Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Gabarito da P1 de Matemática para a Economia I – GAN00145
Professor: Jones Colombo

08/10/2018

---

1. $[2,3pt]$ (a) Considere as funções $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$, calcule $g \circ f$ e determine o seu domínio.

   (b) Se $g(x) = \frac{4x+5}{x+1}$. Esta função é invertível? Se for, encontre a expressão para $g^{-1}(x)$.

   Solução: (a) Fazendo a composta $g(f(x)) = \sqrt{f(x)-1} = \sqrt{\sqrt{x^2-1}-1}$ o domínio da composta são os valores de x tais que $x^2-1 \geq 0$ e $\sqrt{x^2-1}-1 \geq 0$. A primeira desigualdade implica em $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ a segunda $x^2-1 \geq 1 \Rightarrow x^2-2 \geq 0$. A interseção destes conjuntos nos dá $D(f) = (-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty)$.

   (b) Começamos com $y = \frac{4x+5}{x+1}$, trocando x por y temos $x = \frac{4y+5}{y+1}$ vamos isolar y

   $x(y+1) = 4y+5 \Leftrightarrow xy-4y = 5-x \Leftrightarrow y(x-4) = 5-x$ se $x-4 \neq 0$ temos $y = \dfrac{5-x}{x-4}$.

   Portanto, sim esta função é invertível se ela for definida em $g : \mathbb{R}-\{-1\} \to \mathbb{R}-\{4\}$.

---

2. $[2,3pt]$ calcula as derivadas de

   a) [1,0pt] $g(x) = \frac{x+\sqrt[4]{x}}{x^2+\ln x}$.

   b) [1,3pt] Obtenha a expressão de y' em termos de x e y se $y = y(x)$ é dado implicitamente pela equação $y^3 + x^2y = x+4$.

   Solução: a) Derivando

   $$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{4x^{3/4}}+1\right)(x^2+\log(x)) - (x+\sqrt[4]{x})\left(2x+\frac{1}{x}\right)}{(x^2+\log(x))^2}.$$

   b) Pensando y como função de x, derivando, em função de x, teremos

   $3y^2y'+2xy+x^2y' = 1 \Rightarrow y'(3y^2+x^2) = 1-3xy$ se $3y^2+x^2 \neq 0$ teremos $y' = \dfrac{1-3xy}{3y^2+x^2}$.

---

3. $[3,0pt]$ Considere a função $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Faça o seguinte:

(a) Calcule o domínio D_f da função $f(x)$ e verifique que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$;

(b) Calcule as assíntotas;

(c) Calcule e estude o sinal de $f'(x)$;

(d) Calcule e estude o sinal de $f''(x)$;

(e) Use as informações obtidas acima faça um esboço do gráfico de $f(x)$;

Solução: (a) Veja

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x).$$

Para determinarmos o domínio precisamos encontrar $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ e $x = 1$. Portanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

(b) Quando x se aproxima de -1 ou 1 o numerador tende a -1 ou 1, enquanto o denominador tende a zero, logo

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \text{ e } \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty.$$

e como é uma função racional cujo polinômio no numerador tem grau maior que o denominador temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(c) Derivando

$$f'(x) = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Veja que o sinal de f' concorda com o sinal de $x^2 - 3$. Portanto, $f'(x) \leq 0$ se $x \in D(f)$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ e $f'(x) < 0$ caso contrário.

(d) Derivando

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Como $x^2 + 3 > 0$ para todo $x \in D(f)$. Segue que o sinal de $f''(x)$ depende do sinal de x e $x^2 - 1$. Analisando vemos que $f''(x) \geq 0$ se $-1 < x < 0$ e $x > 1$ e terá sinal contrário no complemento do domínio.

(e) analisando estes dados teremos um gráfico próximo a

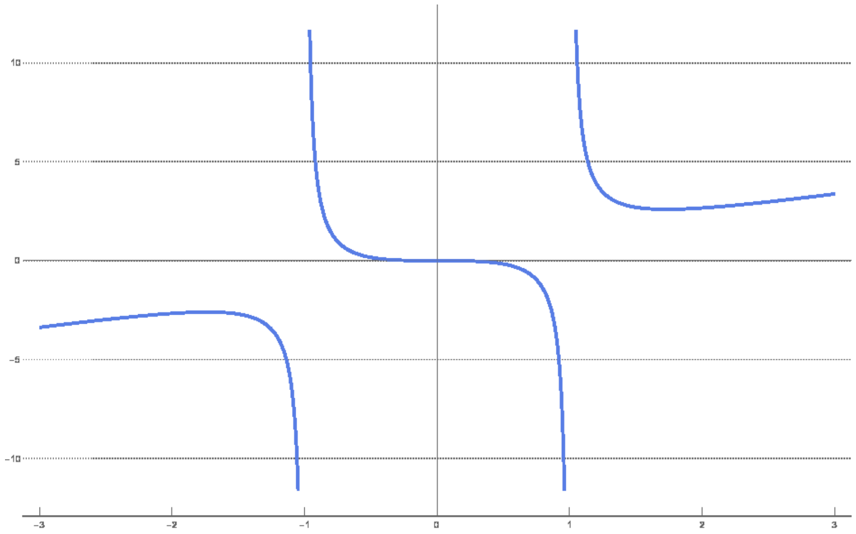

Figura 1: Esboço do gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

---

4. $[2, 4pt]$ Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$

Solução: a) Veja se substituirmos $t=0$ obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t} &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}\right)\left(\frac{\sqrt{2-t}+\sqrt{2}}{\sqrt{2-t}+\sqrt{2}}\right)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t(\sqrt{2-t}+\sqrt{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2-t}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

b) Observe que se avaliarmos os polinômios x^3-3x+2 e $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ em $x=1$, ambos se anulam. Logo $x-1$ divide a ambos. Dividindo obtemos: x^2+x-2 dividindo $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ obtemos x^3-3x+2, mas ainda temos $x=1$ como raiz. Portanto, podemos dividir ambos por $(x-1)^2 = x^2-2x+1$ e obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x^2-x-2)(x^2-2x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x^2-x-2)} = \frac{1+2}{1-1-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$
