Tópicos de Matemática Aplicada
1^o Semestre de 2018

Gabarito do teste aplicado em 26/04/2018

Questão 1 Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Solução: Inicialmente veja que a função é polinomial, por este motivo o domínio são todos os valores reais. Derivando:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

Logo os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde $f'(x) = 0$ são $x = 0$ e $x = 3$. Observe que $x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo o sinal de f' depende somente do sinal de $x - 3$. Portanto, $f'(x) < 0$ se $x < 3$ e $f'(x) > 0$ se $x > 3$.

Derivando mais uma vez obtemos

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12(x^2 - 2x)$$

Portanto, como $f''(0) = 0$ (é um candidato para ponto de inflexão) e $f''(3) = 36 > 0$ segue que $x = 3$ é um mínimo local. Além disso, $f''(x)$ é um polinômio de grau 2 com raízes $x = 0$ e $x = 2$ e boca voltada para cima.

Disto tiramos que em $(-\infty, 0)$ a concavidade tem boca voltada para cima, de (0,2) tem boca voltada para baixo e em $(2, \infty)$ tem boca voltada para cima novamente. Além de que $x = 0$ (pois muda o sinal da 2ª derivada) e $x = 2$ são pontos de inflexão.

Com $f(0) = 0$, $f(2) = -16$ e $f(3) = -27$, temos os elementos para fazer o esboço do gráfico da função. Inicialmente marque os pontos: $(0, 0)$, $(2, -16)$ e $(3, -27)$. Observar que no intervalo $(-\infty, 0)$ a função vem do $+\infty$, é decrescente e tem a boca voltada para cima. No intervalo $(0, 2)$ ela continua decrescente, mas agora a boca é voltada para baixo. No intervalo $(2, 3)$ ela é decrescente e com boca voltada para cima e por fim no intevalo $(3, +\infty)$ a função se torna crescente e continua com boca voltada para cima.

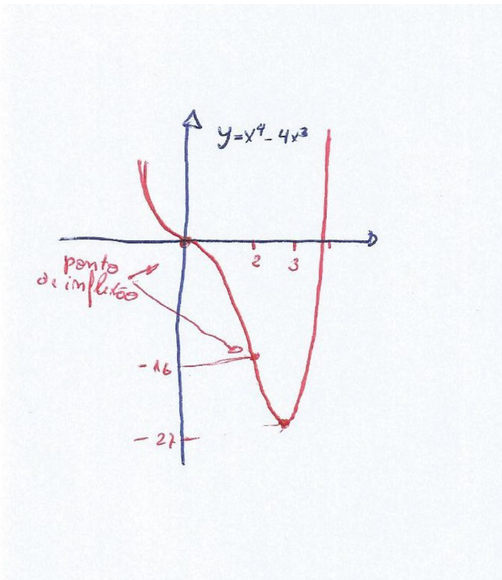

Figure 1: Esboço do gráfico de $f(x_) = x^4 - 4x^3$

Questão 3 Se $a, b \in \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $\log_{ab}(a) = 4$. Calcule

$$\log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{b}}\right).$$

Solução: Veja que $\log_{ab}(a) = 4 \Leftrightarrow (ab)^4 = a \Leftrightarrow b^4 = \frac{1}{a^3} \Leftrightarrow b = a^{-\frac{3}{4}}$. Logo

$$\begin{aligned}
\log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{b}}\right) &= \frac{1}{3}\log_{ab}(a) - \frac{1}{5}\log_{ab}(b) \\
&= \frac{1}{3}(4) - \frac{1}{5}\log_{ab}\left(a^{-\frac{3}{4}}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)\log_{ab}(a) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{3}{20}(4) = \frac{4}{3} + \frac{3}{5} = \frac{29}{15}.
\end{aligned}$$

Questão 5 Calcule o $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$.

Solução: Multiplique pelo conjugado

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+100-100}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$
