Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Gabarito da P1′ de Matemática para a Economia I – GAN00145
Professor: Jones Colombo

07/11/2018

---

1. $[2,3pt]$ (a) Resolva

$$\log_2(x) + \log_{1/2}(x) + \log_4(x) + log_{\sqrt{2}}(x) = \frac{15}{2}.$$

(b) Se $g(x) = \frac{x^3+7x^2+14x+8}{x^2+6x+8}$. Ache o domínio e verifique que g é injetora. Ache $g^{-1}(x)$.

Solução: (a) Veja que $y = \ln_{1/2} x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = x \Leftrightarrow 2^y = x^{-1}$. Como $4 = 2^2$ e $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ temos que a identidade acima é igual a

$$\log_2(x) + \log_2(x^{-1}) + \log_2(x^2) + \log_2(x^{1/2}) = \log_2(x)\left(1 - 1 + 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}$$

Daí, $\log_2(x) = 3$ e, portanto, $x = 8$.

(b) Veja que $x^2+6x+8 = (x+2)(x+4)$. Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \text{ e } x \neq -4\}$. Além disso, ao dividir $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ por $x^2 + 6x + 8$ obtemos $x + 1$. Para ver que a função é injetora, observe que dado $x < y \Rightarrow g(x) = x + 1 < g(y) = y + 1$, isto prova que g é injetora em seu domínio. Já $g^{-1} : \mathbb{R} - \{-3, -1\} \to \mathbb{R} - \{-4, -2\}$ é dada por $g^{-1}(x) = x - 1$.

---

2. $[2,3pt]$ calcula as derivadas de

a) [1,0pt] Obtenha $g'(x)$ quando $g(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{x+1}}$.

b) [1,3pt] Obtenha a expressão de y' em termos de x e y se $y = y(x)$ é dado implicitamente pela equação $x^2y^3 - 5xy^2 = 4 + 4y$.

Solução: a) Derivando obtemos

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{\sqrt{x+1}x+1}} = \frac{3x+2}{4\sqrt{x+1}\sqrt{\sqrt{x+1}x+1}}$$

b) Derivando e isolando y'

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' - 5y^2 - 10xyy' = 4y' \Leftrightarrow y'(3x^2y^2 - 10xy - 4) = 5y^2 - 2xy^3,$$

se $3x^2y^2 - 10xy - 4 \neq 0$ temos que $y' = \frac{5y^2-2xy^3}{3x^2y^2-10xy-4}$.

---

3. $[3,0pt]$ Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{x^3-x}$. Faça o seguinte:

(a) Calcule o domínio D_f da função $f(x)$ e verifique que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$;

(b) Calcule as assíntotas;

(c) Calcule e estude o sinal de $f'(x)$;

(d) Calcule e estude o sinal de $f''(x)$;

(e) Use as informações obtidas acima faça um esboço do gráfico de $f(x)$;

Solução: (a) Os valores de x tais que $x^3 - x = x(x^2-1) = 0$ são $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Portanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{x^2}{-(x^3 - x)} = -\frac{x^2}{x^3 - x} = -f(x).$$

(b) Calculando os limites temos

$$\begin{array}{lcl}
\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, & & \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \\
\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, & & \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, & & \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 & \text{e} & \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.
\end{array}$$

Portanto, $x = -1$ e $x = 1$ são assintotas verticais e $y = 0$ é uma assintota horizontal.

(c) Derivando

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

Veja que tanto x^2+1 como $(x^2-1)^2$ são sempre positivo para todo $x \in D(f)$ assim $f'(x) < 0$ para todo $x \in D(f)$.

(d) Derivando mais uma vez

$$f''(x) = \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Veja que quem determina o sinal de $f'(x)$ são os termos x e $x^2 - 1$. Portanto, se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ temos $f'(x) < 0$ e no complementar, $f'(x) > 0$.

(e) Comece marcando as retas $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$. Analise os limites laterais para saber o comportamento da função próximos dos pontos de exceção do domínio.

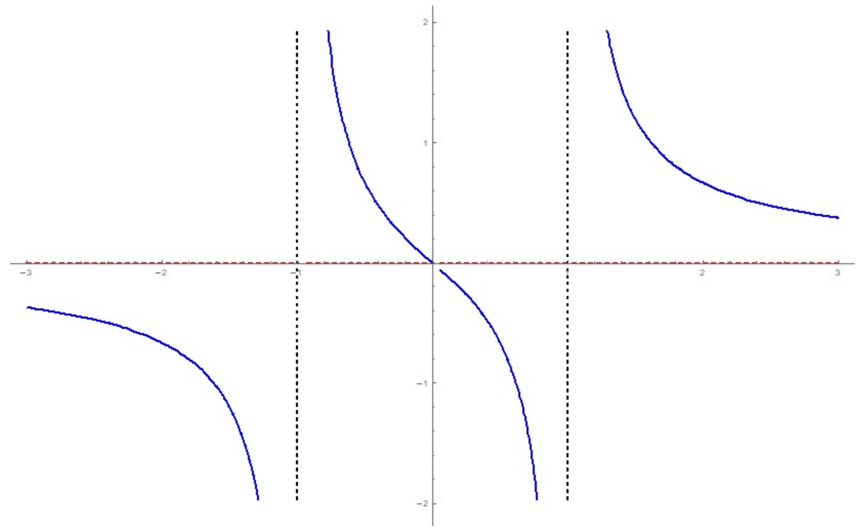

Figura 1: Esboço do gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x}$

4. $[2, 4pt]$ Calcule os seguintes limites:

   a) $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{1}{t-2} - \dfrac{4}{t^2 - 4} \right)$,

   b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 - 3x - 4}$.

   Solução:a) Veja que

$$\lim_{t \to 2} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{4}{t^2 - 4} \right) = \lim_{t \to 2} \left(\frac{t+2}{t^2 - 4} - \frac{4}{t^2 - 4} \right) = \lim_{t \to 2} \frac{t-2}{(t-2)(t+2)} = \frac{1}{4}.$$

   b) Ao avaliar $x = 1$ obtemos em cima 0 e embaixo -6. Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 - 3x - 4} = \frac{0}{-6} = 0.$$