Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística
Professor: Jones Colombo

Gabarito da P2 de Álgebra Linear Aplicada - GAN00143

31/10/2018

1. $[2,7]$ Considere as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$: $\alpha = \{(1,1),(0,-1)\}$ e $\beta = \{(2,3),(-3,5)\}$:

   a) Determine a matriz mudança de coordenadas de α para β ($[I]^{\alpha}_{\beta}$).

   b) Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular $[v]_\beta$, sendo $[v]_\alpha = (2,4)$.

   c) Determinar a matriz de mudança de coordenadas de β para α.

   Solução: a) Precisamos resolver as seguintes equações vetoriais

   $$(1,1) = x(2,3) + y(-3,5) \text{ e } (0,-1) = x(2,3) + y(-3,5),$$

   que são equivalentes a resolver dois sistemas em que os coeficientes são os mesmos, isto significa que podemos considerar

   $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & : & 1 & 0 \\ 3 & 5 & : & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{8}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & : & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \end{bmatrix}.$$

   Portanto, $[I]^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

   b) Para encontrarmos as coordenadas do vetor v com respeito a base β basta multiplicarmos a matriz $[I]^{\alpha}_{\beta}$ pelo vetor $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e temos $[v]_\beta = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}$.

   c) Para obter $[I]^{\beta}_{\alpha}$ basta invertermos a matriz $[I]^{\alpha}_{\beta}$, logo

   $$[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

---

2. $[2,4]$ Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   a) Se A é uma matriz diagonalizável e invertível, então A^{-1} será diagonalizável.

   b) Seja A uma matriz 2×2. Então A e A^t tem os mesmos autovetores.

   c) Se A, B e C são matrizes quadradas, tais que A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

d) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ representa uma reflexão numa reta.

Solução: a) (VERDADEIRO) Se A é diagonalizável, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Como A é invertível, o 0 (zero) não é autovalor, logo todos os valores da diagonal de D são diferentes de zero. O inverso de D é ainda uma matriz diagonal, onde cada elemento da diagonal é o inverso multiplicativo do elemento correspondente. Mas $D^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$. Portanto, a própria P é uma das matrizes que diagonaliza A^{-1}.

b) (FALSO) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ calculando os polinômios característicos de $\Delta_A(x) = \Delta_{A^t}(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$. Portanto, ambas tem os mesmos autovalores. Por outro lado, considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ então $\Delta_A(x) = x^2 - 4x = x(x-4)$. Se calculamos o autovetor associado a $x = 0$ obtemos $(1, -1)$ e se calculamos o autovetor associado ao autovalvor $x = 0$ em A^t obtemos $(3, -1)$.

c) (VERDADEIRO) De B ser semelhante a C sabemos que existe uma matriz invertível Q tal que $B = Q^{-1}CQ$, e do fato de, A ser semelhante a B sabemos que existe uma matriz invertível P tal que $A = P^{-1}BP$, logo multiplicando, por P^{-1} e por P a identidade $B = Q^{-1}CQ$ temos $P^{-1}BP = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}CQP$, mas $A = P^{-1}BP$ de onde tiramos $A = (QP)^{-1}CQP$, mas isso quer dizer que A é semelhante a C.

d) (FALSO) Se isso fosse verdade, a matriz ao quadrado deveria ser igual a identidade, mas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2,2 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, -1) = (1, 1, 1)$ e $T(0, -1) = (-1, -1, 2)$.

a) Determine $T(x, y)$.

b) Se $\alpha = \{(1, -1), (0, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, determine $[T]^\alpha_\beta$.

c) Determine uma base $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ tal que $[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: a) Vamos determinar como T age sobre a base canônica do $\mathbb{R}^2$, para isso veja que

$$T(1, 0) = T((1, -1) - (0, -1)) = T(1, -1) - T(0, -1) = (1, 1, 1) - (-1, -1, 2) = (2, 2, -1),$$
$$T(0, 1) = T(-(0, -1)) = -T(0, -1) = -(-1, -1, 2) = (1, 1, -2).$$

Logo,

$$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(2, 2, -1) + y(1, 1, -2) = (2x + y, 2x + y, -x - 2y)$$

b) Como

$$\begin{aligned} T(1,-1) &= (1,1,1) = 1(1,0,-1) + 1(0,1,2) + 0(1,2,0) \\ T(0,-1) &= (-1,-1,2) = 0(1,0,-1) + 1(0,1,2) + (-1)(1,2,0) \end{aligned}$$

Temos que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Precisamos determinar uma base $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} T(1,-1) &= 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ T(0,-1) &= 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{aligned}$$

Disto vemos que devemos adotar para $v_1 = (1,1,1)$, $v_3 = (-1,-1,2)$ e para v_2 qualquer outro vetor de tal forma que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja LI. Por exemplo podemos adotar $v_2 = v_1 \times v_3 = (3,-3,0)$.

---

3. $[2,7]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (-2y - 2z, 2x + 4y + 2z, -2x - 2y).$$

a) Seja α a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e considere $A = [T]^{\alpha}_{\alpha}$. Encontre uma base para $W = \mathrm{Col}(A)$ (o espaço coluna de A) e $Z = \mathrm{N}(T)$ (o espaço nulo de A).

b) Este operador é diagonalizável? Se for, encontre uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ seja diagonal, se não for explique o motivo.

c) Se o operador fosse diagonalizável, explique qual seria o procedimento para determinar uma base para $\mathrm{Col}(D)$ e $\mathrm{N}(D)$.

Solução: a) Como α é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

escalonando obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O vetor típico que esta no espaço nulo deve satisfazer $x - z = 0$ e $y + z = 0$, daí, $(x,y,z) = (z,-z,z) = z(1,-1,1)$. Portanto, $Z = \mathrm{Span}\,\{(1,-1,1)\}$ e como a primeira e a segunda coluna tem pivô, segue que os vetores $W = \mathrm{Span}\,\{(0,2,-2),(-2,4,-2)\}$.

b) Vamos calcular o polinômio característico

$$\Delta_A(x) = \det(xI - A) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2 = 0$$

Portanto, os autovalores são $x = 0$ e $x = 2$, associado ao autovalor $x = 2$ temos $(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)$ e já calculamos o autovetor associado ao autovalor 0 que é $(-1, 1, 1)$. Portanto, este operador é diagonalizável. Considerando a base $\beta = \{(1, -1, 1), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$, temos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) Como já calculamos a matriz P para obtermos uma base de $N(D)$ e $\mathrm{Col}(D)$ basta multiplicar pela matriz P os vetores obtidos para serem a base de $\mathrm{N}(A)$ e $\mathrm{Col}(A)$, isto é, $N(D) = \mathrm{Span}\,\{P^{-1}(1, -1, 1) = (1, 0, 0)\}$ e

$$\mathrm{Col}(D) = \mathrm{Span}\left\{P^{-1}(0, 2, -2) = (0, -2, 2), P^{-1}(-2, 4, -2) = (0, -2, 4)\right\}.$$
