Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Gabarito da P1 de Tópicos de Matemática Aplicada – GAN00030
Professor: Jones Colombo

08/05/2018

---

1. $[2,3pt]$ **(a)** [1,2pt] Considere $g(x) = \log_{x+2}(x^2 - 3x - 4)$. Determine o domínio da função $g(x)$.

   (b)[1,1pt] Sabendo que $\log_x a = 3$, $\log_x b = 5$ e $\log_x c = 4$, calcule $\log_x \left(\frac{a^4}{b^3 c}\right)$.

   Solução: a) Precisamos que $x+2 > 0$ e que $x+2 \neq 1$, e também, que $x^2-3x-4 > 0$. A primeira parte devemos ter que $x > -2$ e $x \neq -1$. A outra condição, segue da observação: $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) > 0$, desde que, $x < -1$ ou $x > 4$. Todas essas condições juntas obtemos: $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < -1 \text{ e } x > 4\}$.

   b)
$$\begin{aligned}\log_x \left(\frac{a^4}{b^3 c}\right) &= \log_x(a^4) - \log_x(b^3 c)\\ &= \log_x(a^4) - (\log_x(b^3) + \log_x(c))\\ &= 4\log_x(a) - (3\log_x(b) + \log_x(c))\\ &= 4 \times 3 - (3 \times 5 + 4) = 12 - 19 = -7\end{aligned}$$

---

2. $[2,3pt]$ Considere que $y = y(x)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 = 6xy$.

   a) [1,0pt] Encontre y'.

   b) [1,3pt] Veja que a curva passa pelo ponto $(3,3)$. Encontre a equação da reta tangente neste ponto.

   Solução: a) Derivando y pensando que y é uma função de x. Temos
$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy' \Rightarrow 3(y^2 - 2x)y' = 3(2y - x^2) \text{ se } y^2 - 2x \neq 0, y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

   b) De fato, o ponto $(3,3)$ satisfaz $3^2 + 3^2 = 6 \times 3 \times 3$. A equação da reta tangente passando por este ponto é
$$y - 3 = m(x - 3), \text{ com } m = \frac{6-9}{9-6} = -1.$$

   Logo, $y = -x + 3 + 3 = -x + 6$.

---

3. $[3,0pt]$ Considere a função $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$. Faça o seguinte:

(a) Calcule o domínio D_f da função $f(x)$ e verifique que $f(-x)=f(x)$ para todo $x\in D_f$;

(b) Calcule as assíntotas;

(c) Calcule e estude o sinal de $f'(x)$;

(d) Calcule e estude o sinal de $f''(x)$;

(e) Use as informações obtidas acima faça um esboço do gráfico de $f(x)$;

Solução: a) (0,2 domínio +0,2 pela verificação da simetria) Iniciamos observando para que $x\in D_f$ necessitamos que $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$. Portanto, $D_f=\{x\in\mathbb{R} : x\neq \pm 1\}$. E calculando

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}=f(x)\ \forall x\in D_f.$$

b) (cada limite vale 0,1pt se acertar apenas um limite ganha 0,2pt) Vamos iniciar calculando os limites para determinar se o ponto $x=-1$ e $x=1$ nossos candidatos para assíntota vertical

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty$$

Observe que, nos dois primeiros limites acima, quando $x\to -1^-$ o numerador vai para 2 e o denominador vai para 0 com valores positivos.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{2}{1-1/x^2}\right)=2$$

Observe que nos últimos limites $\frac{x^2}{x^2}$ se cancelam e $1/x^2\to 0$, logo $1-1/x^2\to 1$, com valores menores que 1 e daí o todo o limite tende a 2 com valores maiores que 2.

c) (calculou correto ganha 0,4pt, fez a análise do sinal correto 0,4pt) Derivando

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[2x^2]'(x^2-1)-[2x^2][x^2-1]'}{(x^2-1)^2}=\frac{4x(x^2-1)-2x^2\times 2x}{(x^2-1)^2}\\ &= \frac{4x^3-4x-4x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

