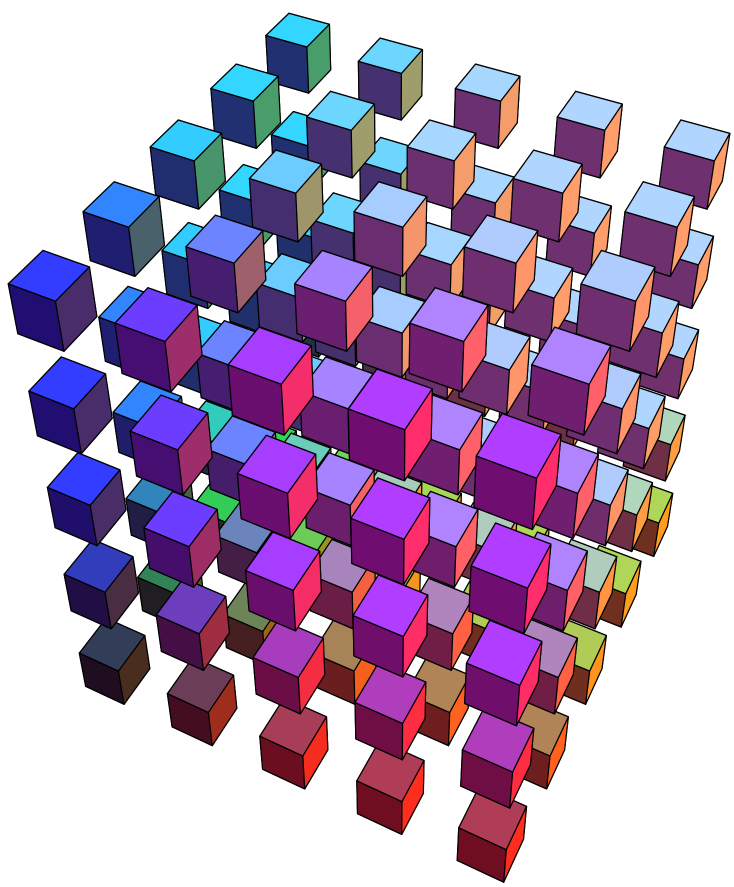
CÁLCULO PARA ECONOMIA E ADMINISTRAÇÃO: VOLUME I



MAURICIO A. VILCHES

Departamento de Análise - IME
UERJ

PREFÁCIO

"Por favor, poderia me dizer que caminho devo seguir agora?
Isso depende bastante de até onde você quer chegar."
Lewis Carrol - Alice no País das Maravilhas

Os tópicos introdutórios que apresentamos neste livro originaram-se, inicialmente, dos problemas práticos que surgiram no dia a dia e que continuaram impulsionados pela curiosidade humana de entender e explicar os fenônemos que regem a natureza.
Historicamente, o Cálculo Diferencial e Integral de uma variável estuda dois tipos de problemas: os associados à noção de derivada, antigamente chamados de tangências e os problemas de integração, antigamente chamados de quadraturas. Os relativos à derivação envolvem variações ou mudanças, como por exemplo, a extensão de uma epidemia, os comportamentos econômicos ou a propagação de poluentes na atmosfera, dentre outros.emplos Como exemplos de problemas relacionados à integração destacam-se o cálculo da áreas de regiões delimitadas por curvas, do volume de sólidos e do trabalho realizado por uma partícula. O principal objetivo do livro foi apresentar os primeiros passos do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável com simplicidade, através de emplos exemplos, mas sem descuidar do aspecto formal da disciplina, dando ênfase à interpretação geométrica e intuitiva dos conteúdos. O livro inclui a maioria da teoria básica, assim como vários exemplos aplicados à Eonomia e Administração e problemas. As provas muito técnicas ou os teoremas mais sofisticados que não foram provados no apêndice, foram ilustrados através de exemplos, aplicações e indicações bibliográficas adequadas e estão incluidos como referência ou leitura adicional para os leitores interessados.
Os conceitos centrais do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável são relativamente profundos e não se espera que possam ser assimilados de uma só vez. Neste nível, o importante é que o leitor desenvolva a habilidade de calcular e adquira a compreensão intuitiva dos problemas. As expressões do tipo "é facil ver"ou semelhantes, que aparecem no texto, não devem ser encaradas de forma literal e tem o propósito de dar um aviso ao leitor de que naquele lugar a apresentação é resumida e os detalhes, perfeitamente acessíveis, deverão ser preenchidos.
Esperamos que o livro permita ao leitor um acesso rápido e agradável ao Cálculo Diferencial e Integral de uma variável. Não podemos deixar de recomendar aos alunos a utilização, criteriosa, dos softwares de Cálculo existente no mercado, pois eles são um complemento útil ao aprendizado da disciplina.
Desejamos agradecer aos nossos colegas do Departamento de Análise e do IME-UERJ que, de algum modo, nos motivaram e deram condições para escrever estas notas e à Sra. Sonia M. Alves pela digitação. Certamente, todos os erros são exclusivamente de responsabilidade do autor.

Mauricio A. Vilches
Rio de Janeiro - Brasil

Conteúdo

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos uma breve revisão de alguns tópicos do 2^o grau essenciais para o estudo do Cálculo de uma Variável Real. Admitiremos a familiaridade do leitor com o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, com as operações fundamentais e suas respectivas propriedades, bem como com a visualização geométrica de $\mathbb{R}$ como uma reta e dos números reais como pontos dessa reta. Denotemos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

1.1 Desigualdades

A representação geométrica dos números reais sugere que estes podem ser ordenados. Usando os símbolos usuais para maior ($>$), maior ou igual ($\geq$), menor ($<$), menor ou igual ($\leq$), podemos ver, por exemplo, que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então $b - a > 0$; no eixo coordenado temos que a está à esquerda de b. Para todo $a,\ b \in \mathbb{R}$ temos: ou $a > b$, ou $a < b$, ou $a = b$.

É conhecido que a ordenação dos números reais é compatível com as operações definidas em $\mathbb{R}$.

1.2 Intervalos

Muitos subconjuntos de $\mathbb{R}$ são definidos através de desigualdades. Os mais importantes são os intervalos.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$.

Intervalo aberto de extremidades a e b, denotado por (a, b) é definido por:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}.$$

Figura 1.1: Intervalo aberto.

Intervalo fechado de extremidades a e b, denotado por $[a,b]$ é definido por:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\}.$$

Figura 1.2: Intervalo fechado.

Intervalo semi-aberto e intervalo semi-fechado, são denotados e definidos, respectivamente, por:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x<b\}\quad \text{e}\quad (a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a<x\leq b\}.$$

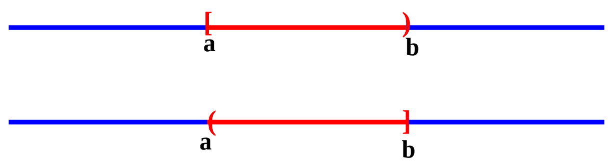


Figura 1.3: Intervalos semi-abertos e semi-fechados.

Os quatro intervalos assim definidos são ditos limitados. Introduzindo os símbolos $-\infty$ e $+\infty$, os quais não são números reais, podemos definir os intervalos ilimitados:

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/a<x\}\quad \text{e}\quad (-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}/x\leq a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}/x<a\}\quad \text{e}\quad [a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x\geq a\}.$$

Note que $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Os intervalos aparecem de forma natural na resolução de inequações, pois, a solução é, em geral, dada por um intervalo ou uma reunião de intervalos.

Desigualdades Lineares:

Determinemos o conjunto-solução de:

$$a\,x+b\geq 0.$$

$a\,x+b\geq 0$ é equivalente a $a\,x\geq -b$; logo:

Se $a>0$, $x\geq -\dfrac{b}{a}$; o conjunto-solução é

$$[-\frac{b}{a},+\infty).$$

Se $a<0$, $x\leq -\dfrac{b}{a}$; o conjunto-solução é

$$(-\infty,-\frac{b}{a}].$$

Desigualdades Quadráticas:

Seja $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ a equação do segundo grau. Denotemos por

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

o discriminante da equação e α, β as raízes reais da equação ($\alpha \leq \beta$). O conjunto-solução S de uma desigualdade quadrática depende do sinal de a e de Δ.

Para $\Delta > 0$.

Se $a > 0$, a desigualdade $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$ tem conjunto-solução $S = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$ e $a\,x^2 + b\,x + c \leq 0$ tem conjunto-solução $S = [\alpha, \beta]$

Se $a < 0$, a desigualdade $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$ tem conjunto-solução $S = [\alpha, \beta]$ e $a\,x^2 + b\,x + c \leq 0$ tem conjunto-solução $S = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$.

Para $\Delta = 0$.

Se $a > 0$, a desigualdade $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$ tem conjunto-solução $S = \mathbb{R}$ e $a\,x^2 + b\,x + c \leq 0$ tem conjunto-solução $S = \{\alpha\}$.

Se $a < 0$, a desigualdade $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$ tem conjunto-solução $S = \{\alpha\}$ e $a\,x^2 + b\,x + c \leq 0$ tem conjunto-solução $S = \mathbb{R}$.

Para $\Delta < 0$.

Se $a > 0$, a desigualdade $a\,x^2 + b\,x + c > 0$ tem conjunto-solução $\mathbb{R}$ e $a\,x^2 + b\,x + c \leq 0$ tem conjunto-solução $\emptyset$. Se $a < 0$, a desigualdade $a\,x^2 + b\,x + c \geq 0$ tem conjunto-solução ϕ e $a\,x^2 + b\,x + c < 0$ tem conjunto-solução $S = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.

[1] Ache a solução de: $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Note que $\Delta > 0$ e $a > 0$ e as raízes de $5\,x^2 - 4\,x - 12 = 0$ são $x = 2$ e $x = -1$; logo:

$$S = \big(-\infty, -1] \cup [2, +\infty).$$

[2] Ache a solução de: $x^3 < x$.

Fatorando $x^3 - x = x\,(x+1)\,(x-1)$; então, $x^3 - x < 0$ é equivalente a $x\,(x+1)\,(x-1) < 0$, da qual obtemos $x < -1$ ou $0 < x < 1$. O conjunto-solução é:

$$S = (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$

[3] Ache a solução de:

$$\frac{6\,x - 2}{3\,x + 6} \geq 9.$$

Note que a desigualdade não é equivalente a:

$$6\,x-2\geq 9\,(3\,x+6).$$

Se $3\,x+6>0$, isto é $x>-2$; então, $6\,x-2\geq 9\,(3\,x+6)$, donde obtemos $x\leq -\dfrac{8}{3}$.

Se $3\,x+6<0$, isto é $x<-2$; então, $6\,x-2\leq 9\,(3\,x+6)$, donde obtemos $-\dfrac{8}{3}\leq x$. Logo, o conjunto-solução é:

$$S=[-\frac{8}{3},-2).$$

[4] Ache a solução de:

$$\frac{x+2}{x-1}\leq\frac{x}{x+4}.$$

Resolvemos $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x}{x+4}\leq 0$, que é equivalente a:

$$\frac{7\,x+8}{(x-1)\,(x+4)}\leq 0,$$

da qual obtemos $-\dfrac{8}{7}\leq x<1$ ou $x<-4$. Logo, o conjunto-solução é:

$$S=\big(-\infty,-4\big)\cup\big[-\frac{8}{7},1\big).$$

1.3 Valor Absoluto

O valor absoluto ou módulo de um número real a, denotado por $|a|$ é definido como o maior número do conjunto $\{a,\,-a\}$, ou equivalentemente:

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se} \quad a\geq 0\\ -a & \text{se} \quad a<0.\end{cases}$$

Observe que o valor absoluto de um número real é sempre não negativo e possui as seguintes propriedades imediatas. Sejam $a,\,b\in\mathbb{R}$; então:

1. $\sqrt{a^2}=|a|$, para todo $a\in\mathbb{R}$

2. $|b|<a$ se e somente se $b\in(-a,a)$, $a>0$

3. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

4. $|b|\geq a$ se e somente se $b\geq a$ ou $b\leq -a,\ a>0$

5. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, se $b\neq 0$

6. $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Exemplo 1.2.

[1] Achar a solução de: $|x^2 - x + 1| > 1$.

Pelas propriedades anteriores, $|x^2 - x + 1| > 1$ é equivalente a: $x^2 - x + 1 > 1$ ou $x^2 - x + 1 < -1$. Se $x^2 - x + 1 > 1$, então $x\,(x - 1) > 0$ e $x < 0$ ou $x > 1$; se $x^2 - x + 1 < -1$, então:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} < 0,$$

o que é impossível. O conjunto-solução é:

$$S = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

[2] Achar a solução de: $|9 - 2\,x| \geq |4\,x|$.

Pela propriedades anteriores, $|9 - 2\,x| \geq |4\,x|$ é equivalente a: $9 - 2\,x \geq |4\,x|$ ou $9 - 2\,x \leq -|4\,x|$; Se $9 - 2\,x \geq |4\,x|$, então $2\,x - 9 \leq 4\,x \leq 9 - 2\,x$; logo,

$$-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Se $9 - 2\,x \leq -|4\,x|$, então $9 - 2\,x \leq 4\,x \leq 2\,x - 9$, que não possui solução. O conjunto-solução é:

$$S = \left[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

[3] Achar a solução de: $2 - |x - 3| \leq 3\,x + 1$.

Pela propriedades anteriores, se $x - 3 \geq 0$, temos: $2 - (x - 3) \leq 3\,x + 1$ que é equivalente a $x \geq 1$. Por outro lado, se $x - 3 < 0$, temos: $2 + (x - 3) \leq 3\,x + 1$ que é equivalente a $x \geq -1$. O conjunto-solução é:

$$S = [-1 + \infty].$$

1.3.1 Distância

Usando o valor absoluto podemos definir a distância entre dois números reais. A distância entre os números reais a e b é $|a - b|$. Então $|a|$ é a distância de a à origem.

Exemplo 1.3.

[1] A distância entre os números π e $-\pi$ é $|\pi - (-\pi)| = 2\,\pi$.

[2] A distância entre os números -2 e -12 é $|-12 - (-2)| = |-10| = 10$ e a distância entre os números -2 e 23 é $|23 - (-2)| = 25$.

[3] A distância entre os números $-\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{2}$ é:

$$\left|-\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right| = \left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}.$$

1.4 Plano Coordenado

Um par ordenado de números reais é uma dupla de números reais (x, y), tais que $(x, y) = (y, x)$ se, e somente se $x = y$. O elemento x do par ordenado é chamado primeira coordenada do par e y é chamado a segunda coordenada do par.
De forma análoga à representação geométrica dos números reais, podemos representar geometricamente os pares ordenados. Para isto consideramos duas retas, que por conveniência impomos que se intersectem perpendicularmente. A reta horizontal é chamada eixo das abscissas ou eixo dos x e a reta vertical é chamada eixo das ordenadas ou eixo dos y. A interseção das retas é chamada origem, à qual associamos o par $(0, 0)$ e atribuimos sentidos a estas retas, que descrevem um plano, chamado plano coordenado.
As quatros regiões determinadas no plano por estas retas são chamadas quadrantes. A representação de um par ordenado como um ponto do plano (e reciprocamente), é feita de forma análoga a do eixo coordenado.

Por exemplo, os seguintes pontos $A = (1, 2)$, $B = (-2, 1)$, $C = (-2, -1)$, $D = (1, -2)$, tem a seguinte representação no plano coordenado:

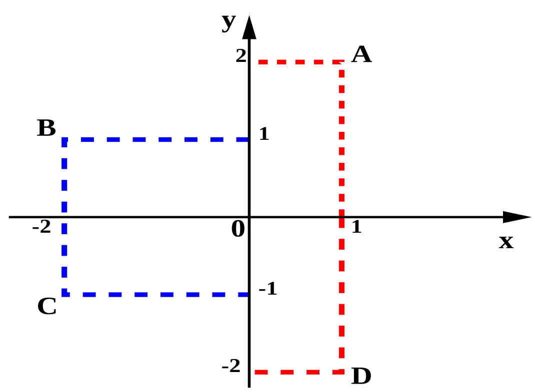


Figura 1.4:

Usando o teorema de Pitágoras podemos definir a distância entre dois pontos do plano coordenado.

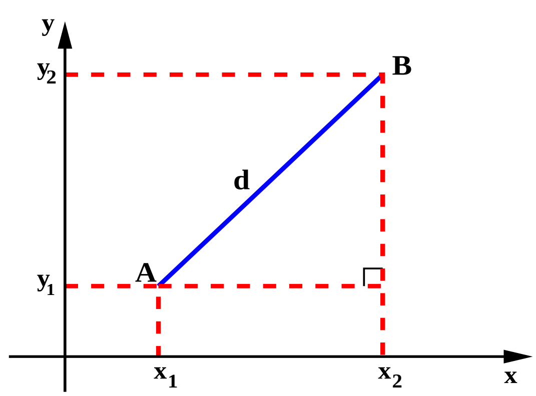


Figura 1.5:

Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos do plano. A distância d entre A e B é:

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

A distância possui as seguintes propriedades imediatas. Sejam A, B e C pontos do plano, então:

1. $d(A, B) \geq 0$ e $d(A, B) = 0$ se e somente se $A = B$.
2. $d(A, B) = d(B, A)$.
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Exemplo 1.4.

[1] Calcule a distância entre os pontos $A = (2, -3)$ e $B = (-2, 1)$. Aplicando a fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{32}.$$

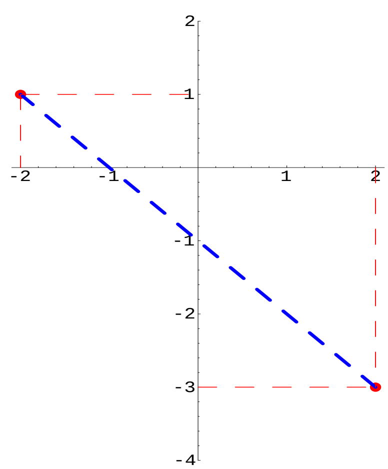


Figura 1.6:

[2] Se a abscissa de um ponto é 4 e sua distância ao ponto $(-2, 6)$ é 10. Determine a ordenada do ponto.

Denotemos $A = (4, y)$ o ponto em questão e $B = (-2, 6)$. Aplicando a fórmula:

$$10 = d(A, B) = \sqrt{36 + (y - 6)^2} \Longleftrightarrow y = -2 \quad \text{e} \quad y = 14.$$

1.5 Equação da Reta

1.5.1 Equação Geral da Reta

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos no plano:

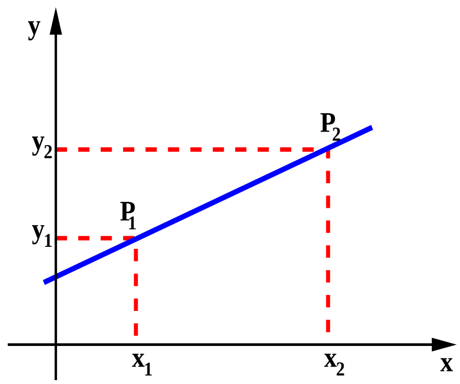


Figura 1.7:

A equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 é:

$$\boxed{a\,x + b\,y + c = 0}$$

onde $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Veja **[TA]**, **[?]**.

Se $a = 0$ a reta é horizontal; se $b = 0$ a reta é vertical. O ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ pertence à reta $a\,x + b\,y + c = 0$ se, e somente se $a\,x_0 + b\,y_0 + c = 0$.

Exemplo 1.5.

[1] Ache a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (-1, 3)$ e $P_2 = (2, -4)$.

Neste caso: $a = 3 + 4 = 7$, $b = 2 + 1 = 3$ e $c = -2$; logo, a equação é: $7\,x + 3\,y - 2 = 0$.

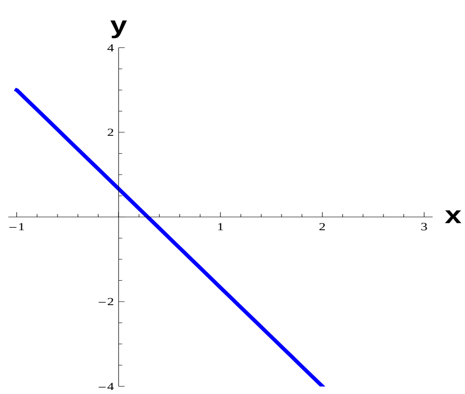


Figura 1.8: A reta $7\,x + 3\,y - 2 = 0$.

[2] Determine k tal que o ponto $P = (3, k)$ pertença à reta $3\,x + 5\,y - 12 = 0$.

O ponto $P = (3, k)$ pertence à reta $3\,x + 5\,y - 12 = 0$ se, e somente se $3 \cdot 3 + 5 \cdot k - 12 = 0$; logo, $k = \dfrac{3}{5}$.

