Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Gabarito da P1 de Álgebra Linear Aplicada – GAN00143
Professor: Jones Colombo

Aluno(a):____

17/09/2018

---

1. $[1,8pts]$ Resolva (por escalonamento) o sistema abaixo e expresse a solução na forma paramétrica:

$$\begin{cases} 3x - y + 5z &= 7 \\ 4x + 3y - 2z &= 1 \\ -2x + y - 4z &= -6 \end{cases}$$

Solução: Considere a matriz ampliada do sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2 - 4\ell_1]{\ell_3 \to \ell_3 + 2\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Como a matriz ampliada tem posto 3 e a matriz dos coeficientes tem posto 2. Este sistema não tem solução!

---

2. $[2,9pts]$ Considere os vetores $v_1 = (1, 5, -1, 2)$, $v_2 = (-2, -9, 2, 8)$, $v_3 = (3, 6, -6, 6)$ e $v_4 = (3, 0, -7, 5)$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) [1,2pts] Verifique se os vetores $u_1, u_2 \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ no caso que: (I) $u_1 = (-6, -19, 9, 12)$, (II) $u_2 = (1, 3, -2, 1)$.

(b) [1,1pts] Considere a matriz A onde as linhas são os vetores v_1, v_2, v_3 e u_2. Calcule $\det(A^t)$.

Solução: (a) Queremos saber se existem $x_1, x_2, x3$ e x_4 tal que as equações vetoriais tem solução.

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = u_1 \text{ e } x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = u_2.$$

Observe que precisaremos escalonar o sistema 2 vezes e provavelmente mais uma vez substituindo a quarta coluna por u_2. Vamos organizar para escalonar apenas uma vez e tentar responder aos dois itens, para isso considere:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -6 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 0 & -19 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -7 & 9 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 5 & 12 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -15 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -1 & 24 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -15 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 108 & 179 & -108 & 23 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -15 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

Com isso vemos que $u_1, u_2 \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e se substituirmos v_4 por u_2 o processo de escalonamento será o mesmo, apenas observe a última coluna ao invés da quarta coluna. Segue então que:

$$\det(A^t) = \det(A) = 1 \times 1 \times -3 \times -13 = 39.$$

---

a

3. $[2, 6pts]$ Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

[0,6] a) Se a matriz B for obtida da matriz $A_{n\times n}$ por multiplicar cada linha de A pelo índice dessa linha, então

$$\det(B) = \frac{n(n+1)}{n}\det(A).$$

[0,6] b) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

[0,7] c) Os polinômios $p_1(x) = (x-1)(x+2)$, $p_2(x) = x^2 + 2x$ e $p_3(x) = x^2 - x$ formam uma base de P_2 - conjunto dos polinômios de grau menor igual a 2.

[0,7] d) Se u e v são vetores não nulos então

$$\text{proj}_u(\text{proj}_u(v)) = \text{proj}_u(v).$$

Solução: a) FALSO, considere $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, daí $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e temos que $\det(A) = 1$ e $\det(B) = 2$, mas $2 \neq 3 \times 1$.

b) FALSO, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $AB = AC$, mas $B \neq C$.

c) VERDADEIRO, vamos iniciar verificando que este conjunto é LI, para isso considere a equação vetorial

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0.$$

Avaliando este polinômio em $x = 0$, temos que $a = 0$, mas se $a = 0$, sobra $bp_2(x) + cp_3(x) = 0$. Avaliando este polinômio em $x = 1$ temos que $b = 0$, e, portanto, $c = 0$. Logo este polinômios são LI. Por outro lado, sabemos que o conjunto $\{1, x, x^2\}$ é uma base do P_2. Logo a dimensão destes espaço é 3. Portanto, $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ deve também gerar o P_2, isto é, este conjunto é uma base para o P_2.

d) VERDADEIRO, pois $\text{proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$. Logo,

$$\text{proj}_u(\text{proj}_u(v)) = \frac{\left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u} u\right) \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = \text{proj}_u(v).$$

---

4. $[2, 7pts]$ (a) Encontre a área do triângulo de vértices $(3, 3)$, $(4, 0)$ e $(-2, -1)$.

(b) Calcule a distância entre os planos $2x - y + z = 1$ e $6x - 3y + 3z = -3$.

(c) Encontre a equação normal do plano $(-1, 5, 6) + t(0, -1, 3) + s(2, -1, 2)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Solução: (a) Existem duas formas de fazer esta questão. A primeira é utilizar o exercício 34 da página 118 do livro Anton e Chris. A outra maneira é transportar o triângulo para para a origem e calcular o 1/2 do determinante

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}\right| = \frac{19}{2}.$$

(b) Vamos calcular o tamanho da projeção sobre $n = (2, -1, 1)$ do ponto $u = (0, 1, 0)$ que pertence ao plano $6x - 3y + 3z = -3$.

$$\|\text{proj}_n(u)| = \left|\frac{-1}{6}(2, -1, 1)\right| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(c) Iniciemos calculando um vetor que ortogonal a $(0, -1, 3)$ e $(2, -1, 2)$, isto é, $(0, -1, 3) \times (2, -1, 2) = (1, 6, 2)$. Claramente o ponto $(-1, 5, 6)$ pertence ao plano. Logo a equação normal é

$$(1, 6, 2) \cdot (x + 1, x - 5, x - 6) = 0.$$
