ para todo $f \in V^\star$, implica que $u = 0$.

9. Considere os funcionais do $(\mathbb{R}^4)^\star$: $f_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$, $f_2 = 2x_2 + x_4$ e $f_3 = -2x_1 - 4x_3 + 3x_4$. Encontre uma base para o espaço gerado por estes funcionais e uma base para os vetores $\mathbb{R}^4$ que são anulados por estes funcionais.

10. Se f é um funcional linear não nulo sobre um espaço vetorial V, então o seu núcleo é um hiperespaço vetorial de V. Recíprocamente, cada hiperespaço de V é o núcleo de um (não único) funcional linear não nulo. (adote a seguinte definição: hiperespaço vetorial de V é um subespaço maximal próprio de V).