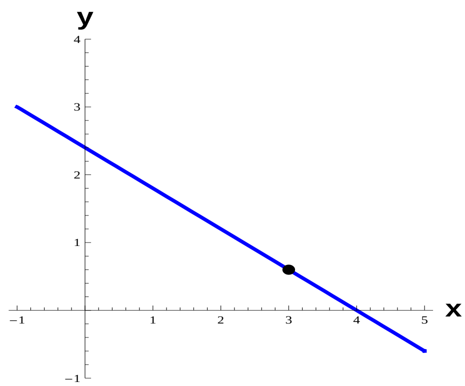


Figura 1.9: A reta $3\,x + 5\,y - 12 = 0$ e o ponto $P = (3, 3/5)$.

1.5.2 Equação Reduzida da Reta

Se uma reta não é paralela ao eixo dos y, então $b \neq 0$. Fazendo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad n = \frac{x_2 y_1 - x_1\,y_2}{x_2 - x_1},$$

obtemos a **equação reduzida da reta**:

$$\boxed{y = m\,x + n}$$

m é chamado coeficiente angular da reta e n coeficiente linear da reta. É fácil ver que a equação da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m é:

$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

Exemplo 1.6.

[1] Obtenha a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (6, 5)$.

Neste caso: $m = 1$ e fazemos $P_0 = P_1$ ou $P_0 = P_2$; então, se $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$, temos, $y - x + 1 = 0$ ou $y = x - 1$.

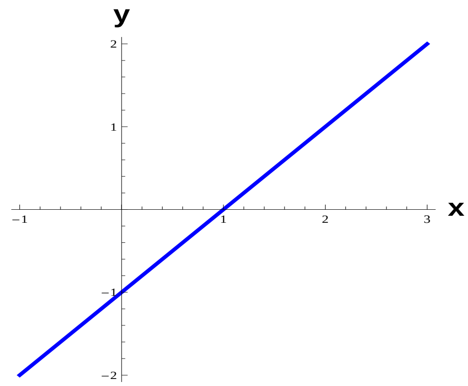


Figura 1.10: A reta $y = x - 1$.

[2] Escreva na forma reduzida a equação: $4\,x + 2\,y + 5 = 0$.

A forma reduzida é do tipo $y = m\,x + n$; então, $y = -2\,x - \dfrac{5}{2}$

1.5.3 Paralelismo e Perpendicularismo de Retas

Sejam $y = m_1\,x + n_1$ e $y = m_2\,x + n_2$ as equações de duas retas.

As retas são paralelas se, e somente se:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

As retas são perpendiculares se, e somente se:

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Logo, as retas de equações $a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$ e $a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$ são perpendiculares, se, e somente se:

$$\boxed{a_1\,a_2 + b_1\,b_2 = 0}$$

Exemplo 1.7.

[1] Ache o valor de k tal que as retas:

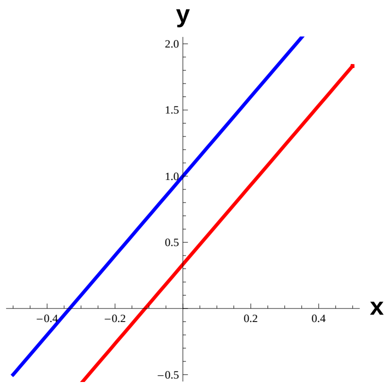
(a) $y - \dfrac{(2+k)\,x}{2-k} = 1$ e $y - 3\,x + \dfrac{k-2}{k+2} = 0$ sejam paralelas.

(b) $k\,y = x + k^3$ e $y - 1 = 2\,k^2 x$ sejam perpendiculares.

(a) As retas são paralelas se os coeficientes angulares são iguais; logo,

$$\frac{2+k}{2-k} = 3 \Longrightarrow k = 1.$$

(b) As retas são perpendiculares se: $[\dfrac{1}{k}] \cdot [2\,k^2] = -1$; donde $k = -\dfrac{1}{2}$.



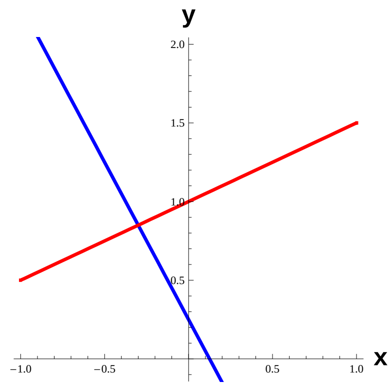


Figura 1.11: As retas dos exemplos (a) e (b), respectivamente.

[2] Determine a reta que passa pelo ponto de interseção das retas $2\,x-3\,y+7=0$ e $5\,x+y+9=0$ e é perpendicular a $2\,x-y+1=0$.

Primeiramente, determinemos o ponto de interseção das retas, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2\,x-3\,y=-7 \\ 5\,x+y=-9. \end{cases}$$

Obtemos o ponto $(-2,1)$. A reta que procuramos tem equação $y=m_2\,x+b$ tal que $m_1\cdot m_2=-1$, onde $m_1=2$ é o coeficiente angular da reta $2\,x-y+1=0$; logo, $m_2=-\dfrac{1}{2}$ e $y=-\dfrac{x}{2}+b$. Como a reta passa por $(-2,1)$, a reta procurada é:

$$x+2\,y=0.$$

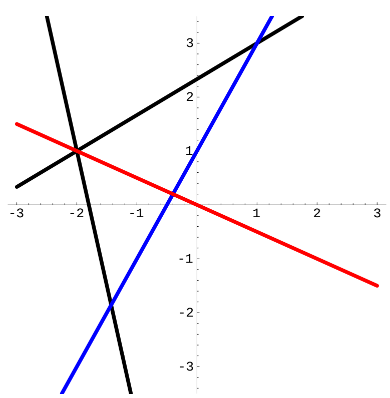


Figura 1.12: As retas do exemplo [2].

1.6 Equações das Cônicas

A equação do segundo grau em duas variáveis:

$$\boxed{A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0}$$

sendo A e C não simultanemente nulas representa, em geral, uma curva no plano chamada cônica, cuja natureza depende dos coeficientes. Denotemos por $\Delta = B^2 - 4\,A\,C$, temos:

Se $B = 0$ e $A = C$, a equação representa um círculo.

Se $\Delta < 0$, a equação representa uma elipse ou uma circunferência.

Se $\Delta = 0$, a equação representa uma parábola ou uma reunião de duas retas paralelas.

Se $\Delta > 0$, a equação representa uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

Se $A = C = D = E = 0$, $B \neq 0$ e $F \neq 0$, temos que:

$$x\,y = k,$$

é uma hipérbole.

Os outros casos são degenerados, os quais incluem pontos e retas.

1.6.1 Forma Normal das Cônicas

Utilizando completamento dos quadrados é possível obter as chamadas equações normais das cônicas.

Forma normal da elipse centrada no ponto (h, k):

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}.$$

Figura 1.13: Elipses com $a > b$ e $a < b$, respectivamente.

Em particular, se $a = b$ a equação representa um círculo centrado em (h, k) de raio a:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2.$$

Forma normal das parábolas. As parábolas de eixo paralelo ao eixo dos x:

$$\boxed{y^2 = p\,x + q}$$

De eixo paralelo ao eixo dos y:

$$\boxed{x^2 = p\,y + q}$$

$p \neq 0$.

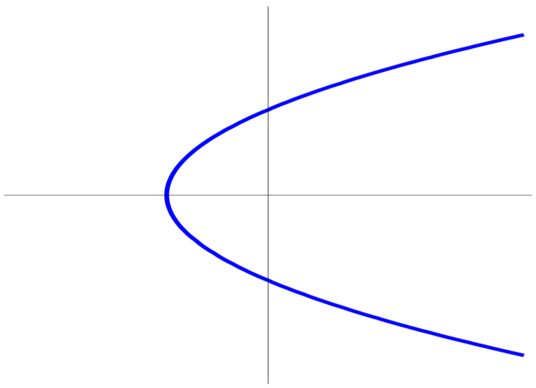


Figura 1.14: Parábolas.

Forma normal da hipérbole centrada no ponto (h,k):

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

ou

$$\boxed{-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

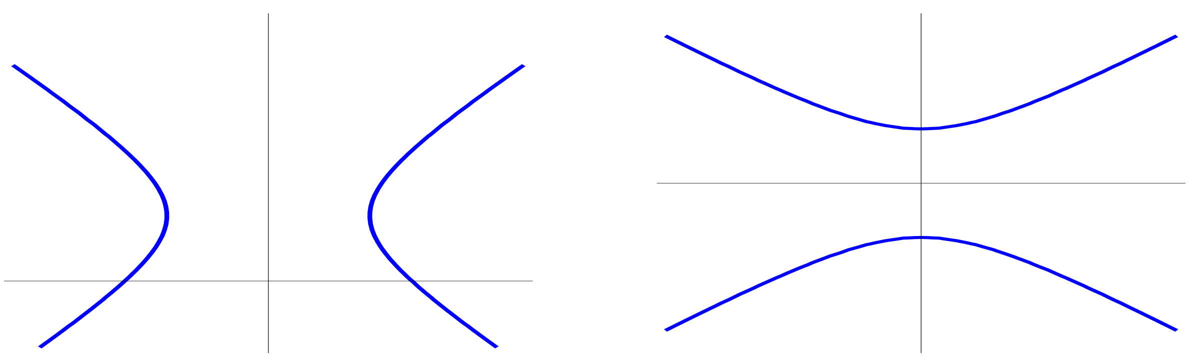


Figura 1.15: Hipérboles.

Exemplo 1.8.

Diga o que representam as seguintes equações:

[1] $4\,x^2 + y^2 - 32\,x - 12\,y + 84 = 0$.

[2] $x^2 + y^2 - 2\,x = 3$.

[3] $9\,y^2 - 4\,x^2 = 36$.

[4] $9\,x^2 - 4\,y^2 - 18\,x + 8\,y - 31 = 0$.

[5] $x^2 - y^2 - 2\,x - 4\,y - 3 = 0$.

[6] $y^2 - x - 1 = 0$.

[7] $x^2 - 4\,y - 3 = 0$.

Soluções:

[1] $A = 4$, $B = 0$ e $C = 1$, então $\Delta < 0$. A equação representa uma elipse, pois $A \neq C$. Completando os quadrados:

$$4\,x^2 + y^2 - 32\,x - 12\,y + 84 = 4\,(x-4)^2 + (y-6)^2 - 16 = 0,$$

logo, a equação de uma elipse centrada no ponto $(4,6)$:

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1.$$

[2] $A = C = 1$ e $B = 0$, logo, $\Delta < 0$. A equação representa um círculo. Completando os quadrados:

$$x^2 + y^2 - 2\,x - 3 = (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$$

logo:

$$(x-1)^2 + y^2 = 4,$$

a equação de um círculo centrado no ponto $(1,0)$ e de raio 2.

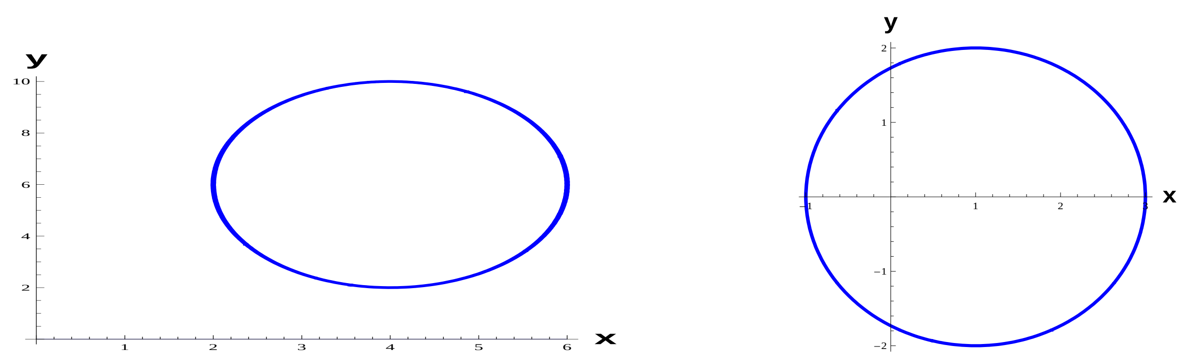


Figura 1.16: Desenhos dos exemplos [1] e [2], respectivamente.

[3] Como $A = -4$, $B = 0$ e $C = 9$, então $\Delta > 0$; logo, temos a equação de uma hipérbole ou de duas retas concorrentes:

$$9\,y^2 - 4\,x^2 = 36 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

[4] Como $A = 9$, $B = 0$ e $C = -4$, então $\Delta > 0$; logo, temos a equação de uma hipérbole ou de duas retas concorrentes.Completando os quadrados:

$$9\,x^2 - 4\,y^2 - 18\,x + 8\,y - 31 = 9\,(x-1)^2 - 4\,(y-1)^2 - 36 = 0$$

logo, a equação representa uma hipérbole:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

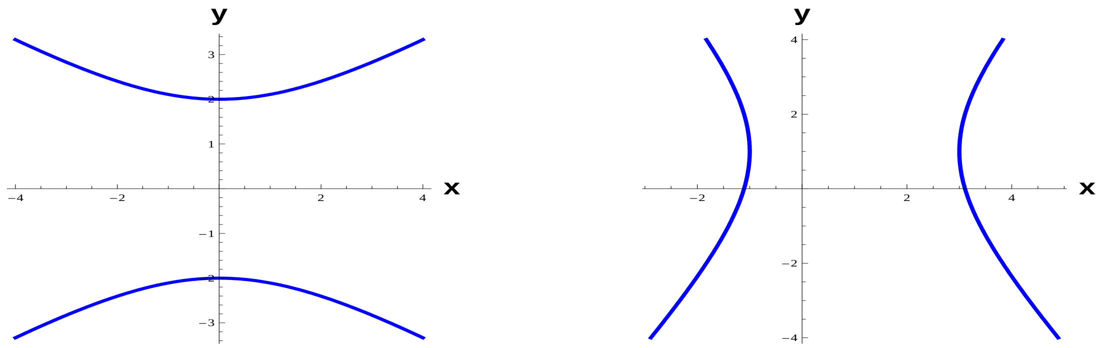


Figura 1.17: Desenhos dos exemplos [3] e [4], respectivamente.

[5] Como $A = 1$, $B = 0$ e $C = -1$, então $\Delta > 0$; logo, temos a equação de uma hipérbole ou de duas retas concorrentes.Completando os quadrados:

$$x^2 - y^2 - 2\,x - 4\,y - 3 = (x-1)^2 - (y+2)^2 = 0.$$

Logo, $(x-1)^2 = (y+2)^2$; então, $y = x - 3$ ou $y = -x - 1$, que representam duas retas concorrentes.

[6] Como $A = B = 0$ e $C = 1$, então $\Delta = 0$, a equação representa uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos x.

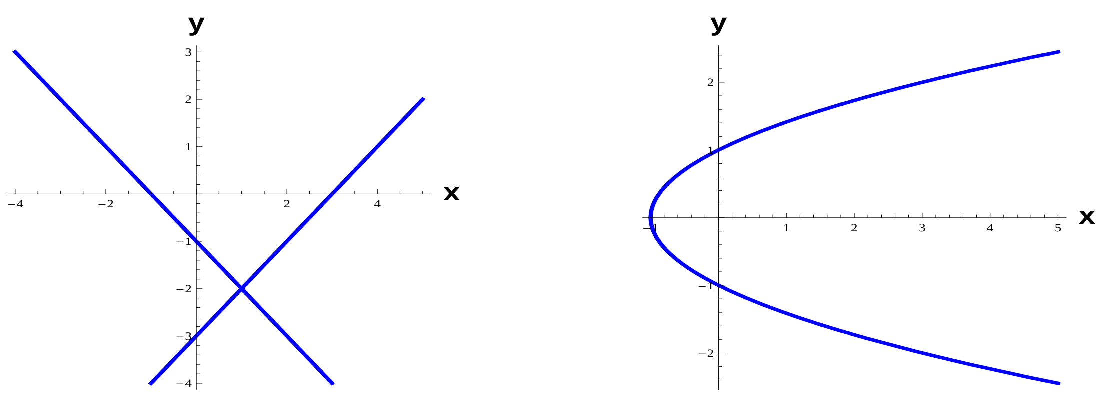


Figura 1.18: Desenhos dos exemplos [5] e [6], respectivamente.

[7] Como $A = 1$ e $B = C = 0$, então $\Delta = 0$, a equação representa uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos y.

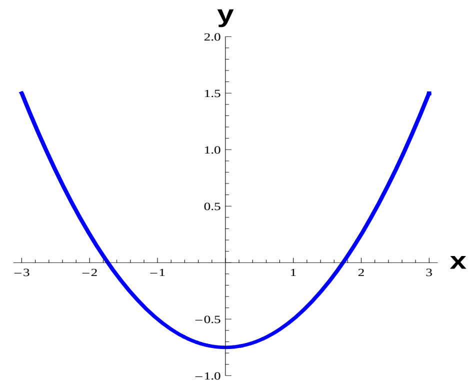


Figura 1.19: Desenho do exemplo [7].

1.7 Polinômios de uma Variável Real

Um polinômio de grau n em uma variável real, é denotado e definido como:

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots\ldots + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n, \tag{1.1}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Os números reais a_i são ditos coeficientes do polinômio. O número real a_0 é dito termo independente do polinômio. O polinômio (1.1) é dito mônico se $a_n = 1$.

Uma forma conveniente de escrever os polinômios é utilizar o símbolo de somatório, isto é:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots\ldots + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n, \tag{1.2}$$

onde $x^0 = 1$.

O número natural n é dito **grau** do polinômio (1.1) se é o maior valor tal que o coeficiente $a_n \neq 0$ e é denotado por $grau(P(x))$. Se $grau(P(x)) = 0$, então (1.1) é dito polinômio constante; em particular , um polinômio é dito nulo se todos os coeficientes de (1.1) são nulos.

Se $grau(P(x)) = 1$, então (1.1) é dito polinômio afim; se $grau(P(x)) = 2$, então (1.1) é dito polinômio quadrático e assim por diante.

Proposição 1.1. *Sejam:*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i \quad e \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j\,x^j$$

polinômios de grau n e m, respectivamente, então:

(a) $P(x) = Q(x)$ *se, e somente se* $n = m$ *e:*

$$a_i = b_i, \quad \forall i = 1\ldots n = m.$$

(b) **Adição de polinômios**.

1. *Se $n \geq m$, então*

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k)\, x^k + a_{m+1}\, x^{m+1} + \ldots\ldots + a_n\, x^n.$$

2. *Se $m \geq n$, então*

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k + b_{n+1}\, x^{n+1} + \ldots\ldots + b_m\, x^m.$$

(c) **Multiplicação de polinômios**. *Seja $n \geq m$*

$$P(x) \cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k\, x^k \quad \textit{onde} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i};\;\; 0 \leq i \leq n,\;\; 0 \leq k - i \leq n$$

Logo:

$$P(x) \cdot Q(x) = (a_0 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)\, x + \ldots\ldots a_n \cdot b_m\, x^{n+m}$$

e $a_i = 0$ se $i > n$, $b_j = 0$ se $j > m$.

É imediato que se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de uma variável real, então:

1. $grau(P(x) + Q(x)) \leq maior\{grau(P(x)), grau(Q(x))\}$.
2. $grau(P(x) \cdot Q(x)) = grau(P(x)) + grau(Q(x))$.

Exemplo 1.9.

[1] Determine as constantes α, β, γ e δ para que os polinômios $P(x) = \alpha\,(x + \gamma)^3 + \beta\,(x + \delta)$ e $Q(x) = x^3 + 6\,x^2 + 15\,x + 14$ sejam iguais.

Note que $P(x) = \alpha\,x^3 + 3\,\alpha\,\gamma\,x^2 + (\beta + 3\,\alpha\,\gamma^2)\,x + \alpha\,\gamma^3 + \beta\,\delta$; logo $P(x) = Q(x)$ se, e somente se:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3\,\alpha\,\gamma = 6 \\ \beta + 3\,\alpha\,\gamma^2 = 15 \\ \alpha\,\gamma^3 + \beta\,\delta = 14, \end{cases}$$

donde $\alpha = 1$, $\beta = 3$ e $\gamma = \delta = 2$.

[2] Sejam $P(x) = 3\,x^5 - x^4 + x - 5$ e $Q(x) = -3\,x^5 + 6\,x^4 + 2\,x^3 + x^2 - x + 1$. Calcule $P(x) + Q(x)$ e $P(x) \cdot Q(x)$.

