Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística
Professor: Jones Colombo
Gabarito da P2′ de Álgebra Linear Aplicada - GAN00143

14/11/2018

1. [2, 7] Considere as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$: $\alpha = \{(1,2),(3,5)\}$ e $\beta = \{(1,-1),(1,-2)\}$:

   a) Determine a matriz mudança de coordenadas de α para β ($[I]^{\alpha}_{\beta}$).

   b) Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular $[v]_\beta$, sendo $[v]_\alpha = (2,4)$.

   c) Determinar a matriz de mudança de coordenadas de β para α.

   Solução: (a) Precisamos expressar os vetores da base α em termos dos vetores da base β, isto é, precisamos resolver os seguintes sistemas lineares

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ -x+2y &= 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y &= 3 \\ -x+2y &= 5 \end{cases}$$

   Precisamos resolver dois sistemas onde os coeficientes do sistema são o mesmo, para isso, montamos uma matriz aumentada e escalonamos ela

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \end{bmatrix}.$$

   Portanto, $[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$.

   b) Temos que $[v]_\beta = [I]^{\alpha}_{\beta} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ -38 \end{bmatrix}$.

   c) Para calcular $[I]^{\beta}_{\alpha}$ basta inverter $[I]^{\alpha}_{\beta}$. Logo, $[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

---

2. [2, 4] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   a) Considere

$$A = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -15 & 30 & -10 \\ 30 & 17 & 6 \\ -10 & 6 & 33 \end{bmatrix}.$$

   Então esta matriz é de um operador reflexão em torno do plano $5x - 3y + z = 0$.

   b) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear e $m > n$, então T é injetora.

   c) Se λ é um autovalor de T e T é invertível, então λ^{-1} é autovalor de T^{-1}.

   d) O escalar 0 é um autovalor de T se, e somente se, T não é invertível.

Solução: a) (VERDADEIRO) Para ser a matriz de uma reflexão, ela, ao quadrado, deve ser igual a identidade,

$$A = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -15 & 30 & -10 \\ 30 & 17 & 6 \\ -10 & 6 & 33 \end{bmatrix} \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -15 & 30 & -10 \\ 30 & 17 & 6 \\ -10 & 6 & 33 \end{bmatrix} = \frac{1}{35^2}\begin{bmatrix} 1225 & 0 & 0 \\ 0 & 1225 & 0 \\ 0 & 0 & 1225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, o vetor normal $\vec{n}$ do plano é $5x - 3y + z = 0$ é $(5, -3, 1)$ e quando multiplicamos $A.\vec{n} = -\vec{n}$. Os seguintes vetores $\vec{u} = (1, 0, -5)$ e $\vec{v} = (0, 1, 3)$ geram o plano e $A.\vec{u} = \vec{u}$ e $A.\vec{v} = \vec{v}$. Portanto, estes vetores são mantidos fixos e o outro muda de direção. Portanto, realmente A é a matriz de uma reflexão em torno no plano $5x - 3y + z = 0$.

b) (FALSA) Apesar da sugestão dado pelo teorema do núcleo e da imagem, veja que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(0) = (0, 0)$ é linear, mas não é injetora.

c) (VERDADEIRA) Seja v o autovetor de T associado ao autovalor λ, isto é, $Tv = \lambda v$. Aplique T^{-1} dos dois lados e teremos

$$v = T^{-1}Tv = T^{-1}(\lambda v) = \lambda T^{-1}v \Rightarrow T^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v.$$

d) (VERDADEIRA) ($\Rightarrow$) Seja v um autovetor associado ao autovalor 0, isto é, $Tv = 0$, mas isto significa que $\mathrm{N}(T) \neq \left\{\vec{0}\right\}$. Portanto, T não é injetora e daí não é invertível.

($\Leftarrow$) Se T não é invertível, isto significa também que $\mathrm{N}(T) \neq \left\{\vec{0}\right\}$, logo deve existir um vetor $v \neq \vec{0}$ tal que $Tv = \vec{0}$. Portanto, 0 é um autovalor.

---

3. $[2, 2]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, -1) = (1, -1, 1)$ e $T(1, -2) = (-1, 1, -2)$.

a) Determine $T(x, y)$.

b) Se $\alpha = \{(1, -1), (1, -2)\}$ e $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, determine $[T]^\alpha_\beta$.

c) Determine uma base $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ tal que $[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: a) inicialmente veja que $(1, 0) = 2(1, -1) + (-1)(1, -2)$ e $(0, 1) = 1(1, -1) + (-1)(1, -2)$ Aplicando T nestas igualdades obtemos

$T(1, 0) = 2(1, -1, 1) - (-1, 1, -2) = (3, -3, 4)$ e $T(0, 1) = (1, -1, 1) - (-1, 1, -2) = (2, -2, 3)$.

Daí, $T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(3, -3, 4) + y(2, -2, 3) = (3x + 2y, -3x - 2y, 4x + 3y)$.

b) Para determinar $[T]^\alpha_\beta$ precisamos escrever $T(1, -1)$ e $T(1, -2)$ como combinação linear dos vetores de β.

$$T(1, -1) = (1, -1, 1) = 1(1, 1, 1) + (-2)(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0),$$
$$T(1, -2) = (-1, 1, -2) = (-2)(1, 1, 1) + 3(1, 1, 0) + (-2)(1, 0, 0).$$

Portanto,

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

c) Para obtermos esta matriz basta eleger $\gamma = \{(1, -1, 1), (1, -1, 1) \times (-1, 1, -2), (-1, 1, -2)\} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, -2)\}$.

---

4. [2, 7] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (4x + y - z, 2x + 5y - 2z, x + y + 2z).$$

Este operador é diagonalizável? Se for, encontre uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ seja diagonal, se não for explique o motivo.

Solução: Fixe α a base canônica do $\mathbb{R}^3$, logo

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = (x-3)^2(x-5)$. Logo temos duas raízes repetidas. Vamos procurar os autovetores associados a cada um dos autovalores e obtemos $x = 3$: $\mathrm{N}(A-3I) = \mathrm{Span}\,\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ e para $x = 5$ temos $\mathrm{N}(A-5I) = \mathrm{Span}\,\{(1, 2, 1)\}$. Portanto T é diagonalizável e elegendo a base $\beta = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ a matriz P se torna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
