Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Gabarito da VR de Matemática para a Economia I – GAN00145
Professor: Jones Colombo

10/12/2018

Questão 1 [1,5pts] Considere a função $f(x) = x^4 - 8x^2$. Calcule: (a) o domínio de $f(x)$; (b) $f'(x)$; (c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; (d) Verifique que $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Solução: (a) Como $f(x)$ é uma função polinomial temos $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) Derivando obtemos

$$f'(x) = 4x^3 - 16x.$$

(c) Para determinar o limite, veja que é um polinômio e quem domina o limite quando x cresce sempre é o termo de maior ordem. No caso x^4.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

(d) Veja

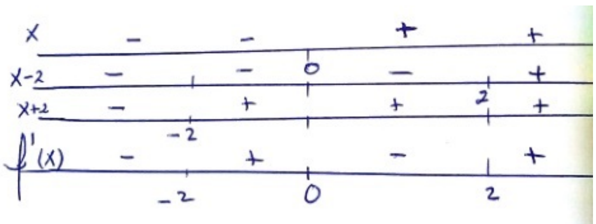
$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 = x^4 - 8x^2 = f(x), \text{ para todo } x \in D(f).$$

Questão 2 [1,5pt] Considere $f(x)$ a mesma função da questão 1. Faça a análise do sinal de $f'(x)$ e calcule e faça a analise do sinal de $f''(x)$.

Solução: Inicialmente veja que

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4) = 12(x^2 - \frac{4}{3}) = 12\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Veja a análise do sinal da $f'(x)$.



A análise do sinal da f'' é mais simples visto que se trata de um polinômio de grau 2 com coeficiente que acompanha o termo x^2 positivo. Portanto, $f''(x) < 0$ se, e só se, $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Questão 3 [1,0pt] Considere $f(x)$ a mesma função da questão 1. Explique o comportamento de $f(x)$ e faça um esboço do gráfico.

Solução: Inicialmente observe que $f \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ assim como quando $x \to -\infty$.

Os pontos críticos não negativos são $x = 0$ e $x = 2$. Testando temos:

- Em $x = 0$, $f(0) = 0$ e $f''(0) = -16 < 0$ isto é um máximo relativo.
- Em $x = 2$, $f(2) = -16$ e $f''(2) = 32$, isto é, um mínimo relativo.
- Em $x = +\frac{2}{\sqrt{3}}$, $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{80}{9}$ e $f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0$ um ponto de inflexão.

Vamos nos concentrar no gráfico para $x > 0$, pois para $x < 0$ usaremos que a função é par.

Observe que em $0 < x < 2$ a $f(x)$ é decrescente, e para valores $x > 2$ ela se torna crescente. Além disso, a concavidade para $0 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ é voltada para baixo e para $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ a concavidade é voltada para cima.

Com isso já temos condições de gerar o seguinte esboço.

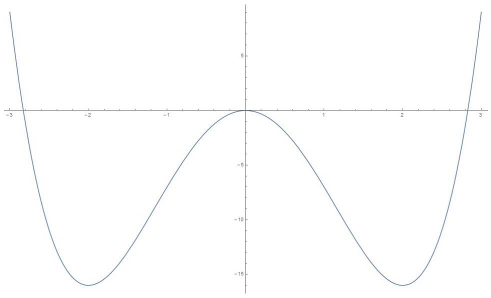


Figura 1: Esboço do gráfico de $f(x) = x^4 - 8x^2$

Questão 3 [3,0pt] Resolva as integrais:

$$\text{a)} \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \qquad \text{b)} \int x \ln(\sqrt{x})\,dx.$$

Solução: a) Cancelado!

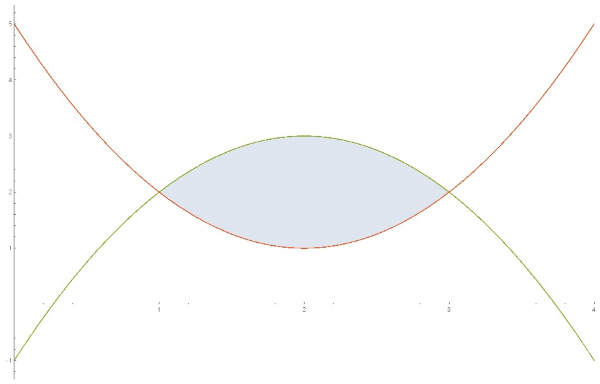
b) Integral por partes. Chame $u = \ln(\sqrt{x}) \Rightarrow du = \frac{1}{2x}$ e $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$, logo

$$\begin{aligned}
\int x \ln(\sqrt{x})\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln(\sqrt{x}) - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(\sqrt{x}) - \int \frac{x}{4}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(\sqrt{x}) - \frac{x^2}{8} + K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{x^2}{4}\right) + K.
\end{aligned}$$

Questão 5 [2,0pt] Faça o esboço da região compreendida pelas curvas $y = x^2 - 4x + 5$, $y = -x^2 + 4x - 1$, e calcule a sua área.

Solução: Precisamos encontrar os pontos em que os gráficos se encontram. Para isso vamos igual

$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 4x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$



Logo, as funções se encontram em $x = 1$ e $x = 3$. Para calcular a área precisamos calcular

$$\begin{aligned}\int_1^3 -x^2 + 4x - 1\,dx - \int_1^3 x^2 - 4x + 5\,dx &= \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6\,dx \\ &= \left[-2\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\right]_1^3 \\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Questão 6 [2,0pt] Calcule a derivada de:

(a) $h(t) = \left(\frac{t+2}{t-3}\right)^3$;

Solução: Utilizando a regra da cadeia seguido da regra do quociente obtemos

$$\begin{aligned}h'(t) &= 3\left(\frac{t+2}{t-3}\right)^2\left[\frac{t+2}{t-3}\right]' \\ &= -\frac{15(t+2)^2}{(t-3)^4}.\end{aligned}$$