Note que $grau(P(x) + Q(x)) \leq 5$:

$$P(x) + Q(x) = 3\,x^5 - x^4 + x - 5 - 3\,x^5 + 6\,x^4 + 2\,x^3 + x^2 - x + 1 = 5\,x^4 + 2\,x^3 + x^2 - 4.$$

Note que $grau(P(x)\cdot Q(x)) = 5+5 = 10$:

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (3\,x^5 - x^4 + x - 5)\cdot(-3\,x^5 + 6\,x^4 + 2\,x^3 + x^2 - x + 1) \\ &= -9\,x^{10} + 21\,x^9 + x^7 - 7\,x^6 + 25\,x^5 - 29\,x^4 - 9\,x^3 - 6\,x^2 + 6\,x - 5. \end{aligned}$$

[3] Determine as constantes A, B e C tais que:

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B\,x + C}{x^2+1}.$$

Note que: $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B\,x+C}{x^2+1} = \dfrac{A\,(x^2+1) + (B\,x+C)\,(x-1)}{x^3-x^2+x-1}$; então:

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A\,(x^2+1) + (B\,x+C)\,(x-1)}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2\,(A+B) + x\,(C-B) + A - C}{x^3-x^2+x-1}.$$

Logo, temos a igualdade de polinômios: $0\,x^2 + 0\,x + 1 = x^2\,(A+B) + x\,(C-B) + A - C$, donde:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C - B = 0 \\ A - C = 1 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{1}{2},\; B = C = -\frac{1}{2}.$$

Logo:

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right].$$

1.7.1 Raízes de um Polinômio

O número real r_0 é dito raiz do polinômio $P(x)$ se, e somente se, $P(r_0) = 0$. O seguinte resultado é um teorema clássico em Matemática chamado Teorema Fundamental da Álgebra:

Teorema 1.1. *Todo polinômio $P(x)$ de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz.*

Estas raízes podem ser reais e/ou complexas; simples e/ou múltiplas.

Como corolário do teorema temos que todo polinômio $P(x)$ de coeficientes reais pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos.

Naturalmente esta decomposição depende essencialmente do grau de $P(x)$ e da natureza das raízes. Por exemplo:

1. $P(x) = (x - a_1)\,(x - a_2)..........(x - a_n)$ ou
2. $P(x) = (x - a)^r\,(x - b_1)........(x - b_s)$ ou
3. $P(x) = (a\,x^2 + bx + c)\,(x - d_1)......(x - d_l)$ ou
4. $P(x) = (a\,x^2 + bx + c)^r\,(x - d_1)......(x - d_l)$.

Corolário 1.2. *Todo polinômio $P(x)$ de grau $n \geq 1$ possui n raízes.*

Se r_i são raízes do polinômio $P(x)$, então existem únicos k_i, tais que:

$$P(x) = a_n\,(x - r_1)^{k_1}\,(x - r_2)^{k_2}\,\ldots\ldots(x - r_j)^{k_j}$$

onde $k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_j = n$. Os números k_i são ditos multiplicidade da raiz. As raízes complexas de um polinômio aparecem aos pares, a raiz e sua conjugada. A cada par de raízes complexas conjugadas aparece na fatoração um fator quadrático. De fato, se $a + i\,b$ e $a - i\,b$ são raízes, então na fatoração de $P(x)$ aparecerá $(x - a)^2 + b^2$. (Verifique!)

Exemplo 1.10.

[1] $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)\,(x - 1)$.

[2] $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2\,(x + 2)$.

[3] $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)\,(x - 1)$.

[4] $P(x) = x^8 + x^7 - 9x^6 + 3x^5 - 33x^4 + 3x^3 - 35x^2 + x - 12 = (x^2 + 1)^3\,(x - 3)\,(x + 4)$.

1.7.2 Algoritmo da Divisão de Polinômios

O algoritmo da divisão de polinômios é completamente análogo ao da divisão de números reais.

Proposição 1.2. *Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios tais que $Q(x)$ é mônico; então existem únicos polinômios $F(x)$ e $R(x)$ tais que:*

$$P(x) = Q(x)\,F(x) + R(x), \quad grau(R(x)) < grau(Q(x)).$$

Se $R(x) = 0\ \forall x$, dizemos que $Q(x)$ divide $P(x)$. O polinômio $R(x)$ é dito resto da divisão.

Exemplo 1.11.

[1] Dividir os polinômios $P(x) = x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 2$ e $Q(x) = x^2 - 2\,x - 2$.

(a) Escrevemos os polinômios na ordem decrescente de seus expoentes.

$$\begin{aligned} &x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 2 \\ &x^2 - 2\,x - 2. \end{aligned}$$

(b) Obtemos o primeiro termo do quociente dividindo o termo de maior grau de $P(x)$ pelo termo de maior grau de $Q(x)$: $x^4 \div x^2 = x^2$. A seguir, multiplicamos o termo obtido por $Q(x)$ e subtraimos esse produto de $P(x)$: $P(x) - x^2\,Q(x) = -2\,x^3 + 8\,x^2 - 4\,x + 2$. Há um dispositivo prático para efetuar a divião:

$$\begin{array}{ll} x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 2 : x^2 - 2\,x - 2 = x^2 & \quad 1^o \text{ termo do quociente} \\ x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 & \\ - & \\ -\,2\,x^3 + 8\,x^2 - 4\,x + 2 & \end{array}$$

(c) Se o polinômio obtido da diferença tem grau maior ou igual ao de $Q(x)$, repetimos o processo para a diferença a partir de (b), ou seja, $-2\,x^3 \div x^2 = -2\,x$:

$$\begin{array}{l}
x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 2 : x^2 - 2\,x - 2 = x^2 - 2\,x \\
x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 \\
-------------------- \\
-\,2\,x^3 + 8\,x^2 - 4\,x + 2 \\
-\,2\,x^3 + 4\,x^2 + 4\,x \\
-------------------- \\
4\,x^2 - 8\,x + 2
\end{array}$$

Continuando o processo, obteremos finalmente, o quociente $x^2 - 2\,x + 4$ e resto 10 Logo:

$$P(x) = Q(x)\,(x^2 - 2\,x + 4) + 10.$$

[2] Divida os polinômios $P(x) = x^3 - x^2 + 2\,x - 2$ e $Q(x) = x^2 - 1$.

Repetiremos novamente os passos do algoritmo:

(a) Escrevemos os polinômios na ordem decrescente de seus expoentes.

$$\begin{array}{l}
x^3 - x^2 + 2\,x - 2 \\
x^2 - 1.
\end{array}$$

(b) Dividimos o termo de maior grau de $P(x)$ pelo termo de maior grau de $Q(x)$. Obtemos o primeiro termo do quociente. A seguir, multiplicamos o termo obtido por $Q(x)$ e subtraimos esse produto de $P(x)$:

$$\begin{array}{l}
x^3 - x^2 + 2\,x - 2 : x^2 - 1 = x \qquad 1^o \text{ termo do quociente} \\
x^3 - x \\
-------------------- \\
-\,x^2 + 3\,x - 2
\end{array}$$

(c) Se o polinômio obtido da diferença tem grau maior ou igual ao de $Q(x)$, repetimos o processo para a diferença a partir de (b):

$$\begin{array}{l}
x^3 - x^2 + 2\,x - 2 : x^2 - 1 = x - 1 \\
x^3 - x \\
-------------------- \\
-\,x^2 + 3\,x - 2 \\
-\,x^2 + 1 \\
-------------------- \\
3\,x - 3 \qquad \text{resto}
\end{array}$$

Logo $P(x) = Q(x)\,(x - 1) + 3\,(x - 1)$.

Se dividimos o polinômio $P(x)$ de grau n por $x-c$, obtemos um polinômio $Q(x)$ de grau $n-1$ tal que $R(x)$ é de grau zero, isto é, constante R_c tal que:

$$P(c) = R_c.$$

Esta propriedade é chamada regra de Ruffini.

Exemplo 1.12. *Questão de (FEI-SP)*

Calcule as constantes a e b do polinômio $P(x) = x^3 + 2\,x^2 + a\,x + b$ para que $P(x)+1$ seja divisível por $x+1$ e $P(x)-1$ seja divisível por $x-1$.

$P(x)+1$ divisível por $x+1$, implica em $P(-1)+1=0$; logo, $2-a+b=0$. Por outro lado, $P(x)-1$, divisível por $x-1$, implica em $P(1)-1=0$; logo, $2+a+b=0$. Então, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2-a+b=0 \\ 2+a+b=0, \end{cases}$$

donde $b=-2$ e $a=0$.

Raízes Racionais de um Polinômio

Considere o polinômio:

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots\ldots + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n.$$

tal que os $a_i \in \mathbb{Z}$. Se $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ irredutível, for raiz de $P(x)$, então p divide a_0 e q divide a_n.

Exemplo 1.13.

Ache as raízes de:

[1] $P(x) = 4\,x^3 - 3\,x + 1$.

Os divisores de 1 são ± 1 e de 4 são ± 1, ± 2 e ± 4; as possíveis raízes racionais do polinômio são: ± 1, $\pm\dfrac{1}{2}$ e $\pm\dfrac{1}{4}$. Note que $P(-1)=0$; logo, dividindo por $x+1$, obtemos:

$$P(x) = (x+1)(4\,x^2 - 4\,x + 1) = (x+1)\,(2\,x-1)^2;$$

a raiz $\dfrac{1}{2}$ é dupla.

[2] $P(x) = 3\,x^4 - 2\,x^3 - 21\,x^2 - 4\,x + 12$.

Os divisores de 12 são ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 e ± 12; os de 3 são ± 1 e ± 3; as possíveis raízes racionais do polinômio são: ± 1, $\pm\dfrac{1}{3}$, ± 2, $\pm\dfrac{2}{3}$, ± 3, ± 4, $\pm\dfrac{4}{3}$, ± 6 e ± 12.

Note que $P(-1) = P(-2) = P(3) = P(\dfrac{2}{3}) = 0$; logo, efetuando divisões sucessivas, obtemos:

$$P(x) = (x+1)\,(x+2)(x-3)\,(3\,x-2).$$

As raízes são: -1, -2, $\dfrac{2}{3}$ e 3.

1.8 Inequações que Envolvem Polinômios

Neste parágrafo apresentaremos inequações que envolvem polinômios ou combinações de polinômios e que são um pouco mais complexas do que as estudadas no início do capítulo. O método de resolução, é essencialmente, estudar os sinais da desiguladade numa tabela.

Exemplo 1.14.

[1] Determine a solução de: $2\,x^3 - 2\,x^2 - 2\,x - 4 > 0$

Primeiramente fatoramos o polinômio:

$$2\,x^3 - 2\,x^2 - 2\,x - 4 = (x-2)\,(2\,x^2 + 2\,x + 2);$$

O polinômio tem uma raiz real. De fato, o polinômio $2\,x^2 + 2\,x + 2$ tem $\Delta < 0$ e seu coeficiente principal é positivo; logo, $2\,x^2 + 2\,x + 2 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$2\,x^3 - 2\,x^2 - 2\,x - 4 > 0 \Longleftrightarrow (x-2)\,(2\,x^2 + 2\,x + 2) > 0 \Longleftrightarrow x - 2 > 0.$$

Logo, o conjunto-solução é $S = (2, +\infty)$.

[2] Determine a solução de: $x^4 - 2\,x^3 - 4\,x^2 + 8\,x > 0$

Primeiramente fatoramos o polinômio:

$$x^4 - 2\,x^3 - 4\,x^2 + 8\,x = x\,(x-2)\,(x-2)\,(x+2).$$

O polinômio tem 4 raízes reais, duas repetidas. Logo:

$$x^4 - 2\,x^3 - 4\,x^2 + 8\,x > 0 \Longleftrightarrow x\,(x-2)\,(x-2)\,(x+2) > 0.$$

Então, ou todos os membros da desigualdade são positivos ou todos negativos ou com sinais trocados aos pares:

Polinômio	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$x-2$	-	-	-	+
$x+2$	-	+	+	+
$x^4 - 2\,x^3 - 4\,x^2 + 8\,x$	+	-	+	+

Logo, o conjunto-solução é $S = (-\infty, -2) \cup (0,2) \cup (2, +\infty)$.

[3] Determine a solução de:

$$\frac{x^3 + x^2 - 2\,x}{x+4} < 0.$$

Primeiramente fatoramos o polinômio:

$$x^3 + x^2 - 2\,x = x\,(x-1)\,(x+2).$$

O polinômio tem 3 raízes reais diferentes. Note que $x \neq -4$. Logo:

$$\frac{x^3 + x^2 - 2\,x}{x+4} < 0 \Longleftrightarrow \frac{x\,(x-1)\,(x+2)}{x+4} < 0.$$

Então, ou o numerador é negativo e o denominador é positivo ou vice-versa, lembrando que $x \neq -4$:

Polinômio	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
x	-	-	-	+	+
$x+2$	-	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	+
$x+4$	-	+	+	+	+
$\dfrac{x^3+x^2-2\,x}{x+4}$	+	-	+	-	+

Logo, o conjunto-solução é $S = (-4,-2) \cup (0,1)$.

[4] Determine a solução de:

$$\frac{6\,x}{x^2 - 4\,x + 3} > \frac{2}{12 - 4\,x}.$$

Primeiramente fatoramos o polinômio:

$$x^2 - 4\,x + 3 = (x-1)\,(x-3).$$

Logo:

$$\frac{6\,x}{x^2 - 4\,x + 3} > \frac{2}{12 - 4\,x} \Longleftrightarrow \frac{6\,x}{x^2 - 4\,x + 3} - \frac{2}{12 - 4\,x} > 0 \Longleftrightarrow \frac{13\,x - 1}{2\,(x-3)\,(x-1)} > 0,$$

se $x \neq 3$ e $x \neq 1$. Então, ou o numerador e o denominador são positivos ou ambos negativos:

Polinômio	$(-\infty,1/13)$	$(1/13,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$13\,x-1$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$\dfrac{6\,x}{x^2-4\,x+3} > \dfrac{2}{12-4\,x}$	-	+	-	+

Logo, o conjunto-solução é $S = (\frac{1}{13}, 1) \cup (3,+\infty)$.

1.8.1 Sistemas de Inequações de uma Variável

Para resolver um sistema de inequações resolvemos, em separado cada inequação do sistema determinando seus respectivos conjuntos-solução. Finalmente, o conjunto-solução do sistema é a interseção de todos os conjuntos-solução achados.

Exemplo 1.15.

[1] Determine a solução do sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 2\,x^2 + 5\,x > 10 \\ 2\,x + 3 \le 4\,x - 5. \end{cases}$$

Resolvamos, primeiramente, a inequação: $x^3 - 2\,x^2 + 5\,x > 10$. Fatoremos o polinômio: $x^3 - 2\,x^2 + 5\,x - 10 = (x - 2)\,(x^2 + 5)$, o polinômio só tem uma raiz real; logo:

$$x^3 - 2\,x^2 + 5\,x > 10 \Longleftrightarrow x - 2 > 0.$$

E o conjunto-solução é $S_1 = (2, \infty)$. Por outro lado, resolvemos:

$$2\,x + 3 \le 4\,x - 5 \Longleftrightarrow x - 4 \ge 0$$

que tem como conjunto-solução $S_2 = [4, +\infty)$. Finalmente, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = S_1 \cap S_2 = [4, +\infty).$$

[2] Determine a solução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{3 - x} > 0 \\ 2\,(4\,x - 3) \le 9\,x - 2. \end{cases}$$

Resolvamos, primeiramente, a inequação:

$$\frac{x^2 - 4}{3 - x} > 0.$$

Para $x \ne 3$ e $x^2 - 4 = (x - 2)\,(x + 2)$, temos:

Polinômio	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	-
Sistema	+	-	+	-

Logo, o conjunto-solução é $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, 3)$. Por outro lado, resolvemos:

$$2\,(4\,x - 3) \le 9\,x - 2 \Longleftrightarrow x + 4 \ge 0$$

que tem como conjunto-solução $S_2 = [-4, +\infty)$. Finalmente, o conjunto-solução do sistema é:

$$S = S_1 \cap S_2 = [-4, -2) \cup (2, 3).$$

1.9 Inequações no Plano

Consideremos curvas e/ou retas, no plano, que sejam definidas pela equação:

$$F(x, y) = 0.$$

Definamos os seguintes subconjuntos do plano:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \,/\, F(x, y) = 0\} \\ A_2 &= \{(x, y) \,/\, F(x, y) > 0\} \\ A_3 &= \{(x, y) \,/\, F(x, y) < 0\}. \end{aligned}$$

Estes subconjuntos tem as seguintes propriedades:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}^2.$$

Isto é, um ponto do plano pertence a um e somente um desses subconjuntos. Estes subconjuntos são chamados regiões do plano.

Exemplo 1.16.

[1] Seja $F(x, y) = x + y - 2$. A reta $x + y = 2$ divide o plano em:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \,/\, x + y = 2\} = \{(x, y) \,/\, y = 2 - x\} \\ A_2 &= \{(x, y) \,/\, x + y > 2\} = \{(x, y) \,/\, y > 2 - x\} \\ A_3 &= \{(x, y) \,/\, x + y < 2\} = \{(x, y) \,/\, y < 2 - x\}. \end{aligned}$$

Note que o ponto $(1, 1) \in A_1$; $(3, 2) \in A_2$ e $(0, 0) \in A_3$.

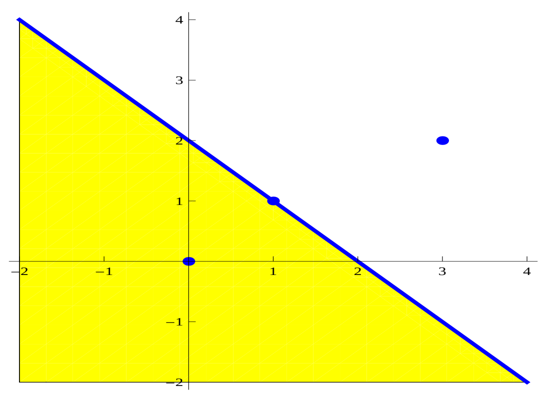


Figura 1.20: Regiões do exemplo [1].

[2] Seja $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, então o círculo $x^2 + y^2 = 1$ divide o plano em:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 = 1\} \\ A_2 &= \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 > 1\} \\ A_3 &= \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Note que o ponto $(0,1) \in A_1$; $(1,1) \in A_2$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in A_3$.

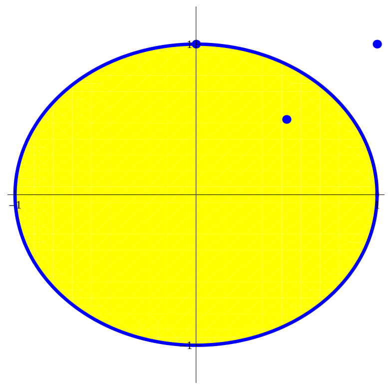


Figura 1.21: Regiões do exemplo [2].

Em geral, toda curva separa o plano em 3 regiões A_1, A_2 e A_3.

Por exemplo, se $F(x,y) = 0$ representa uma reta no plano, então os subsconjuntos A_2 e A_3 são ditos semi-planos.
Logo, os pontos do plano que são solução de um inequação no plano, determinam uma região no plano.

Exemplo 1.17.

[1] Esboce a região determinada pelos pontos que são solução de: $x - y < 0$.

$x - y < 0$ se, e somente se $y > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Os pontos que são solução da inequação determinam uma região acima da reta $y = x$.

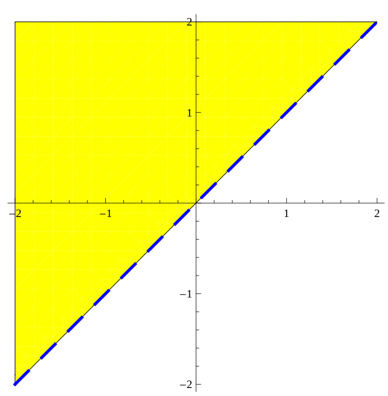


Figura 1.22: Região do exemplo [1].

[2] Esboce a região determinada pelos pontos que são solução de: $x^2 + y^2 - 2\,x - 2\,y + 1 > 0$.

Completando os quadrados:

$$x^2 + y^2 - 2\,x - 2\,y + 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1;$$

logo, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ é a equação de um círculo centrado em $(1,1)$ e raio 1. Os pontos que são solução da inequação determinam uma região fora do círculo $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

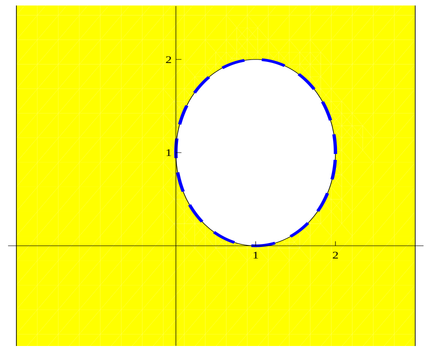


Figura 1.23: Região do exemplo [2].

[3] Esboce a região determinada pelos pontos que são solução de:

$$\frac{x-y+2}{x+y+2}\geq 0.$$

Note que $\dfrac{x-y+2}{x+y+2}\geq 0$ se, e somente se:

$$x-y+2\geq 0 \quad \text{e} \quad x+y+2>0 \quad \text{ou} \quad x-y+2\leq 0 \quad \text{e} \quad x+y+2<0.$$

Se $x-y+2\geq 0$ e $x+y+2>0$; então, $-2-x<y\leq x+2$ tal que $x>-2$.

Se $x-y+2\leq 0$ e $x+y+2<0$; então, $2+x\leq y<-2-x$ tal que $x<-2$.

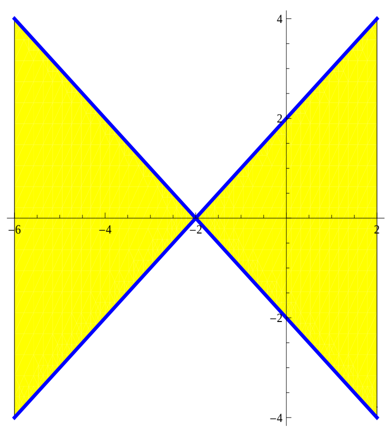


Figura 1.24: Região do exemplo [3].

