Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Gabarito da P2 – GAN00030
Professor: Jones Colombo

03/07/2018

---

1. $[1,8pt]$ Calcule as seguintes integrais:
   (a) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\, dx$
   (b) $\int x^2(4x + 27e^{3x})\, dx$
   (c) $\int \left(\frac{e^{3u}+e^{-3u}}{2}\right) du$

   Solução: (a)
$$\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2.$$

   (b)
$$\begin{aligned}\int x^2(4x + 27e^{3x})\, dx &= \int 4x^3\, dx + 27\int x^2 e^{3x})\, dx \\ &= x^4 + 27\left(\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\, dx\right) \\ &= x^4 + 27\left(\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx\right)\right) \\ &= x^4 + 9x^2e^{3x} - \frac{54}{9}xe^{3x} + \frac{54}{27}e^{3x} \\ &= x^4 + e^{3x}\left(9x^2 - 6x + 2\right).\end{aligned}$$

$$\textbf{(c)} \quad \int \left(\frac{e^{3u}+e^{-3u}}{2}\right) du = \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3u}-e^{-3u}}{2}\right).$$

---

2. $[1,0pt]$ Considere $f(x,y,z) = xy^2z^3 - 7x + 5y^2 - 3$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.

   Solução: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2z^3 - 7$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xyz^3 + 10y$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3xy^2z^2$.

---

3. $[1,8pt]$ Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os valores de máximos e mínimos da função $f(x,y) = 2x^2+y^2+2y$ com a restrição $x^2+y^2 = 5$.

Solução: Olhe a página 86 da apostila da Maria Emília e da Carla. Os pontos encontrados são: $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$ e $(-2,1)$. Avaliando os pontos obtemos:

$$f(0,\sqrt{5}) \cong 9,5, \;\; f(0,-\sqrt{5}) \cong 0,5, \;\; f(2,1) = 11 \text{ e } f(-2,1) = 11.$$

Portanto, $(0,-\sqrt{5})$ é um mínimo e os pontos $(2,1)$ e $(-2,1)$ são pontos de máximo.

---

4. $[1,8pt]$ Encontre os pontos críticos de $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 32y + 4$ e classifique cada um deles como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela.

Solução: Para encontrar os pontos críticos precisamos resolver

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= x^2 + x - 6 = 0 \\ f_y(x,y) &= 32 - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Obtemos $(-3,-4)$, $(2,-4)$, $(-3,4)$ e $(2,4)$.

Vamos calcular $f_{xx}(x,y) = 2x+1$, $f_{xy}(x,y) = 0$ e $f_{yy}(x,y) = -4y$, a Hessiana fica $H(x,y) = (2x+1) - 4y = -8xy - 8y$.

Como $f_{xx}(-3,-4) = -5 < 0$ e $H(-3,-4) = -80 < 0$, logo $(x,y) = (-3,-4)$ é um ponto de sela. Como $f_{xx}(2,-4) = 7 > 0$ e $H(2,-4) = 80 > 0$, logo $(x,y) = (2,-4)$ é um ponto de mínimo relativo. Como $f_{xx}(-3,4) = -8 < 0$ e $H(-3,4) = 80 > 0$, logo $(x,y) = (-3,4)$ é um ponto de máximo relativo. Como $f_{xx}(2,4) = 5 > 0$ e $H(2,4) = -80 < 0$, logo $(x,y) = (2,4)$ é um ponto de sela.

---

5. $[1,8pt]$ Responda com as suas palavras, mas o mais próximo possível da definição dada.

a) O que é uma equação diferencial?

b) Qual a diferença entre equação diferencial parcial e equação diferencial ordinária.

c) O que caracteriza uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem com coeficiente constantes?

Solução: a)

---

6. $[1,8pt]$ Resolva a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

Solução: a) O fator integrante será: $e^{\int 1/x dx} = e^{\ln|x|} = |x|$. Logo,

$$xy' + y = [xy]' = x^2 \Rightarrow xy = \frac{x^3}{3} + k \Rightarrow y = \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x}.$$

a restrição $y(2) = 3$ implica $3 = \frac{4}{3} + \frac{k}{2} \Rightarrow k = \frac{10}{3}$.