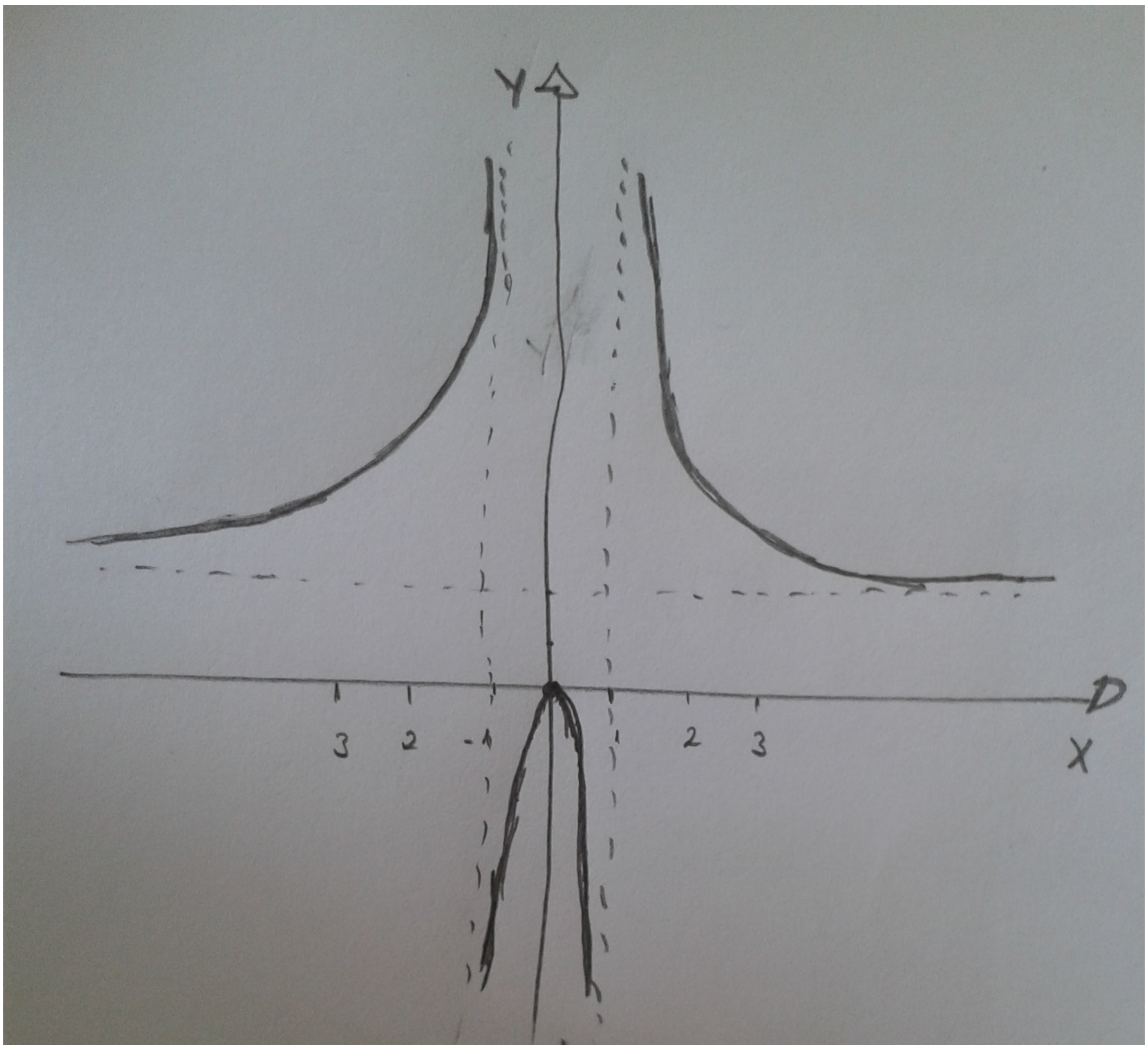
Veja que o denominador sempre é positivo para todo $x\in D_f$, já o numerador depende do sinal contrário do sinal de x. Portanto, se $x<0$ $f'(x)>0$ e quando $x>0$ temos $f'(x)<0$.

d) (derivou e analisou o sinal corretamente ganha 0,5pt) Vamos calcular a segunda derivada

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[-4x]'(x^2-1)^2-(-4x)[(x^2-1)^2]}{(x^2-1)^4}\\ &= \frac{-4(x^2-1)^2+4x\times 2\times(x^2-1)\times 2x}{(x^2-1)^4}\\ &= \frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}=\frac{12x^4-8x^2-4}{(x^2-1)^4}.\end{aligned}$$

Observe que o sinal da 2ª derivada depende apenas do sinal do denominador $x^2 - 1$, uma vez que o numerador é $12x^2 + 4 > 0$ para todo $x \in D(f)$. Logo $f''(x) > 0$ se $x < -1$ ou se $x > 1$ e $f''(x) < 0$ se $-1 < x < 1$.

e) (vale 0,7pt assim distribuídos: desenhou somente as assíntotas vale $0,1pt$.) Para fazer o esboço do gráfico comece marcando as retas $x = -1$, $x = 1$ e $y = 2$. Lembre-se que quando $x \to -\infty$ $f(x) \to 2^+$ e quando $x \to -1^-$ $f(x) \to +\infty$, além disso, nesse intervalo a função é crescente e tem boca voltada para cima. Já no intervalo $(-1, 0)$, veja que $f(0) = 0$ e $x \to -1^+$ $f(x) \to -\infty$. A função ainda é crescente nesse intervalo, mas a boca é voltada para baixo. Com esses dados temos condições de fazer o esboço de $(-\infty, 0)$. Agora use que $f(-x) = f(x)$ e faça o restante do gráfico.



---

4. $[2,4pt]$ Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-4)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$

Solução: a) (Vale 1,0pt)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-4)} &= \lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(x-4)(2+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{4-x}{2\sqrt{x}(x-4)(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{2\times\sqrt{4}(2+\sqrt{4})} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

b) (Vale 1,4pt) Observe que se avaliarmos os polinômios x^3-3x+2 e $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ em $x=1$, ambos se anulam. Logo $x-1$ divide a ambos. Dividindo obtemos: x^2+x-2 que também possui $x=1$ como raiz e dividindo $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ obtemos x^3-3x+2 que também possui $x=1$ como raiz. Portanto, podemos dividir ambos por $(x-1)^2 = x^2-2x+1$ e obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x^2-x-2)(x^2-2x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x^2-x-2)} = \frac{1+2}{1-1-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$