[4] Esboce a região determinada pelos pontos que são solução de: $|x+y|\leq 2$.

$|x+y|\leq 2$ é equivalente a $-2\leq x+y\leq 2$; logo, temos $-2-x\leq y\leq 2-x$, para todo$x\in\mathbb{R}$. Isto é, a região delimitada entre as retas $y=-x-2$ e $y=2-x$.

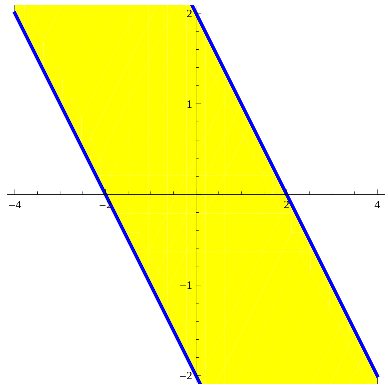


Figura 1.25: Região do exemplo [4].

1.9.1 Sistemas de Inequações no Plano

Seja um sistema com n inequações. O método para determinar a região do plano que representa a solução do sistema, consiste em determinar n regiões do plano, uma para cada inequação. Finalmente, fazemos a interseção das n regiões obtidas.

Exemplo 1.18.

[1] Esboce a região determinada pelos pontos que são solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y > 2 \\ -2\,x + y \leq 1 \\ -x + 2\,y \geq -3. \end{cases}$$

Esbocemos as retas $y = -x + 2$, $y = 2\,x + 1$ e $2\,y = x - 3$

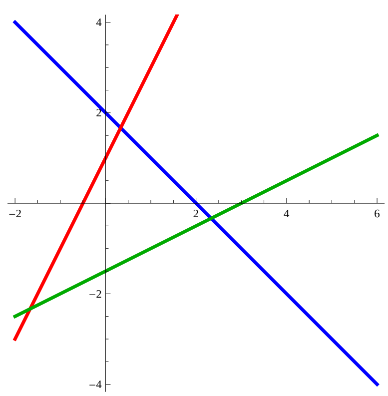


Figura 1.26: As retas $y = -x + 2$ (azul), $y = 2\,x + 1$(vermelho) e $2\,y = x - 3$ (verde).

A região R_1 determinada por $x + y > 2$ é o conjunto dos pontos que ficam estritamente acima da reta $y = -x + 2$. A região R_2 determinada por $-2\,x + y \leq 1$ é o conjunto dos pontos que ficam abaixo da reta $y = 2\,x + 1$.

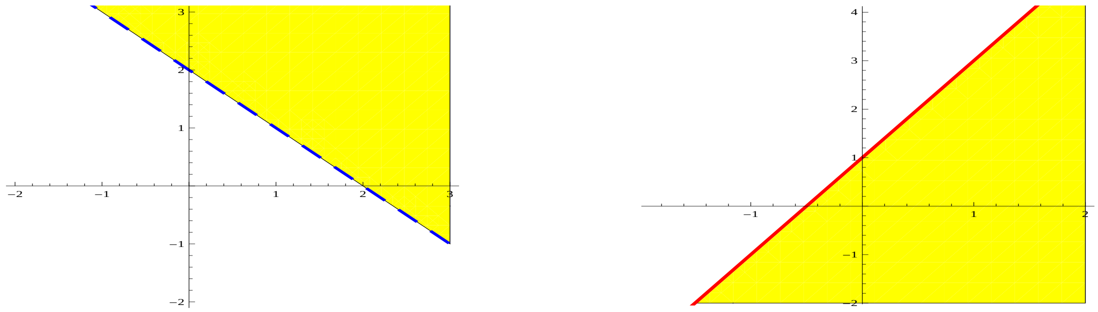


Figura 1.27: Gráficos das regiões R_1 e R_2, respectivamente.

A região R_3 determinada por $-x+2\,y \geq -3$ 'e o conjunto dos pontos que ficam acima da reta $2\,y = x-3$:

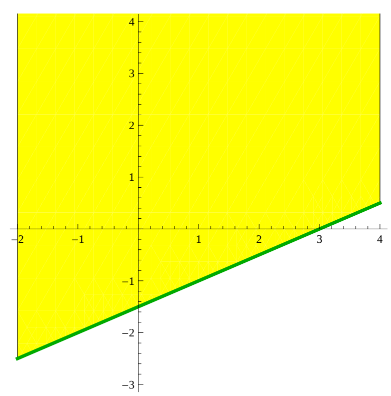


Figura 1.28: região R_3.

Finalmente a região que é solução do sistema é $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$:

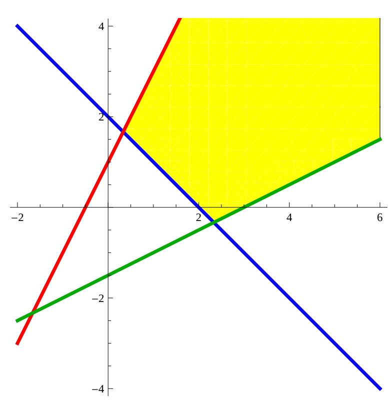


Figura 1.29: região R.

[2] Esboce a região determinada pelos pontos que são solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x^2 + y^2 - 12\,x + 20 \geq 0. \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 25$ é um círculo de raio 5, centrado na origem e:

$$x^2 + y^2 - 12\,x + 20 = (x-6)^2 + y^2 - 16 = 0$$

é um círculo de raio 4 centrado no ponto $(6,0)$. Logo, os pontos que são solução do sistemas, são os que estão fora do círculo $(x-6)^2 + y^2 = 16$ e dentro do círculo $x^2 + y^2 = 25$:

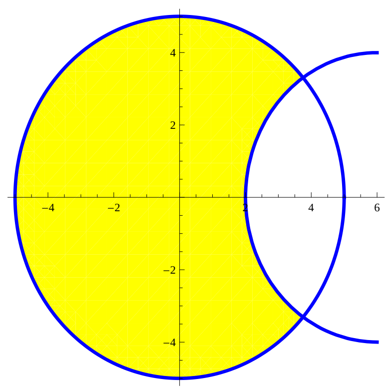


Figura 1.30: Região do exemplo [5].

1.10 Aplicações das Inequações

A seguir apresentaremos alguns exemplos de inequações aplicados à Economia:

Exemplo 1.19.

[1] Uma empresa produz x unidades de um certo produto a um preço, em dólares, dado por $x^2 - 200\,x + 1200$. Quantas unidades do produto podem ser fabricadas com um orçamento de 5600 dólares?

Devemos verificar quando $x^2 - 200\,x + 1200 \leq 5600$; isto é, resolver $x^2 - 200\,x - 4400 \leq 0$, que é equivalente a:

$$(x+20)\,(x-220) \leq 0 \Longleftrightarrow -20 \leq x \leq 220.$$

Logo, podem ser produzidas no máximo 220 unidades.

[2] Uma empresa produz dois tipos de produtos obtendo um lucro de 10 dólares pelo primeiro e 20 dólares pelo segundo. Quantas unidades de cada produto deve produzir para obter um lucro acima de 10000 dólares?

Sejam a e b os produtos, x e y as unidades produzidas de cada produto, respectivamente. Logo, o lucro será dado por $10\,x + 20\,y$; então, devemos resolver:

$$10\,x + 20\,y > 10000 \Longleftrightarrow y > 500 - \frac{x}{2}.$$

Então, se x é a quantidade de produtos do tipo a e y é a quantidade de produtos b, então y deve ser estritamente superior a $500 - \dfrac{x}{2}$.

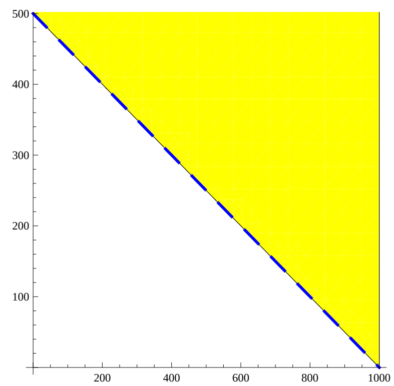


Figura 1.31: Região do exemplo [2].

[3] Um investidor dispõe de 3000000 dólares para investimentos. Se aplica 1000000 dólares num investimento que paga $x\%$ de juros mensal e o restante do montante o aplica num outro investimento que paga o dobro do primeiro, que condições deve ter a taxa de juros x para que o investidor obtenha ganhos maiores que 90000 dólares?

Como x é o percentual dos juros, temos que os ganhos do investidor é:

$$1000000 \left[\frac{x}{100}\right] + 2000000 \left[\frac{2\,x}{100}\right],$$

Como o investidor deseja ganhar mais que 90000 dólares, devemos resolver:

$$1000000 \left[\frac{x}{100}\right] + 2000000 \left[\frac{2\,x}{100}\right] > 90000 \Longleftrightarrow 50000\,x > 90000 \Longleftrightarrow x > 1.8\%.$$

[4] Uma empresa produz dois tipos de produtos. Para produzir o primeiro necessita 20 unidades de uma certa matéria prima e 6 unidades de mão de obra e para produzir o segundo necessita 10 unidades da mesma matéria prima do primeiro produto e 8 de mão de obra. A empresa tem um depósito com 400 unidades da matéria prima e 180 de mão de obra. Represente gráficamente as possibilidades de produção da empresa.

Denotemos por x o número de unidades produzidas do primeiro produto e por y o número de unidades produzidas do segundo produto; tendo em conta que existem 400 unidades de matéria prima:

$$10\,x + 5\,y \leq 200.$$

Por outro lado, a mão de obra é de 180:

$$6\,x + 8\,y \leq 180$$

Lembrando que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Logo, devemos estudar o sistema:

$$\begin{cases} 20\,x + 10\,y \leq 400 \\ 6\,x + 8\,y \leq 180, \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} y \le 2\,(20-x) \\ y \le \dfrac{3\,(30-x)}{4}. \end{cases}$$

Como $x \ge 0$ e $y \ge 0$, o conjunto-solução corresponde aos pontos que estão na interseção dos quatro semi-planos.

$$\begin{cases} y \le 2\,(20-x) \\ y \le \dfrac{3\,(30-x)}{4} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

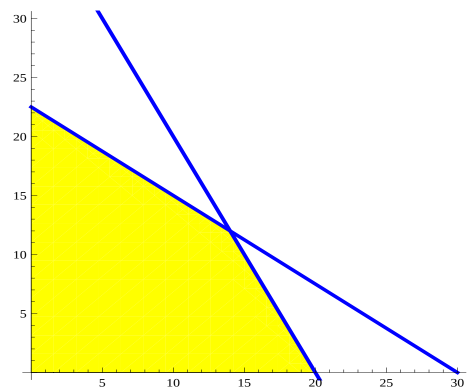


Figura 1.32: Região do exemplo [3].

1.11 Exercícios

1. Determine os valores de x tais que:

   (a) $\sqrt{x^2} = x$
   (b) $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$
   (c) $\sqrt{x^2 - 2\,x + 1} = 1 - x$
   (d) $\sqrt{x^4} = x^2$
   (e) $|x+1| = |x-1|$
   (f) $|x-1|^2 = |2\,x - 1|$
   (g) $|x| = |x+7|$
   (h) $|x-1|^2 = |2\,x+1|$

2. Verifique se é verdadeiro ou falso, dando um exemplo no caso de a resposta ser falso:

   (a) Para todo x, y e z: $|x+y+z| = |x| + |y| + |z|$ e

   (b) Para todo x e y: $|x-y| \leq |x| - |y|$.

3. Marque os seguintes pontos no plano coordenado e calcule a distância entre eles:

   (a) $(4,5)$; $(-4,-5)$
   (b) $(0,6)$; $(-3,-6)$
   (c) $(-2,-3)$; $(-8,-6)$
   (d) $(5,7)$; $(-4,3)$
   (e) $(\sqrt{2},1)$; $(0,1)$
   (f) $(-\pi,3)$; $(3,\pi)$
   (g) $(-5,9)$; $(4,-7)$
   (h) $(-1,-10)$; $(10,2)$
   (i) $(-4,5)$; $(-4,9)$
   (j) $(\sqrt{225},3)$; $(15,\sqrt{3})$

4. Utilize a fórmula da distância para verificar que os pontos $(-2,1)$, $(2,2)$, $(10,4)$ são colineares.

5. Utilize a fórmula da distância para verificar que os comprimentos das diagonais de um retângulo são iguais.

6. Verificar que os seguintes pontos: $(3,-3)$, $(-3,3)$ e $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ são os vértices de um triângulo equilátero.

7. Determine os pontos equidistantes dos pontos $(0,-2)$ e $(6,4)$.

8. Verifique que a distância do ponto (x_0, y_0) à reta $ax + by + c = 0$ é
$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

9. Determine a distância entre as retas $4x + 3y + 12 = 0$ e $4x + 3y - 38 = 0$.

10. Ache a equação da reta que passa pelos pontos:

(a) $P_1 = (3,1)$; $P_2 = (5,2)$
(b) $P_1 = (1,3)$; $P_2 = (2,5)$
(c) $P_1 = (-5,3)$; $P_2 = (0,4)$
(d) $P_1 = (1,-1)$; $P_2 = (-1,1)$
(e) $P_1 = (2,3)$; $P_2 = (4,7)$
(f) $P_1 = (1,1)$; $P_2 = (-1,-1)$

11. Obtenha a equação da reta paralela à reta $2\,x + 3\,y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (5,-2)$.

12. Ache a equação da reta perpendicular à reta $2\,x + 5\,y - 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (1,1)$.

13. Verifique que as retas $2\,x + 3\,y = 1$ e $6\,x - 4\,y - 1 = 0$ são perpendiculares.

14. Determine a natureza das curvas representadas pelas seguintes equações:

(a) $3y^2 - 2x - 12y + 12 = 0$
(b) $16x^2 - 9y^2 = -144$
(c) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$
(d) $2x^2 + 4x + 3y - 4 = 0$
(e) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$
(f) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$
(g) $9x^2 + 16y^2 = 25$
(h) $x^2 + y^2 + 16x + 16y + 64 = 0.$
(i) $5x^2 + 25x + 10y^2 - 5 = 0$
(j) $x^2 + 8\,x + -y^2 + 3\,y = 0.$
(k) $x^2 + y^2 - 4\,x - 4\,y = 0$
(l) $x^2 + y^2 - 18\,x - 14\,y + 130 = 0.$
(m) $x^2 + y^2 + 8\,x + 10\,y + 40 = 0$
(n) $4\,x^2 + 4\,y^2 + 12\,x - 32\,y = -37.$

15. Dada a reta $y = x + k$ e o círculo $x^2 + y^2 = 9$, determine k tal que:

(a) sejam secantes;

(b) sejam tangentes.

16. Para que valores de k a reta $y = k\,x$ é tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 20\,y + 36 = 0$?

17. Determine as constantes A, B e C tais que:

(a) $\dfrac{2\,x+1}{1-x^2} = \dfrac{A}{1+x} + \dfrac{B}{1-x}.$

(b) $\dfrac{1}{(x+2)(2x+1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{2x+1}.$

(c) $\dfrac{1}{(x+2)(x^2-1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1}.$

18. Determine o quociente e o resto das divisões:

    (a) $3\,x^4 - 5\,x^2 + 6\,x + 1 \div x^2 - 3\,x + 4$.

    (b) $5\,x^5 - 4\,x^3 - 2\,x + 1 \div x + 1$.

    (c) $x^{11} - 1 \div x + 1$.

    (d) $x^5 + 12\,x^4 + 3\,x^2 - 16 \div x^2 + 3\,x - 4$.

    (e) $x^3 - 3\,x^2 + 2\,x + 1 \div x^2 - x + 1$.

19. Determine as constantes a e b de modo que o polinômio $P(x)$ seja divisível por $Q(x)$, onde:

    (a) $P(x) = x^4 - 3\,x^3 + a\,x + b$, $Q(x) = x^2 - 2\,x + 4$.

    (b) $P(x) = 6\,x^4 - 7\,x^3 + a\,x^2 + 3\,x + 2$, $Q(x) = x^2 - x + b$.

    (c) $P(x) = 8\,x^3 - 10\,x^2 + a\,x + b$, $Q(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 2$.

    (d) $P(x) = 3\,x^3 + a\,x^2 - 7\,x + b$, $Q(x) = x^2 - 5\,x + 1$.

20. Determine as raízes racionais dos polinômios:

    (a) $P(x) = 10\,x^6 - 27\,x^5 - 120\,x^4 + 120\,x^2 + 27\,x - 10$

    (b) $P(x) = 2\,x^5 - 3\,x^4 - 14\,x^3 + 38\,x^2 - 8\,x - 15$

    (c) $P(x) = 3\,x^5 - 2\,x^4 - 3\,x + 2$

    (d) $P(x) = x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6$

21. Verifique a regra de Ruffini: O resto da divisão de $P(x)$ por $x - c$ é $P(c)$.

22. Se $a + \sqrt{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ é uma raiz irracional do polinômio $P(x)$ de coeficientes racionais, verifique que $a - \sqrt{b}$ também é uma raiz do polinômio.

23. Resolva a equação $3\,x^4 - 5\,x^3 - 7\,x^2 + 3\,x + 2 = 0$, se $1 + \sqrt{2}$ é uma das raízes.

24. Ache a solução das seguintes desigualdades e represente no eixo coordenado o conjunto solução:

    (a) $x^4 - x^2 < 0$

    (b) $x^2 - 2 \geq x$

    (c) $x^2 + x > 2$

    (d) $(x - 5)^4\,(x + 10) \leq 0$

    (e) $|x + 2| < 1$

    (f) $|x - 5| < |x + 1|$

    (g) $4\,x^2 + 10\,x - 6 < 0$

    (h) $|x - 1|^2 < |2\,x + 1|$

    (i) $\dfrac{3\,x - 5}{2\,x + 4} > 1$

(j) $|x^2-1||x+1|>0$

(k) $2\,x^2-2\leq x^2-x$

(l) $|x-1|+|x-2|>|10\,x-1|$

(m) $x^2-7\,x+8>(x-6)^2$

(n) $|x^2-x-1|<2$

(o) $\dfrac{|x^2-5\,x+4|}{|x^2-4|}<1$

(p) $|x-1|+|x+2|\geq\dfrac{|x-2|}{2}$

(q) $|x+1|+|x+2|>|10\,x-1|$

(r) $|x^2-1|<|x-1|$

25. Determine o conjunto-solução de:

(a) $\begin{cases}3\,x-2<x\\6\,x-4>3-x\end{cases}$

(b) $\begin{cases}x+3\leq 5\\x+3\leq 2\,x\end{cases}$

(c) $\begin{cases}5\,x+1\leq\dfrac{3x}{2}+5\\2\,(x+3)\geq x\end{cases}$

(d) $\begin{cases}5\,x-3<6+2\,x\\3-2\,x>4\end{cases}$

(e) $\begin{cases}3\,x-15<x-5\\2-x\geq 6\end{cases}$

(f) $\begin{cases}x+3>0\\x^2+x-2<0\end{cases}$

26. Esboce as regiões determinadas por:

(a) $x-2y-3>0$

(b) $2x+y>5$

(c) $2x-3y\leq -1$

(d) $3x-2y\leq 13$

(e) $\dfrac{x+y}{x-2y+3}<0$

(f) $x^2+y^2-2\,x-2\,y+1\geq 0$

27. Esboce as regiões da solução de:

(a) $\begin{cases}2\,x-y<3\\x+y<3\end{cases}$

(b) $\begin{cases}x+y<2\\2\,y-2\,x>4\end{cases}$

(c) $\begin{cases}x+y<120\\3\,y-x\leq 0\\x\leq 100\\y\leq 100\end{cases}$

(d) $\begin{cases}x+y>2\\-2\,x+y\leq 1\\-x+2\,y\geq -3\end{cases}$

28. Se a soma de 3 números naturais consecutivos é menor que 12, quais são os possíveis números?

29. Um caminhão suporta uma carga máxima de 12 toneladas e deve transportar dois volumes de igual peso. Qual será a variação do peso dos volumes se o caminhão já tem uma carga de 4 toneladas?

30. Se são compradas x unidades de um certo produto a um preço de $\frac{300}{x} + 3$ reais, qual é o número de unidades que devem ser vendidas para que as vendas ultrapassem 6000 reais?

31. Uma empresa pode vender um produto por 720 dólares a unidade. Se $x^2 + 360\,x + 1000$ é a lei para produzir x unidades por mês, determine quando a empresa tem perdas para produzir tal produto.

Capítulo 2

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

2.1 Definições e Exemplos

Neste capítulo estudaremos uma das noções fundamentais da Matemática, o conceito de função. Uma função de uma variável real é uma regra que descreve como uma quantidade é determinada por outra quantidade, de maneira única. Existem várias alternativas para definir formalmente uma função. Escolhemos a seguinte:

Definição 2.1. *Sejam A, $B \subset \mathbb{R}$. Uma função f definida em A e com valores em B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um* **único elemento** $y \in B$.

As notações usuais são: $f : A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$ ou

$$\begin{aligned} f : &A \longrightarrow B \\ &x \longrightarrow f(x). \end{aligned}$$

O número x é chamado **variável independente** da função e y **variável dependente** da função.

Exemplo 2.1.

[1] A seguinte tabela, que mostra a vazão semanal de água de uma represa, representa uma função:

Dia	1	2	3	4	5	6	7
m^3/seg	360	510	870	870	950	497	510

De fato, a tabela representa uma função, pois a cada dia fica associada uma única quantidade de vazão. Note que, possivelmente, não existe uma fórmula matemática para expressar a função do exemplo, mas, a definição de função é satisfeita.

[2] Foi feita uma pesquisa de preços (em R$) de produtos da cesta básica em três supermercados

de um determinado bairro, obtendo-se a seguinte tabela:

Produto	Sup. A	Sup. B	Sup. C
1	2.6	2.9	2.52
2	0.96	0.94	1.0
3	1.78	1.5	1.6
4	1.23	1.45	1.36
5	3.2	3.0	2.95
6	4.07	3.96	4.2
7	2.3	2.62	2.5

Esta tabela não representa uma função, pois a cada produto corresponde **mais de um** preço.

[3] Uma pequena empresa de serviço postal cobra 10 reais pelo primeiro quilo de correspondência e 4 reais por cada quilo adicional; se a capacidade máxima de cada envio de correpondência é de 4 quilos, a seguinte função representa o custo de entrega da correspondência:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 14 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ 18 & \text{se} \quad 2 < x \leq 3 \\ 22 & \text{se} \quad 3 < x \leq 4. \end{cases}$$

[4] A população P de um país, em milhões é função do tempo t, em anos. Na seguinte tabela temos a estimativa de população P no tempo t:

Ano	População
2000	5
2003	5.3
2006	5.6
2008	6.1
2009	6.2

Como a cada valor de t existe um único valor de $P(t)$, temos que $P = P(t)$ é uma função.

[5] Um tanque para estocagem de oxigênio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro circular reto de $8\,m$ (m =metros) de altura, com um hemisfério em cada extremidade. O volume do tanque é descrito em função do raio r.

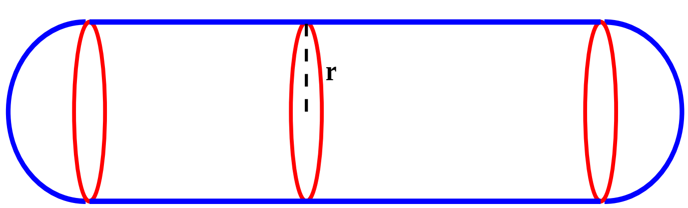


Figura 2.1: Tanque de raio r.

O volume do cilindro é $8\,r^2\,\pi\,m^3$ e o dos dois hemisférios é $\dfrac{4\,r^3\,\pi}{3}\,m^3$; logo, o volume total é:

$$V(r) = \frac{4\,r^2\,(r+6)\,\pi}{3}\,m^3.$$

Por exemplo, se o raio for $r = 1\,m$, o volume é $V(1) = \dfrac{28\,\pi}{3}\,m^3$.

[6] Temos 1000 metros de arame para fazer um curral de formato retangular. Podemos escrever a área do curral em função de um dos lados. De fato, se x e y são os lados do curral, seu perímetro é $2\,(x+y) = 1000$ e a área do retângulo é $A = x\,y$; logo:

$$A(x) = x\,(500 - x) = 500\,x - x^2.$$

[7] Considere $A = \mathbb{R}$ e f a regra que associa a cada número real $x \in A$, o seu cubo, isto é: $y = f(x) = x^3$.

Por exemplo, ao número -1 associamos o número $f(-1) = (-1)^3 = -1$; ao número 2 associamos o número $f(2) = (2)^3 = 8$; ao número $\sqrt{2}$ associamos o número $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, ao número $t^4 + 1$ associamos o número $f(t^4+1) = (t^4+1)^3$, etc.

x	$f(x) = x^3$
-1	$(-1)^3 = -1$
2	$(2)^3 = 8$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$
t	t^3
t^4+1	$(t^4+1)^3$
$t^{-1/4}$	$t^{-3/4}$
$\sqrt[6]{m}$	$m^{1/2}$
$(t^4 - 4\sqrt[7]{t} + 1)^5$	$(t^4 - 4\sqrt[7]{t} + 1)^{15}$

[8] Seja $A = [0, +\infty)$ e f a regra que associa a cada número real $x \geq 0$ sua raiz quadrada, isto é: $y = f(x) = \sqrt{x}$. Por exemplo, ao número 0 associamos o número $f(0) = \sqrt{0} = 0$; ao número t^4 associamos o número $f(t^4) = \sqrt{t^4} = t^2$ e ao número -4 não podemos associar nenhum número real, pois, $\sqrt{-4}$ não é um número real.

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
2	$\sqrt{2}$
4	2
-4	indefinido
t^4	t^2
t^4+1	$\sqrt{t^4+1}$
$\sqrt[6]{m}$	$\sqrt[12]{m}$
$(t^4 + 4\sqrt[8]{t} + 1)^{10}$	$(t^4 + 4\sqrt[8]{t} + 1)^5$

[9] Seja $A = \mathbb{R}$ e f a seguinte função :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 2 \\ x^3 & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Ao número -1 associamos o número $f(-1) = (-1)^2 = 1$; ao número 2 associamos o número $f(2) = 2^3 = 8$; ao número $\sqrt{2}$ associamos o número $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, etc.

x	0	-1	-3	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
$f(x)$	0	$(-1)^2 = 1$	$(-3)^2 = 9$	$(2)^3 = 8$	3	$5\sqrt{5}$

[10] Seja $A = \mathbb{R}$ e f a seguinte função :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por exemplo, ao número -1 associamos o número $f(-1) = 1$; ao número 2 associamos o número $f(2) = 1$; ao número $\sqrt{2}$ associamos o número $f(\sqrt{2}) = -1$, pois $\sqrt{2}$ é irracional; $f(\pi) = -1$; $f\left(\frac{5}{7}\right) = 1$.

x	0	-1	2	e	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
$f(x)$	1	1	1	-1	-1	-1

Nos exemplos [5], [6], [7] e [8] as funções são definidas por fórmulas (que fornecem y quando são atribuidos valores a x). Nos exemplos [9] e [10], as funções não são dadas por uma fórmula, mas, a definição de função é satisfeita.

Em geral, nem todas as funções são necessariamente, definidas de maneira explícita. Por exemplo:

[11] Se, durante o verão de 2012, no Rio de Janeiro, registrássemos a temperatura máxima ocorrida em cada dia, obteríamos uma função. De fato, a cada dia, está associado uma única temperatura máxima, isto é, a temperatura é função do dia. Embora não exista uma fórmula explícita para expressar a função do exemplo, a definição de função é satisfeita.

Em geral, a maioria das funções usadas nas aplicações são dadas por fórmulas ou equações. Mas é preciso ter um pouco de cuidado, pois nem toda equação de duas variáveis define uma função. Por exemplo, a equação $y^2 = x$ não define uma função, pois para $x = 1$ temos dois valores para y, a saber: $y = \pm 1$; mas $y^2 = x$ dá origem a duas funções: $y = f_1(x) = \sqrt{x}$ e $y = f_2(x) = -\sqrt{x}$.

Podemos imaginar uma função como uma máquina que utiliza uma certa matéria prima (input) para elaborar algum produto final (output) e o conjunto dos números reais como um depósito de matérias primas. Fica evidente que é fundamental determinar, exatamente, neste depósito, qual matéria prima faz funcionar nossa máquina; caso contrário, com certeza, a estragaremos.

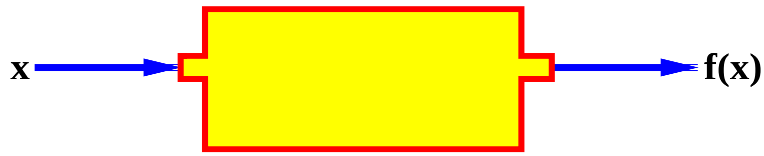


Figura 2.2:

Esta analogia nos leva às seguintes definições:

Definição 2.2.

1. *O conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a definição de função é chamado* **domínio da função** *f e é denotado por $Dom(f)$.*

2. *O conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que $y = f(x)$, onde $x \in Dom(f)$ é chamado* **imagem da função** *f e é denotado por $Im(f)$.*

É claro que $Dom(f) \subset \mathbb{R}$, $Im(f) \subset \mathbb{R}$, e que $Dom(f)$ é o conjunto dos valores da variável independente para os quais f é definida; $Im(f)$ é o conjunto dos valores da variável dependente calculados a partir dos elementos do domínio.

Duas funções f e g são ditas **idênticas** se tem o mesmo domínio D e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in D$; por exemplo as funções $f(x) = x^2$, $x > 0$ e $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ são diferentes pois seus domínios são diferentes.

Antes de ver alguns exemplos, voltamos a insistir que para estudar qualquer função, devemos sempre determinar os conjuntos $Dom(f)$ e $Im(f)$.

Exemplo 2.2.

[1] A área de qualquer círculo é função de seu raio.

De fato, se o raio do círculo é denotado por $r > 0$, então, a área é $A(r) = \pi\, r^2$; logo,

$$Dom(A) = Im(A) = (0, +\infty).$$

Um círculo de raio igual a $5\, u.c.$, tem área $A(5) = 25\,\pi\, u.a$; um círculo de raio igual a $300\, u.c.$, tem área $A(300) = 90000\,\pi\, u.a.$ ($u.c.$=unidades de comprimento) e ($u.a.$=unidades de área).

[2] Considere a função $y = f(x) = x^2$.

É claro que não existem restrições para o número real x; logo, temos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

e $y = x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$; então $Im(f) \subset [0, +\infty)$. Como todo número real não negativo possui raiz quadrada real; então:

$$Im(f) = [0, +\infty).$$

[3] Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x}$.

Uma raiz quadrada existe somente se $x \geq 0$; então:

$$Dom(f) = [0, +\infty).$$

Como todo número real $x \geq 0$ possui raiz quadrada:

$$Im(f) = [0, +\infty).$$

[4] Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Como no caso anterior, $\sqrt{x^2 - 1}$ existe somente se $x^2 - 1 \geq 0$; resolvendo a inequação temos:

$$Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \text{ e, novamente, temos: } Im(f) = [0, +\infty).$$

[5] Considere a função $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

É claro que f é definida se e somente se $x \neq 0$; logo temos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$$

por outro lado, uma fração é nula se e somente se o numerador é nulo; então

$$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

[6] Considere a função $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Como no caso anterior o denominador da fração não pode ser nulo; logo $x^2 - 1 \neq 0$; então, $x \neq \pm 1$ e:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}; \quad Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

[7] Considere a função $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Como a raiz cúbica de um número positivo ou negativo é positiva ou negativa,

$$Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}.$$

[8] Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1}$.

A função é definida se $x \geq 0$ e $x^2 - 1 \geq 0$ simultaneamente. Resolvendo as inequações, obtemos $x \geq 1$; logo,

$$Dom(f) = [1, +\infty) \quad \text{e} \quad Im(f) = (0, +\infty).$$

Agora que determinamos nos exemplos os domínios e imagens das funções, podemos avaliar, sem perigo, estas funções.

[9] Se $f(x) = \sqrt{x}$, então $f(5) = \sqrt{5}$, $f(\pi) = \sqrt{\pi}$ e $f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$, pois $x^2 + 1$ é sempre positivo.

[10] Se $g(x) = \dfrac{1}{x}$, calculamos $g\big(\dfrac{1}{t}\big) = t$, se $t \neq 0$ e $g(x^4 + 4) = \dfrac{1}{x^4 + 4}$.

2.2 Gráficos de Funções

A representação geométrica de uma função de uma variável real é dada por seu **gráfico** no plano coordenado xy.

Definição 2.3. *O gráfico de uma função $y = f(x)$ é o seguinte subconjunto do plano:*

$$\boxed{G(f) = \{(x, f(x))/x \in Dom(f)\}}$$

Geometricamente $G(f)$ é, em geral, uma curva no plano. Nos exemplos [1], [2] e [4] da seção 2.1, $G(f)$ não é uma curva. Nos casos em que $G(f)$ é uma curva, intuitivamente podemos pensar que os conjuntos $Dom(f)$ e $Im(f)$ representam a "largura" e "altura" máxima da curva, respectivamente. Inicialmente, a construção dos gráficos será realizada fazendo uma tabela, onde as entradas da tabela são os elementos do domínio e as saídas, as respectivas imagens.

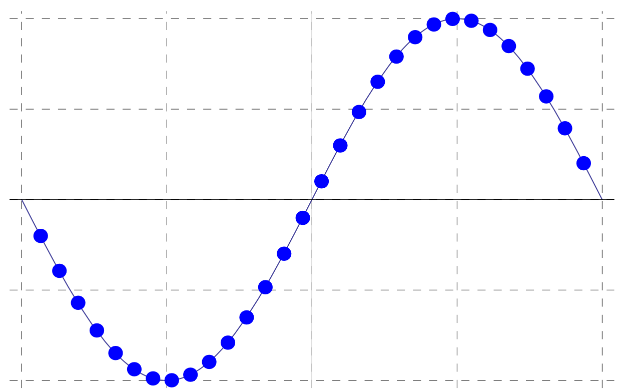


Figura 2.3: Gráfico de uma função.

Este processo é demorado e ineficiente e será abandonado nos capítulos seguintes, quando serão dadas técnicas mais eficientes para fazer o gráfico. É importante não confundir a função com seu gráfico, pois o gráfico é um subconjunto do plano.

Exemplo 2.3.

[1] Esboce o gráfico da função dada pela seguinte tabela, que mostra a vazão semanal de água de uma represa:

Dia	m^3/seg
1	360
2	510
3	870
4	870
5	950
6	497
7	510

O gráfico desta função não representa uma curva. A primeira coluna da tabela representa a abscissa e a segunda coluna as respectivas ordenadas; logo, obtemos:

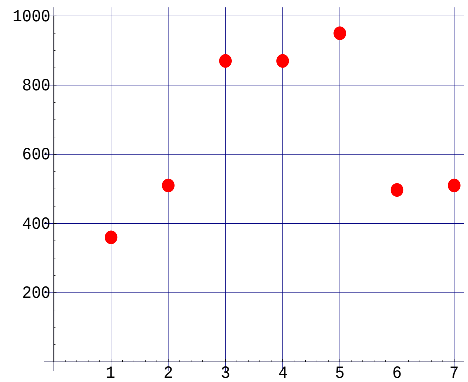


Figura 2.4: Gráfico da vazão semanal de água da represa.

[2] Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$. Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, \infty)$. Fazendo a tabela:

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm 1/4$	$1/16$
$\pm 1/3$	$1/9$
$\pm 1/2$	$1/4$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

$x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, os pontos de abscissas x e $-x$ tem a mesma ordenada $y = x^2$. Logo, o gráfico de f fica situado no primeiro e segundo quadrantes. Observando a tabela, conclui-se que se o valor de $|x|$ aumenta, os valores da correspondente ordenada aumentam mais rapidamente. Se os valores de $|x|$ aproximam-se a zero, os valores correspondentes da ordenada aproximam-se mais rapidamente de zero.

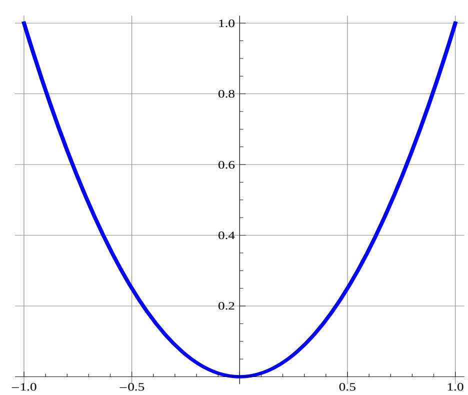


Figura 2.5: Gráfico de $f(x) = x^2$.

[3] Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3$. Note que $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$. Fazendo a tabela:

x	$f(x) = x^3$
0	0
$\pm 1/4$	$\pm 1/64$
$\pm 1/3$	$\pm 1/27$
$\pm 1/2$	$\pm 1/8$
± 1	± 1
± 2	± 8

Se $x \geq 0$, então $y \geq 0$ e se $x < 0$, então $y < 0$. Logo, o gráfico está situado no primeiro e terceiro quadrantes. Observando a tabela, vemos que quando $x > 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y também crescem e mais rapidamente. Quando $x < 0$ e x decresce, os valores correspondentes da ordenada y decrescem e mais rapidamente. O gráfico de f é:

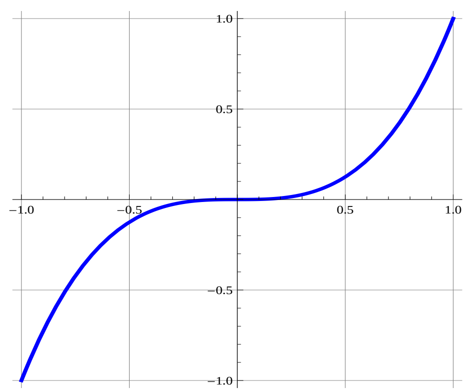


Figura 2.6: Gráfico de $f(x) = x^3$.

[4] Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Note que $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Fazendo a tabela:

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
$\pm 1/100$	± 100
$\pm 1/4$	± 4
$\pm 1/3$	± 3
$\pm 1/2$	± 2
± 1	± 1
± 2	$\pm 1/2$
± 3	$\pm 1/3$

Se $x > 0$, então $y > 0$ e se $x < 0$, então $y < 0$. Logo, o gráfico está situado no primeiro e terceiro quadrantes. Observando a tabela, vemos que quando $x > 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y aproximam-se de zero e à medida que x aproxima-se de zero, os valores correspondentes da ordenada y aumentam muito. Quando $x < 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y decrescem e à medida que x decresce, os valores correspondentes da ordenada y aproximam-se de zero. O gráfico de f é:

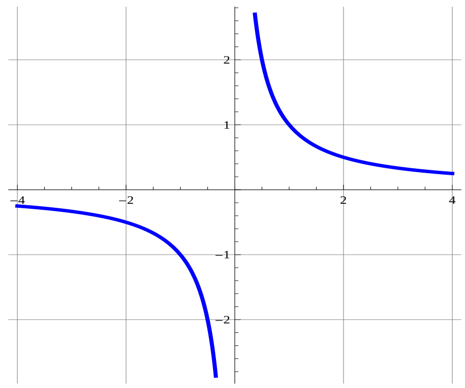


Figura 2.7: Gráfico de $f(x) = 1/x$.

[5] Esboce o gráfico da seguinte função : $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{se} \quad x \geq \dfrac{1}{2} \\ x & \text{se} \quad -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 + x & \text{se} \quad x < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

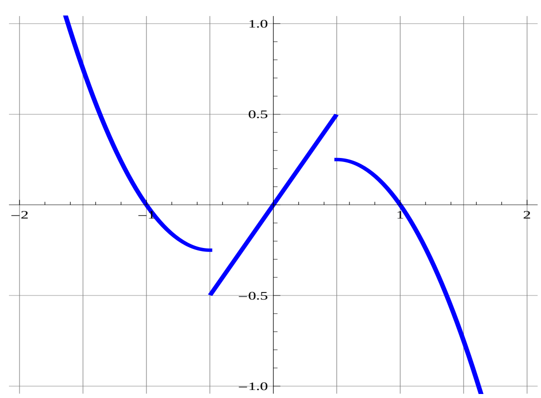


Figura 2.8: Gráfico de $f(x)$ do exemplo [5].

[6] Determine a função f cujo gráfico é:

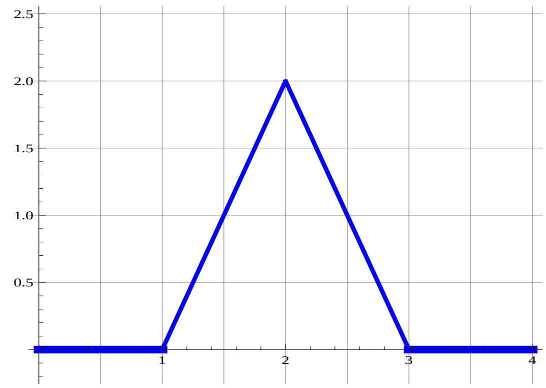


Figura 2.9:

Claramente, $f(x) = 0$ se $x < 1$ e $x > 3$. Determinemos os segmentos de reta que ligam os pontos $(1, 0)$ e $(2, 2)$, $(2, 2)$ e $(3, 0)$, respectivamente. A equação da reta que passa por $(1, 0)$ e $(2, 2)$ é $y = 2\,(x - 1)$. A equação da reta que passa por $(2, 2)$ e $(3, 0)$ é $y = -2\,(x - 3)$; então:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2\,(x-1) & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ -2\,(x-3) & \text{se} \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{se} \quad 3 < x \end{cases}.$$

[7] Uma pequena empresa de serviço postal cobra 10 reais pelo primeiro quilo de correspondência e 4 reais por cada quilo adicional; se a capacidade máxima de cada envio de correpondência é de 4 quilos, a seguinte função representa o custo de entrega da correspondência:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se} \quad 0 < x \le 1 \\ 14 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ 18 & \text{se} \quad 2 < x \le 3 \\ 22 & \text{se} \quad 3 < x \le 4. \end{cases}$$

Claramente a função é constante e igual a 10 no intervalo $(0, 1]$, a 14 no intervalo $(1, 2]$, a 18 no intervalo $(2, 3]$ e 22 no intervalo $(3, 4]$, então:

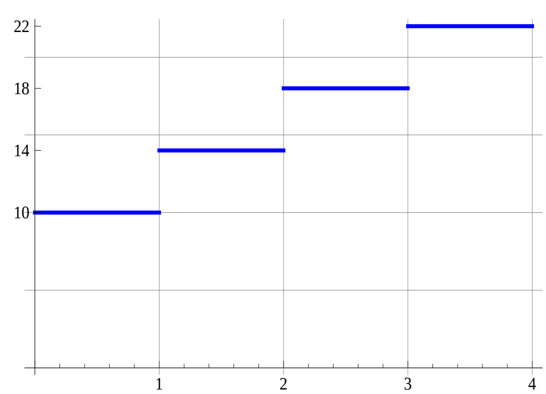


Figura 2.10:

Observação 2.1.

Os gráficos de $f(x) + c$, $f(x + c)$, $c\,f(x)$ *e* $f(c\,x)$ ($c \in \mathbb{R}$) *podem ser obtidos diretamente do gráfico de* $f(x)$. *De fato.*

1. *O gráfico de* $g(x) = f(x + c)$ *pode ser obtido a partir do gráfico de* f *transladando-o ao longo do eixo dos* x *em* c *unidades para a esquerda se* $c > 0$, *ou transladando-o ao longo do eixo dos* x *em* c *unidades para a direita se* $c < 0$.

2. *O gráfico de* $g(x) = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ *pode ser obtido do gráfico de* f *transladando-o ao longo do eixo dos* y *em* c *unidades para cima se* $c > 0$ *ou* c *unidades para baixo se* $c < 0$.

3. *O gráfico de* $g(x) = c\,f(x)$, $c > 1$ *pode ser obtido "esticando-se"o gráfico de* f *verticalmente pelo fator* c.

4. *O gráfico de* $g(x) = f(c\,x)$, $c > 1$ *pode ser obtido "comprimindo-se"o gráfico de* f *horizontalmente pelo fator* c.

5. *O gráfico de* $g(x) = c\,f(x)$, $0 < c < 1$ *pode ser obtido "comprimindo-se"o gráfico de* f *verticalmente pelo fator* c.

6. *O gráfico de* $g(x) = f(c\,x)$, $0 < c < 1$ *pode ser obtido "esticando-se"o gráfico de* f *horizontalmente pelo fator* c.

7. *O gráfico de* $g(x) = -f(x)$ *pode ser obtido pela reflexão do gráfico de* f *em torno do eixo dos* x.

8. *O gráfico de* $g(x) = f(-x)$ *pode ser obtido pela reflexão do gráfico de* f *em torno do eixo dos* y. *Em cada caso é conveniente especificar os domínios e imagens.*

Exemplo 2.4.

[1] Observe os gráficos de $y = f(x) = 2\,x - 3$ (azul), de $y = f(-2\,x) = -4\,x - 3$ (vermelho) e $y = 2\,f(x + 1) = 4\,x - 2$ (verde).

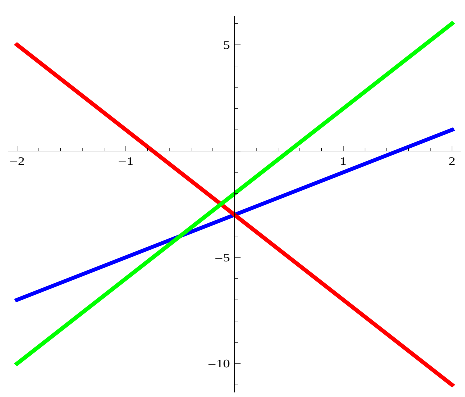


Figura 2.11: Gráficos de [1].

[2] Observe os gráficos de $y = f(x) = x^2 - 4$ (azul), de $y = f(x+1) = (x+1)^2 - 4$ (vermelho) e $y = 2\,f(x-1) = 2\,(x-1)^2 - 8$ (verde):

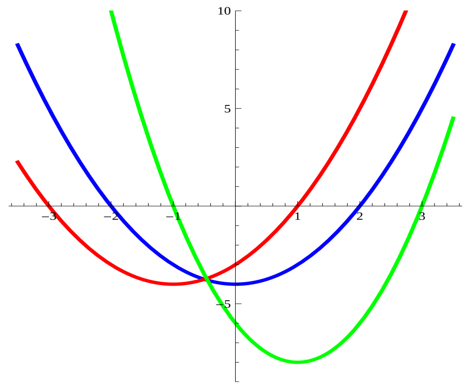


Figura 2.12: Gráficos de [2].

[3] Os gráficos de $f(x) = x^3$ (azul), de $f(x+1) = (x+1)^3$ (vermelho) e $f(-3\,x) = -27\,x^3$ (verde):

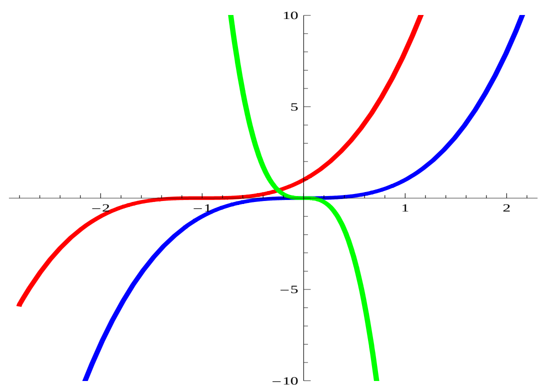


Figura 2.13: Gráficos de [3].

A seguir daremos vários exemplos de funções, com seus respectivos domínios, imagens e gráficos. A idéia é formar um "catálogo"das funções mais usadas, as quais serão utilizadas nos exemplos e exercícios.

Exemplos de Funções

2.3 Função Modulo ou Valor Absoluto

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = |x|}$$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$, pois o valor absoluto de um número real é sempre não negativo. O gráfico é constituido de duas semi-retas de coeficientes angulares 1 e -1, respectivamente, que se intersectam em $(0,0)$.

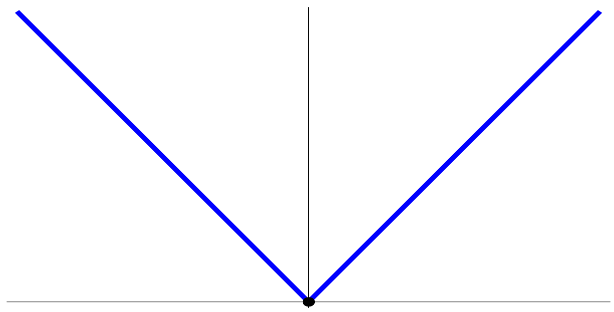


Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = |x|$.

Observe que os gráficos de $|f(x)|$ e de $f(|x|)$ podem ser obtidos do gráfico de $f(x)$. De fato, $g(x) = |f(x)|$ é obtido refletindo através do eixo dos x, no primeiro e segundo quadrantes a porção do gráfico de f que esteja no terceiro e quarto quadrantes. Como exercício, diga como pode ser obtido o gráfico de $f(|x|)$.

Exemplo 2.5.

[1] Escreva a função $f(x) = |x-3|$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $f(x) = 0$ se, e somente se $x = 3$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{se} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

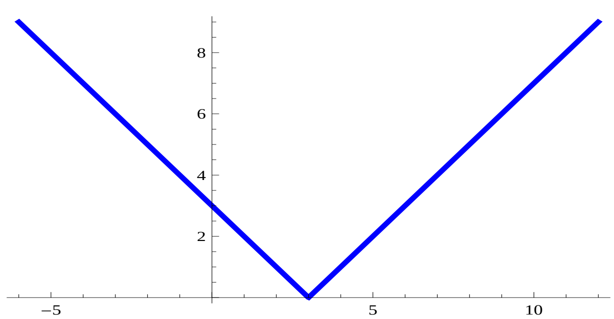


Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = |x-3|$.

[2] Escreva a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ \ \ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

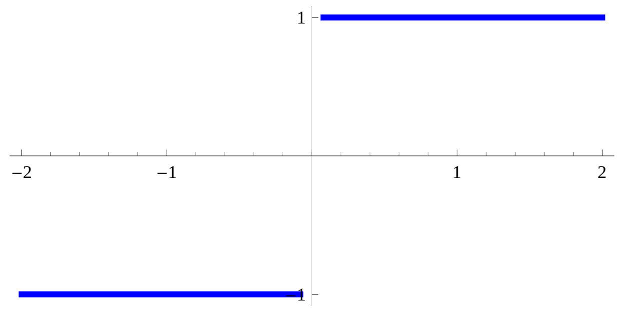


Figura 2.16: Gráfico de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

[3] Esboce os gráficos de:

(a) $g(x) = |x - 1| + 2$.

(b) $h(x) = |x^3|$.

Seja $f(x) = |x|$.

(a) $g(x) = f(x-1)+2$; então, o gráfico de g é obtido a partir do gráfico da função f transladando-o ao longo do eixo dos x em 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima. O gráfico é constituido de dois segmentos de retas de coeficientes angulares 1 e -1, passando por (1,2) e (0,3), respectivamente.

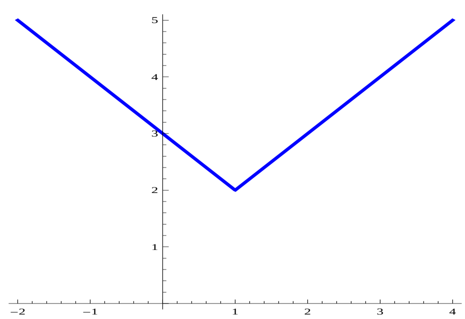


Figura 2.17: Gráfico de g.

(b) Por outro lado $h(x) = f(x^3)$.

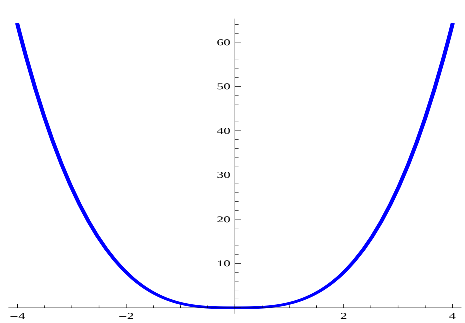


Figura 2.18: Gráfico de h.

2.4 Função Polinomial do Primeiro Grau ou Afim

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = m\,x + b}$$

onde $m,\ b \in \mathbb{R}$. Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Usando a definição de distância entre pontos do plano não é difícil provar que dados três pontos no gráfico de f, estes são colineares; o gráfico de f é a reta de coeficiente angular m passando por $(0, b)$. E, reciprocamente, dados dois pontos que determinem uma reta não vertical existe uma função afim cujo gráfico é a reta. (Verifique!). Note que:

$$m = \frac{f(c) - f(d)}{c - d},$$

para todo $c,\ d \in \mathbb{R}$, $c \neq d$. Logo:

$$f(0) = b,\ f(1) = m + b,\ \ f(2) = 2\,m + b = f(1) + m,\ f(3) = 3\,m + b = f(2) + m;$$

em geral, $f(k+1) = f(k) + m$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $f(0),\ f(1),\ f(2)\,..,\ f(n),..$ formam uma progressão aritmética de razão m.

A propriedade que caracteriza as funcões polinomiais de primeiro grau é que $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h, isto é, a acréscimos iguais dados a x correspondem acréscimos iguais para f. É esta característica que deve ser utilizada nas aplicações. Quando $m = 0$, a função é chamada **constante** e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo dos x que passa pelo ponto $(0, b)$.

Exemplo 2.6.

Usando as observações 2.1, temos:

[1] À esquerda, os gráficos de $f(x) = x + 1$ (negro), e $\dfrac{1}{2}\,f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ (azul) e $2\,f(x) = 2\,x + 2$ (vermelho), respectivamente.

[2] À direita, os gráficos de $f(x) = x + 1$ (negro), e $f\big(\dfrac{x}{2}\big) = \dfrac{x}{2} + 1$ (azul) e $f(-2\,x) = 1 - 2\,x$ (vermelho), respectivamente:

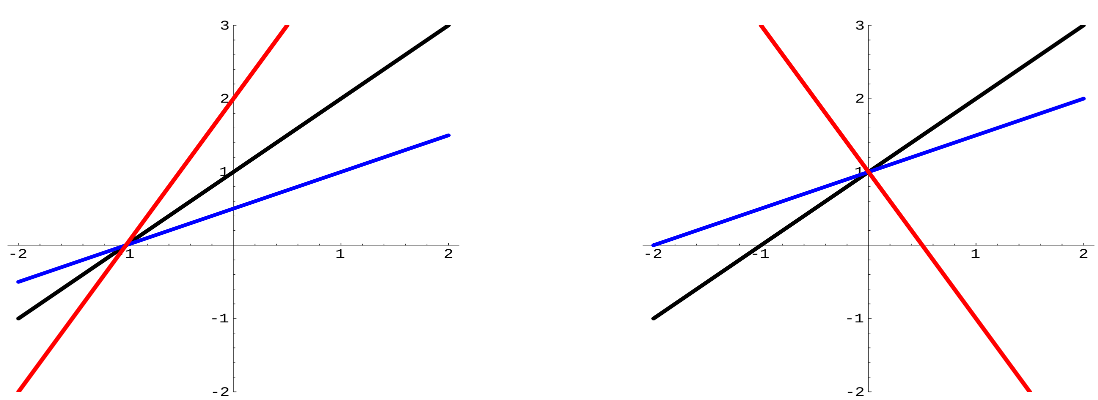


Figura 2.19:

Quando $b = 0$, obtemos um tipo importante de função, chamada **função linear**. Portanto, a função linear é definida por:

$$\boxed{f(x) = m\,x}$$

e é modelo matemático para resolver problemas que envolvem proporcionalidade. Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular m passando pela origem.

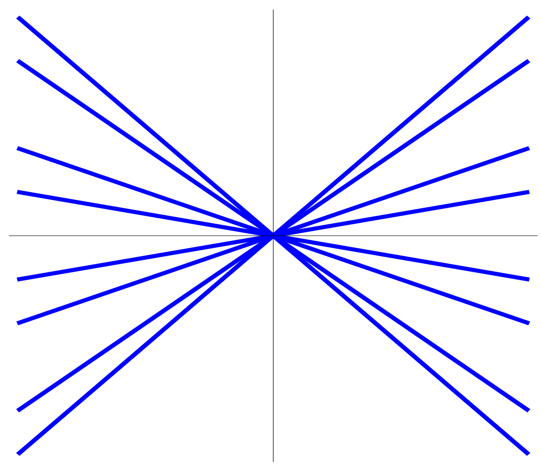


Figura 2.20: O gráfico de $f(x) = m\,x$, para diversos m.

Proposição 2.1. *Seja f uma função linear:*

1. *Para todo $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, temos que:*

$$\boxed{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$$

2. *Como $f(1) = m$, $f(2) = f(1) + f(1) = 2\,m$; em geral:*

$$\boxed{f(n\,x) = n\,f(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

3. *Quando $m = 1$, temos:*

$$\boxed{f(x) = x}$$

que é chamada função **identidade**. *Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular* 1.

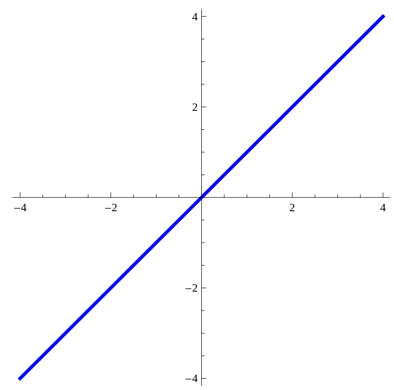


Figura 2.21: O gráfico de $f(x) = x$.

Exemplo 2.7.

[1] O lucro obtido pela venda de um certo produto, depende da quantidade de unidades vendidas vezes o preço unitário. Se o preço unitário é 4 reais, escreva e esboce a função que representa o lucro.

Claramente este problema envolve proporcionalidade. Logo:

$$f(x) = m\,x \Longrightarrow 4 = f(1) = m,$$

então $f(x) = 4\,x$. Note que $Dom(f) = [0, +\infty)$. O gráfico da função é uma reta de coeficiente angular 4 passando pela origem.

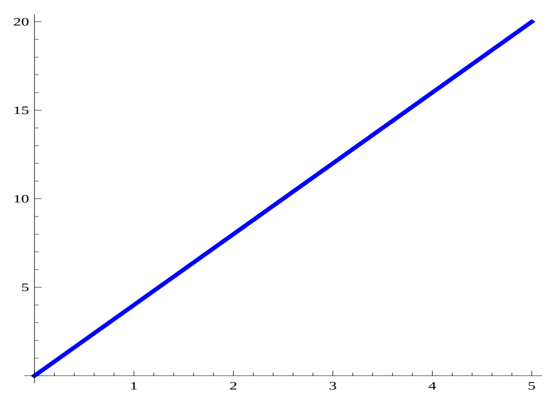


Figura 2.22: O gráfico de $f(x) = 4\,x$.

[2] Suponha que os seguintes dados foram coletados num experimento. Se a teoria subjacente à experiência indica que os dados tem uma correlação afim, ache tal função afim.

x	-10.3	-6.8	1.5	14.6	234.6
y	-35.9	-25.4	-0.5	38.8	698.8

Seja $y = f(x) = a\,x + b$. Pelas propriedades das funções afins:

$$-0.5 = f(1.5) = 1.5\,a + b \quad \text{e} \quad -35.9 = f(-10.3) = -10.3\,a + b.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 1.5\,a + b & = -0.5 \\ -10.3\,a + b & = -35.9 \end{cases}$$

obtemos: $a = 3$ e $b = -5$; logo, $f(x) = 3\,x - 5$, e:

$$y = 3\,x - 5.$$

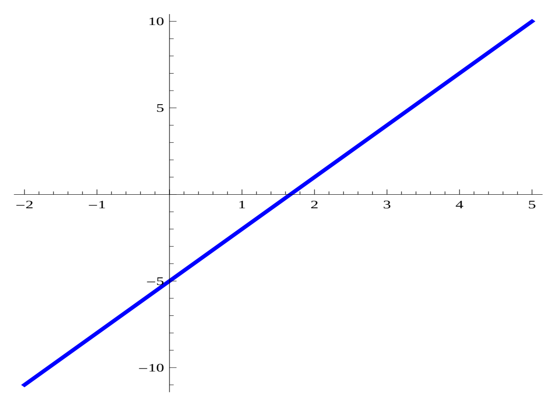


Figura 2.23: A reta $y = 3\,x - 5$.

Note que como o gráfico de uma função afim é uma reta, podemos tomar qualquer par de pontos e obtemos a mesma função; por exemplo:

$$\begin{cases} 38.8 = f(14.6) = 14.6\,a + b \\ 698.8 = f(234.6) = 234.6\,a + b. \end{cases}$$

[3] Sabe-se que $100\,g$ (g=gramas) de soja contem $35\,g$ de proteínas e $100\,g$ de lentilhas contem $26\,g$ de proteínas. Um adulto médio, num clima moderado, necessita de $70\,g$ de proteínas diárias em sua alimentação. Uma pessoa deseja prover estas $70\,g$ de proteínas somente com soja e/ou lentilhas. Se x é a quantidade de soja e y a quantidade de lentilhas diárias (x e y medidas em unidades de $100\,g$), qual é a relação entre x e y?

A quantidade de proteína na soja é $35\,x$ e a quantidade de proteína nas lentilhas é $26\,y$ por dia (ambas medida em gramas). O total de proteínas diário é 70; logo, temos a equação de primeiro grau:

$$35\,x + 26\,y = 70 \Longrightarrow y = -\frac{35\,x}{26} + \frac{70}{26}.$$

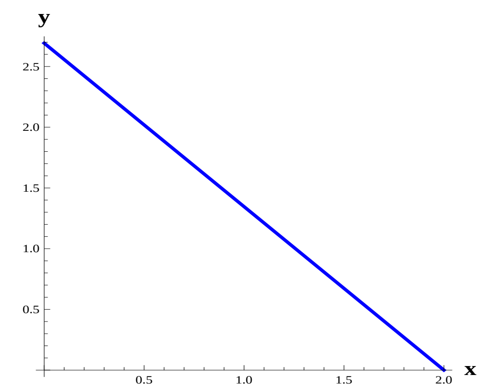


Figura 2.24: Gráfico de $35\,x + 26\,y = 70$.

$x,\, y \geq 0$. Os pontos do gráfico são as possíveis combinações de soja e lentilhas para fornecer 70 gramas de proteínas diárias.

2.4.1 Juros Simples

Vejamos um modelo elementar para quando a taxa de juros somente incide no montante inicial aplicado.

Denotemos por r os juros, p_0 o capital inicial, k a taxa de juros (em decimais) e t o período que o montante foi aplicado, então:

$$r(t) = p_0\, k\, t.$$

Isto é, os juros ganhos só depende do montante inicial, da taxa de juros e do tempo que foi aplicado. Logo, o montante acumulado, após um tempo t é composto pelos juros mais o montante inicial:

$$m(t) = p_0\, k\, t + p_0.$$

Note que os gráficos de $r = r(t)$ e $m = m(t)$ são retas paralelas. Como os juros são sempre positivos, o gráfico de $m = m(t)$ está sempre acima do de $r = r(t)$.

Exemplo 2.8.

[1] Se 100000 reais foram aplicados a uma taxa de 2.5% durante um período de 3 meses, determine o valor dos juros e do montante acomulado.

Temos $p_0 = 100000$, $k = 0.025$ e $t = 3$, logo o valor dos juros é:

$$100000 \times 0.025 \times 3 = 7500 \text{ reais.}$$

E do montante acomulado é: $7500 + 100000 = 107500$ reais.

[2] Se 200000 reais foram aplicados a uma taxa de 7% durante um período de t meses, determine $r = r(t)$ e $m = m(t)$. De quanto é o montante após 24 meses?

Temos que $p_0 = 200000$ e $k = 0.07$, logo:

$$r(t) = 14000\, t \quad \text{e} \quad m(t) = 14000\, t + 200000.$$

Logo, $m(24) = 536000$ reais.

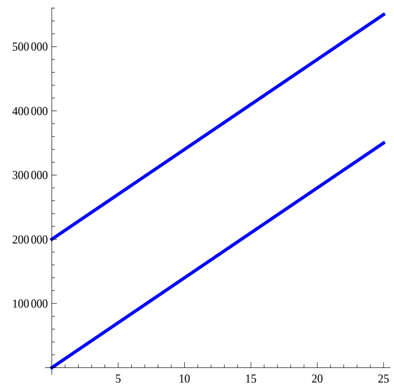


Figura 2.25: Gráfico de $r = r(t)$ e $m = m(t)$.

2.4.2 Depreciação Linear

Quando uma empresa compra algum tipo de equipamento, seu valor é registrado como ativo no balanço geral da empresa. Com o passar dos anos, o valor deste equipamento diminui, até converter-se em obsoleto. Esta redução do valor do ativo é dita depreciação. Um dos métodos para determinar a depreciação é reduzir do valor do equipamento uma quantidade constante cada ano, de tal modo que valor do equipamento seja zero no final de sua vida útil. Este tipo de depreciação é dita linear.

Denotemos por V_0 o valor de compra do equipamento, q a vida útil do equipamento, em anos e por $V = V(t)$, o valor do equipamento após t anos, em reais. Note que $0 \le t \le q$. A depreciação anual (constante) é:

$$m = \frac{V(q) - V_0}{q}$$

logo:

$$V(t) = m\,t + V_0.$$

Note que, $m < 0$ e que o equipamento torna-se obsoleto quando $V(q) = 0$. A depreciação é dada por:

$$D(t) = m\,t.$$

Exemplo 2.9.

Uma empresa compra um equipamento por 3000000 de reais e espera que sua vida útil seja de 15 anos:

(a) Determine a depreciação anual.

(b) Determine $V = V(t)$ e calcule o valor do equipamento após 7 anos.

(c) Qual é a depreciação após 10 anos?

(a) Note que $q = 15$ e $V_0 = 3000000$. A depreciação anual é:

$$m = \frac{0 - 3000000}{15} = -200000.$$

(b) Logo:

$$V(t) = -200000\,t + 3000000.$$

e $V(7) = 1600000$ reais.

(c) A depreciação é dada por: $D(t) = -200000\,t$, logo $D(10) = -2000000$ reais.

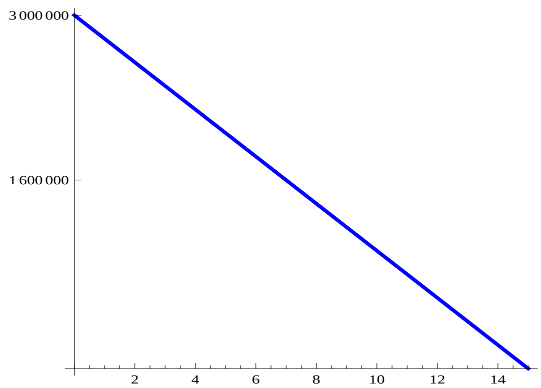


Figura 2.26: Gráfico de $V(t)$.

2.4.3 Restrição Orçamentária

A restrição orçamentária para compra de dois produtos x e y, de acordo com um orçamento fixo é dada por:

$$a\,x + b\,y = or,$$

onde, $a\,x$ é o valor gasto com x, $b\,y$ é o valor gasto com y e or é o orçamento. Logo, a restrição orçamentária para compra de dois produtos é uma função afim. Note que $x,\ y \geq 0$.

A região determinada por:

$$a\,x + b\,y < or,$$

corresponde às quantidades quando o gasto não ultrapassa o orçamento.

A região determinada por:

$$a\,x + b\,y = or,$$

corresponde às quantidades quando o gasto iguala o orçamento.

A região determinada por:

$$a\,x + b\,y > or,$$

corresponde às quantidades quando o gasto ultrapassa o orçamento.

Note que para $b \neq 0$, temos:

$$y = \frac{1}{b}\left[-a\,x + or\right];$$

logo, se $x = 0$, temos que $y = \dfrac{or}{b}$ é a quantidade máxima de y que se pode comprar com o orçamento.

Analogamente, se $a \neq 0$, $x = \dfrac{or}{a}$ é a quantidade máxima de x que se pode comprar com o orçamento.

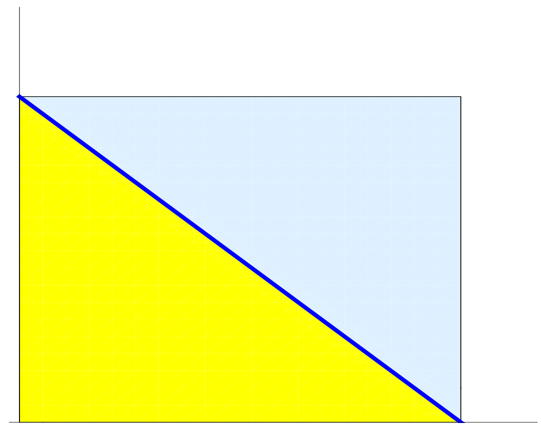


Figura 2.27: Regiões determinadas pela restrição orçamentária.

Exemplo 2.10.

Uma família dispõe de um orçamento mensal de 1200 reais e tem um gasto fixo, como aluguel, alimentação, luz, etc, de 650 reais e de 200 reais em artigos supérfluos.

(a) Determine a restrição orçamentária da família.

(b) Determine a região dos gastos, onde os mesmos não ultrapassam o orçamento.

(a) Sejam x os artigos supérfluos e y artigos fixos; então:

$$200\,x + 650\,y = 1200 \Longrightarrow y = -0.3077\,x + 1.846.$$

(b) Devemos resolver $200\,x + 650\,y \leq 1200$; então:

$$0.3077\,x + y < 1.846.$$

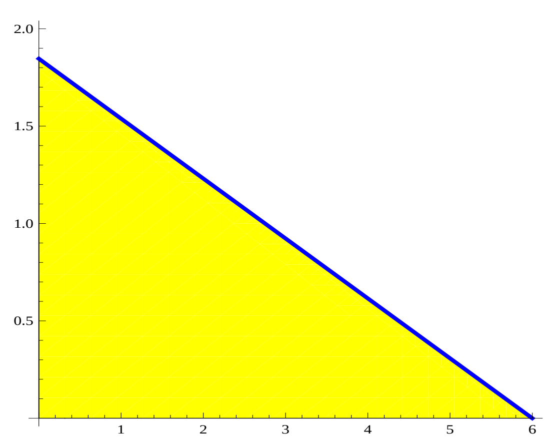


Figura 2.28: Região determinada pela restrição orçamentária do exemplo.

2.5 Função Polinomial de Segundo Grau ou Quadrática

Esta função é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R};\ a \neq 0$. Claramente $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para todo $h \in \mathbb{R}$, $f(x+h) - f(x)$ é uma função afim em x. A $Im(f)$ e o gráfico de f dependem essencialmente do discriminante Δ da equação do 2^o grau $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ e do coeficiente a do termo principal.

Não é difícil verificar que o gráfico da função $f(x) = a\,x^2$ é uma parábola de foco $(0, 1/4\,a)$ e diretriz $y = -1/4\,a$.

Fazendo uma translação adequada dos eixos coordenados verifica-se que o gráfico da função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ é uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo dos y, tem foco:

$$\Big(-\frac{b}{2\,a}, \frac{4\,a\,c + b^2 - 1}{4\,a}\Big)$$

e diretriz $y = \dfrac{4\,a\,c - b^2 - 1}{4\,a}$.

2.5.1 Vértice da Parábola

O vértice da parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ é o ponto onde a parábola intersecta seu eixo ; logo, é dado por:

$$v = (-b/2\,a, -\Delta/4\,a).$$

Se $a > 0$, então v é o ponto da parábola de menor altura, pois o ponto mais próximo da diretriz é o vértice. Logo, a função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ atinge seu menor valor.

Se $a < 0$, então v é o ponto da parábola de maior altura. Logo, a função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ atinge seu maior valor.

Não é difícil ver que se v_1 é a abscissa do vértice da parábola $y = f(x)$, então:

$$f(v_1 + x) = f(v_1 - x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Usando completamento dos quadrados:

$$f(x) = a\,(x - v_1)^2 + q,$$

onde $q = f(v_1)$.

Gráficos da Função Quadrática

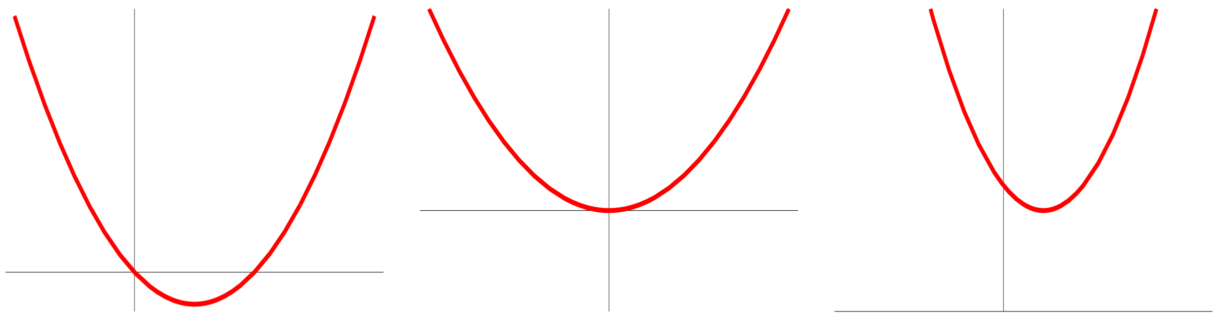


Figura 2.29: Gráficos para $a > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, respectivamente .

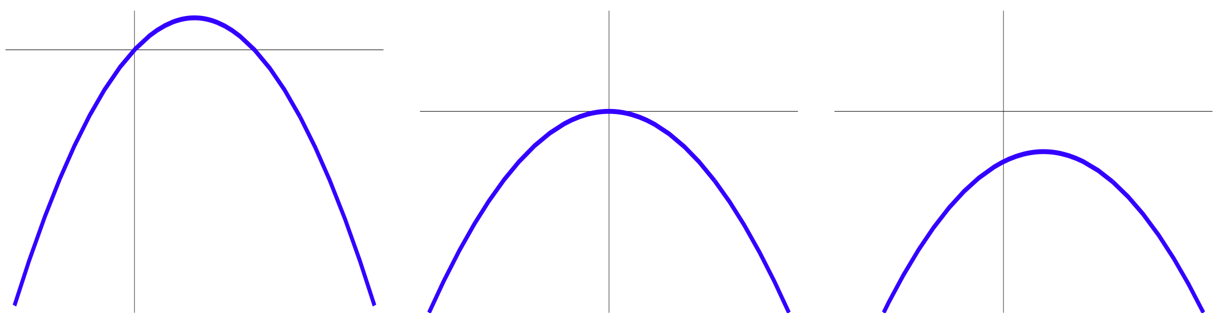


Figura 2.30: Gráficos para $a < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, respectivamente .

Exemplo 2.11.

[1] A área de uma esfera é função quadrática de seu raio. De fato, $S(r) = 4\,\pi\,r^2$.

[2] Pelas observações 2.1, os gráficos de $y = f(x) = x^2$ (azul), $y = f\big(-\dfrac{4\,x}{3}\big) = \dfrac{16\,x^2}{9}$ (vermelha) e $y = f(2\,x) = 4\,x^2$ (verde), são:

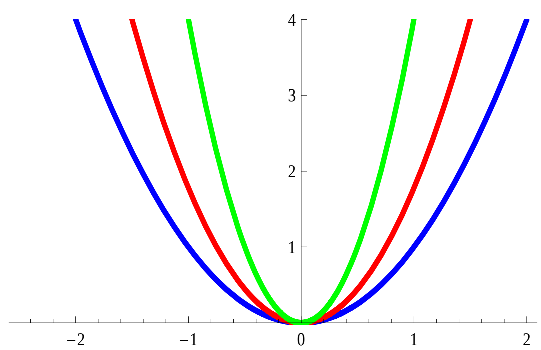


Figura 2.31: As parábolas do exemplo [2].

[3] A emissão de partículas de poluição produzida pelos ônibus, na atmosfera de uma cidade é dada por:

$$h(t) = -10\,t^2 + 300\,t + 2.61$$

t em anos e h em milhares de toneladas, onde se utilizou como ano base 2000.

(a) De quanto foi a poluição no ano de 2007?

(b) Em que ano a poluição atingiu o máximo?

(a) Calculamos $h(8) = 1762.61$ milhares de toneladas.

(b) Como o fator da potência quadrática é negativo, temos que o valor máximo será atingido na ordenada do vértice:

$$-\frac{b}{2\,a} = 15.$$

Logo, o máximo de poluição será atingido no ano de 2015.

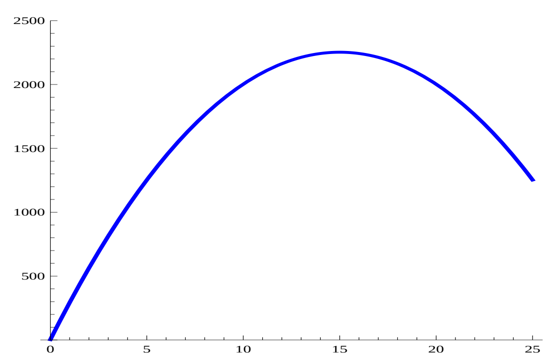


Figura 2.32: A parábola do exemplo [3].

[4] Se o lucro mensal de uma loja pela venda de x unidades de um certo produto é dado por $l(x) = 80\,x - 0.13\,x^2$, em reais, determine o número de unidades que deve vender mensalmente para obter lucro máximo. Qual é o lucro máximo?

Como o fator da potência quadrática é negativo, temos que valor máximo será atingido na abscissa do vértice:

$$-\frac{b}{2\,a} = 307.69.$$

Logo, o lucro máximo será obtido com a venda de 308 unidades. Por outro lado, o lucro máximo será atingido na ordenada do vértice:

$$-\frac{\Delta}{4\,a} = 12307.7.$$

O lucro máximo obtido é de 12307.70 reais.

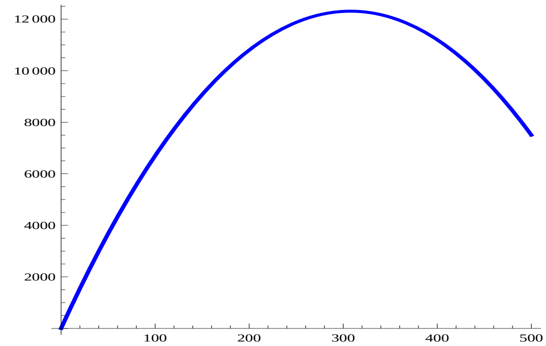


Figura 2.33: A parábola do exemplo [4].

2.6 Função Polinomial de Grau n

A função polinomial de grau n é definida por:

$$\boxed{y = f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots\ldots + a_0}$$

onde $a_n,\, a_{n-1},\, \ldots\ldots,\, a_0 \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$; $Dom(f) = \mathbb{R}$, mas a $Im(f)$ e o gráfico de f dependem essencialmente do grau do polinômio e de a_n. Esta função é, claramente, a generalização natural das funções anteriores.

Como exemplo, vejamos as funções: $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = 24\,x^4 + 1$; $Im(f) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = [1, +\infty)$. Seus respectivos gráficos são:

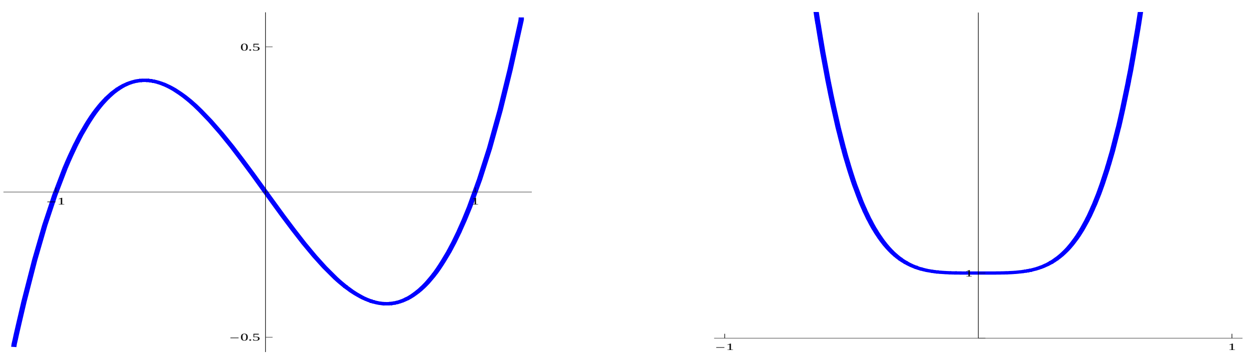


Figura 2.34: Gráficos de f e g, respectivamente.

Exemplo 2.12.

[1] O faturamento de uma empresa, num certo período, foi expresso em função do número x de vendedores por $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 18\,x$ milhares de reais por dia. Quantos eram os vendedores no dia em que o faturamento atingiu 70 mil reais?

Estudemos as raízes inteiras de $f(x) = 70$, isto é, $x^3 - 3\,x^2 - 18\,x - 70 = 0$. Não é difícil ver que 7 é uma raiz do polinômio; de fato:

$$x^3 - 3\,x^2 - 18\,x - 70 = (x - 7)\,(x^2 + 4\,x + 10);$$

logo, eram 7 vendedores.

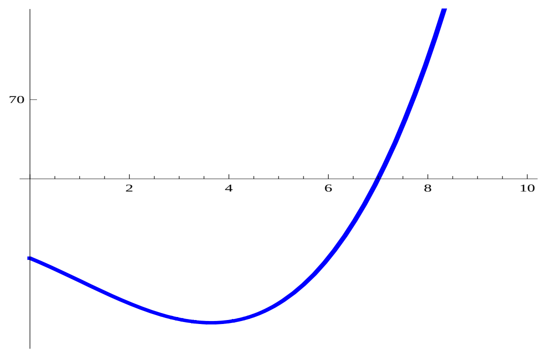


Figura 2.35: Gráfico de $f(x) = 70$.

[2] Suponha que foram introduzidos numa ilha, 144 indivíduos de uma certa espécie de macacos. Inicialmente, a quantidade de indíviduos tende a crescer; após um certo tempo, o alimento e a população de macacos decresce. Se o número de macacos no tempo t, em anos, é dado por:

$$P(t) = -t^4 + 32\,t^2 + 144,$$

quando a população se extingue?

Estudemos as raizes inteiras de $P(t) = 0$, isto é, $-t^4 + 32\,t^2 + 144 = 0$. Não é difícil ver que -6 e 6 são raizes do polinômio; de fato:

$$-t^4 + 32\,t^2 + 144 = -(t-6)\,(t+6)\,(t^2+4);$$

como $t \geq 0$, temos que em 6 anos a população será extinta.

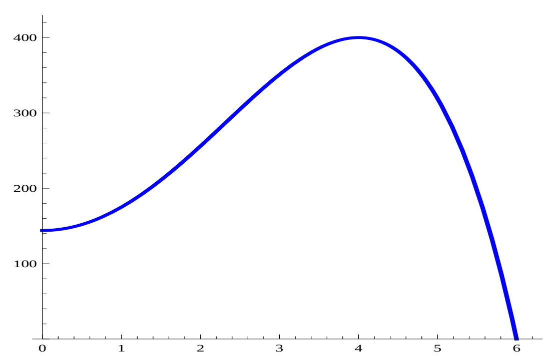


Figura 2.36: Gráfico de $P = P(t)$.

[3] A dívida interna de certo país, em milhões de dólares é modelada pela seguinte função:

$$D(t) = -2.5\,t^3 + 260\,t^2 - 700\,t + 4500,$$

onde $t = 0$ representa o ano 2000. Estime a dívida interna do país no ano 2020. Quando a dívida é zerada?

Primeiramente devemos calcular $D(20) = 74500$ milhões de dólares. Por outro lado $D = D(t)$ pode ser fatorada:

$$D(t) = -2.5\,(-101.414 + t)\,(17.749 - 2.58594\,t + t^2);$$

logo, a dívida é zerada quando $t = 101.41$, isto é, após 101 anos.

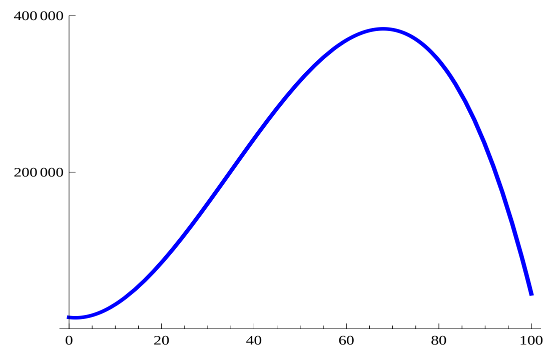


Figura 2.37: Gráfico de $D = D(t)$.

2.7 Funções Pares e Ímpares

Definição 2.4.

1. *Uma função f é dita* **par** *se, para todo $x \in Dom(f)$ então $-x \in Dom(f)$ e*

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

2. *Uma função f é dita* **ímpar** *se, para todo $x \in Dom(f)$ então $-x \in Dom(f)$ e*

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Pelas definições de função par e de função ímpar é fácil ver que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 2.13.

[1] Seja $y = f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; a primeira parte das definições é verificada e:

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x);$$

logo, f é função par.

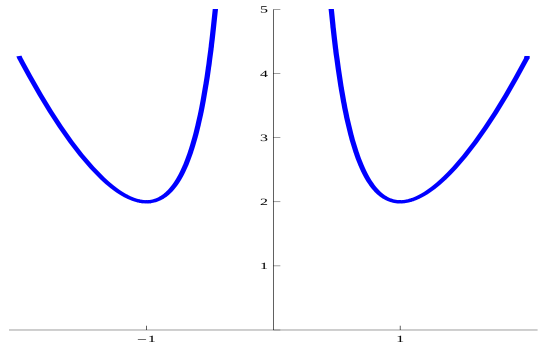


Figura 2.38: Gráfico do exemplo [1].

[2] Seja $y = f(x) = x^5 - x^3$.
como $Dom(f) = \mathbb{R}$, a primeira parte das definições é verificada e:

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x^3) = -(x^5) + x^3 = -f(x);$$

logo, f é função ímpar.

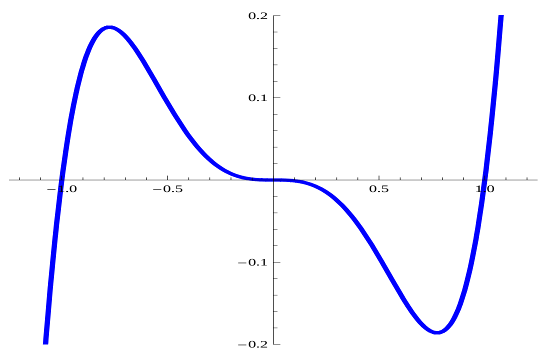


Figura 2.39: Gráfico do exemplo [2].

A função $\mathbf{y = x^n}$

Seja $y = f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$.

A função é par se n é par e é ímpar se n é ímpar.

Para $x \in (0, 1)$, tem-se:

$$x^2 > x^3 > x^4 > x^5 > x^6 > \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

isto é, quanto maior o valor de n, menor o valor da função. Consequentemente, o gráfico de $y = x^5$, está abaixo do gráfico de $y = x^4$, que também está abaixo do gráfico de $y = x^3$, e assim sucessivamente.

Para valores de x próximos de zero, as potências menores dominam e quanto maior o expoente n, os gráficos ficam cada vez mais "planos" (quase paralelos ao eixo dos x).
Para $x \in (1, +\infty)$, tem-se:

$$x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < x^6 < \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou seja para valores grandes de x, as potências de maior grau dominam as de menor grau.

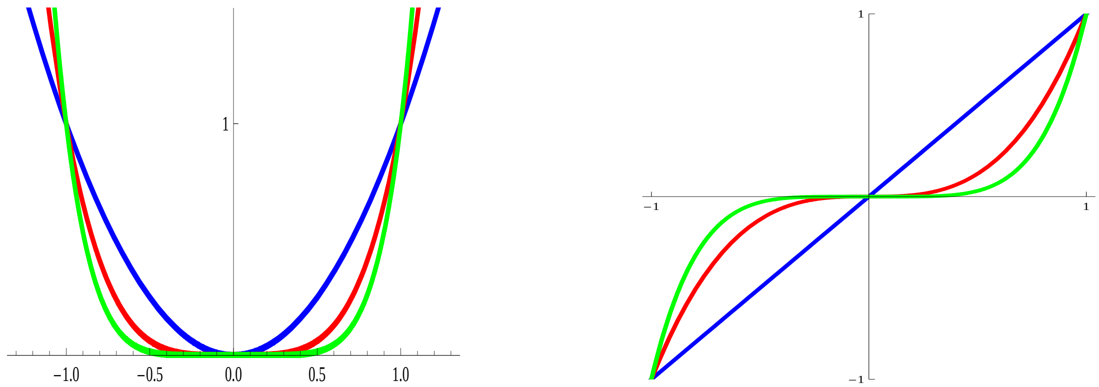


Figura 2.40: Gráficos de $y = f(x) = x^n$ para $n = 2,\ 4,\ 6$ e $n = 1,\ 3,\ 5$, respectivamente.

Algumas vezes, para esboçar o gráfico de uma função é conveniente verificar se a função é par ou ímpar, pois a simetria presente nos gráficos destas funções facilitará o desenho. Note que existem muitas funções que não são pares e nem ímpares.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2 + x$; $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $f(-x) = x^2 - x$; logo, $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$; então, f não é função par nem ímpar.

Achar os x tais que $f(x) > b$ é equivalente a determinar os elementos do $Dom(f)$ tais que os pontos do gráfico de f, estão acima da reta $y = b$. Achar os x tais que $f(x) < b$ é equivalente a determinar os elementos do $Dom(f)$ tais que os pontos do gráfico de f, estão abaixo da reta $y = b$.

Exemplo 2.14.

[1] Se $f(x) = x^2$, então, achar x tal que $f(x) > 1$ é equivalente a determinar os elementos do $Dom(f)$ tal que os pontos do gráfico de f, estão acima da reta $y = 1$.

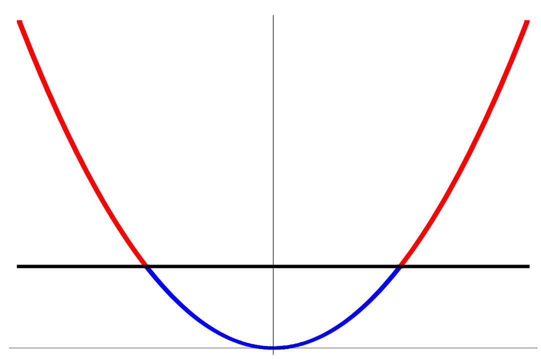


Figura 2.41: Gráfico do exemplo [1].

[2] $f(x) = x^2\,(x - 1)$; então, achar x tal que $f(x) < 0$ é equivalente a determinar os elementos do $Dom(f)$ tal que os pontos do gráfico de f, estão abaixo da reta $y = 0$.

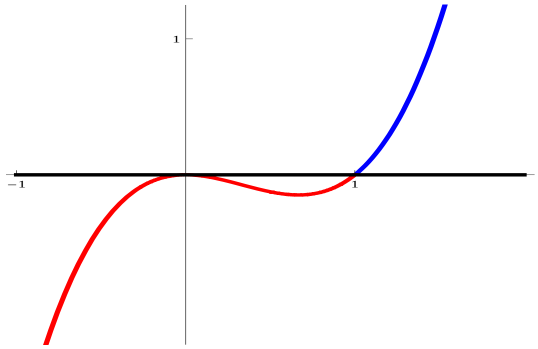


Figura 2.42: Gráfico do exemplo [2].

Observação

Podemos afirmar que o gráfico de uma função é, em geral, uma curva no plano coordenado; a recíproca nem sempre é verdadeira, isto é, nem toda curva no plano coordenado (ou conjunto do plano) é o gráfico de alguma função. Geometricamente uma curva no plano coordenado é o gráfico de uma função se toda reta paralela ao eixo dos y intersecta a curva no máximo num ponto (por que?). Por exemplo, a seguinte curva não representa uma função:

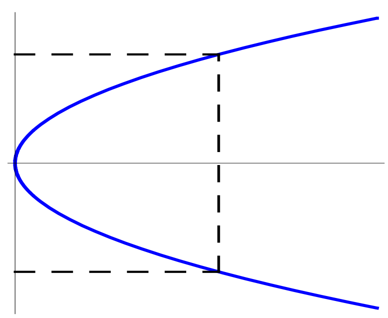


Figura 2.43:

O conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ não é o gráfico de uma função. De fato, temos $y = \pm\sqrt{1-x^2}$; logo, para todo $x \in (-1,1)$ existe mais de um y tal que $(x,y) \in A$.

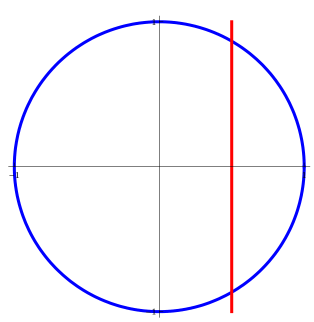


Figura 2.44: O conjunto A.

2.8 Interseção de Gráficos

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tais que seus gráficos se intersectam no ponto P; então, as coordenadas de P são: $P = (x_1, f(x_1)) = (x_1, g(x_1))$, logo $f(x_1) = g(x_1)$; equivalentemente, x_1 é solução do sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x). \end{cases}$$

Analogamente, para n funções:

$$\begin{cases} y = & f_1(x) \\ y = & f_2(x) \\ y = & f_3(x) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ y = & f_n(x). \end{cases}$$

2.8.1 Interseção de Retas

Se $f(x) = m_1\,x + b_1$ e $g(x) = m_2\,x + b_2$ são funções afins, então, o sistema:

$$\begin{cases} y = m_1\,x + b_1 \\ y = m_2\,x + b_2, \end{cases}$$

tem uma única solução se, e somente se as retas são não paralelalas, isto é $m_1 \neq m_2$; logo, seus gráficos se intersectam num único ponto:

$$P = \Big(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \frac{b_2\,m_1 - b_1\,m_2}{m_1 - m_2}\Big).$$

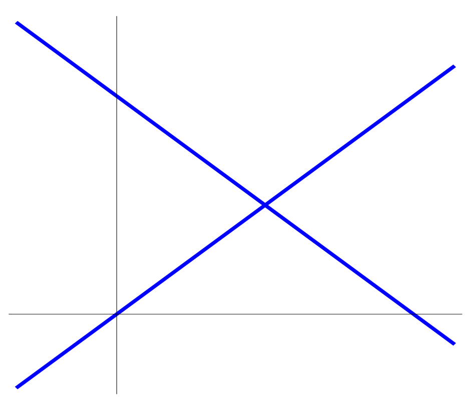


Figura 2.45: Interseção de funções afins não paralelalas.

Exemplo 2.15.

[1] Achar o ponto de interseção dos gráficos de $f(x) = 4\,x + 6$ e $g(x) = 1 - 2\,x$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y & = 4\,x + 6 \\ y & = 1 - 2\,x, \end{cases}$$

donde $x = -\dfrac{5}{6}$. O ponto é $\big(-\dfrac{5}{6}, \dfrac{8}{3}\big)$.

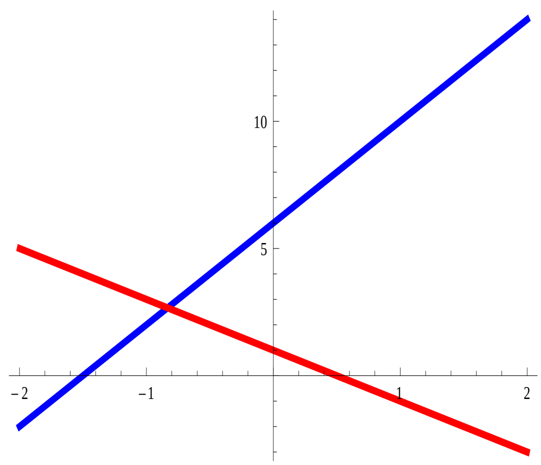


Figura 2.46: Exemplo [1].

[2] Achar o ponto de interseção dos gráficos de $f(x) = 2\,x$, $f_2(x) = 2 - x$ e $f_3(x) = x - 5$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} (1) \qquad y & = 3\,x \\ (2) \qquad y & = 2 - x \\ (3) \qquad y & = x - 5. \end{cases}$$

Fazendo (1)=(2), temos $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{3}{2}$; fazendo (2)=(3), temos

$$x = \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{3}{2}$$

e finalmente fazendo (1)=(3), temos $x = -\dfrac{5}{2}$ e $y = -\dfrac{15}{2}$.

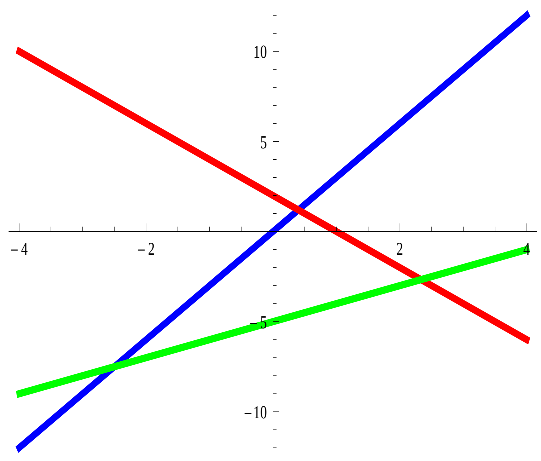


Figura 2.47: Exemplo [2].

[3] Achar os pontos de interseção dos gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y &= x \\ y &= x^2, \end{cases}$$

donde $x^2 - x = x\,(x-1)$, logo $x\,(x-1) = 0$ e $x = 0$ ou $x = 1$. Os pontos são $(0,0)$ e $(1,1)$.

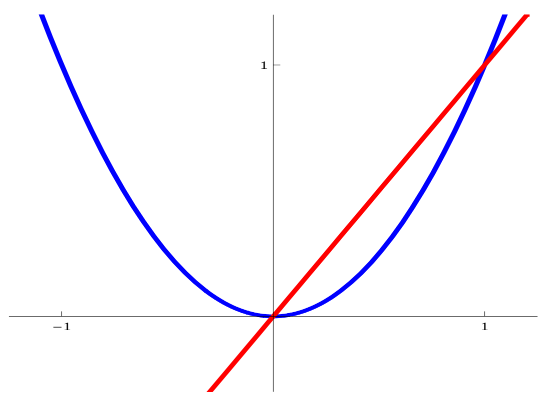


Figura 2.48: Exemplo [3].

[4] Achar os pontos de interseção dos gráficos de $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^4 + x^3$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y &= x^3 - x \\ y &= x^4 + x^3, \end{cases}$$

donde $x^4 + x^3 = x^3 - x$, logo $x^4 + x = x\,(x^3 + 1) = 0$ e $x = 0$ ou $x = -1$. Os pontos são $(0,0)$ e $(-1,0)$.

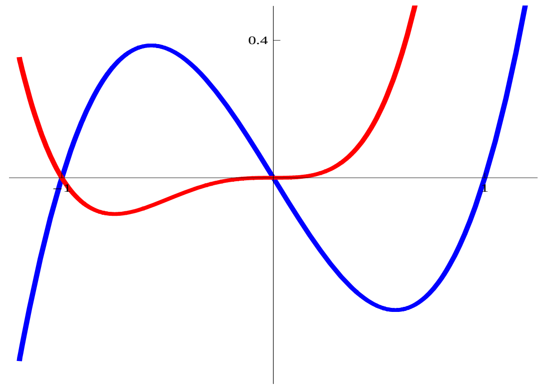


Figura 2.49: Exemplo [4].

[5] Os níveis de dois reservatórios de água são expressos em função do tempo t pelas seguintes funções: $h_1(t) = 100\,t^3 + 5\,t - 1.8$ e $h_2(t) = 50\,t^3 + 2\,t - 0.8$. Determine os instantes em que cada um dos níveis se reduz a zero, sabendo que alguma vez isto acontece simultaneamente.

Como existe t_0 tal que $h_1(t_0) = 0$ e $h_2(t_0) = 0$, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} h_1(t_0) & = 0 \\ h_2(t_0) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) \quad 100\,t_0^3 + 5\,t_0 - 1.8 & = 0 \\ (2) \quad 50\,t_0^3 + 2\,t_0 - 0.8 & = 0 \end{cases}$$

Multiplicando (2) por 2 e subtraindo de (1), temos que $t_0 = 0.2$ é a raiz comum.

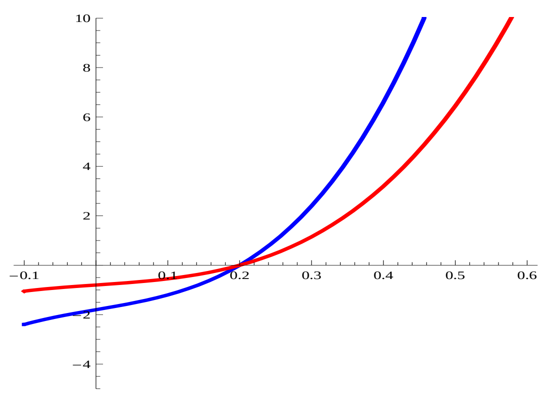


Figura 2.50: Exemplo [5]

Dividindo os polinômios (1) e (2), verificamos que não possuem outras raízes reais. Logo, o único instante em que cada um dos níveis desce a zero é em $0.2\,u.t.$ (u.t.=unidades de tempo).

2.9 Álgebra de Funções

A seguir, veremos como construir novas funções a partir de outras já conhecidas.

Definição 2.5. *Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções.*

1. **Adição e subtração de funções:**

$$\boxed{(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)}$$

2. **Multiplicação de funções:**

$$\boxed{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

3. **Divisão de funções:**

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ se\ g(x) \neq 0}$$

Em particular, se $k \in \mathbb{R}$, temos que $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$. Antes de apresentar exemplos destas definições, determinemos os respectivos domínios.

$$Dom(f \pm g) = Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g),$$

$$Dom\Big(\frac{f}{g}\Big) = (Dom(f) \cap Dom(g)) - \{x \in Dom(g)/g(x) = 0\}.$$

Geometricamente o gráfico da soma, diferença, produto ou quociente de f e g tem, em cada ponto uma ordenada que é respectivamente, a soma, diferença, produto ou quociente das ordenadas de f e g nos pontos correspondentes. A aplicação destas definições é, em geral, muito simples, como observaremos nos exemplos.

Exemplo 2.16.

[1] A adição e a subtração de funções afins são funções afins. De fato, se $f(x) = m_1\,x + b_1$ e $g(x) = m_2\,x + b_2$; então:

$$(f \pm g)(x) = (m_1 \pm m_2)\,x + (b_1 \pm b_2).$$

Por exemplo, se $f(x) = 2\,x - 1$ e $g(x) = -3\,x + 2$; então, $(f + g)(x) = 1 - x$ e $(f - g)(x) = 5\,x - 3$.

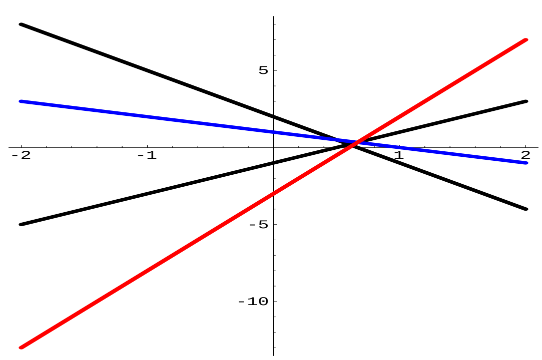


Figura 2.51: Gráficos de f, g, $f + g$ e $f - g$.

[2] A adição e a subtração de funções polinomiais quadráticas são, em geral, funções polinomiais quadráticas. De fato, se $f(x) = a_1\,x^2 + b_1\,x + c_1$ e $g(x) = a_2\,x^2 + b_2\,x + c_2$ tais que $a_1 \neq a_2$; então:

$$(f \pm g)(x) = (a_1 \pm a_2)\,x^2 + (b_1 \pm b_2)\,x + c_1 \pm c_2.$$

Por exemplo, se $f(x) = x^2 - 2\,x + 1$ e $g(x) = 2\,x^2 + x - 4$; então, $(f + g)(x) = 3\,x^2 - x - 3$ e $(f - g)(x) = -x^2 - 3\,x + 5$.

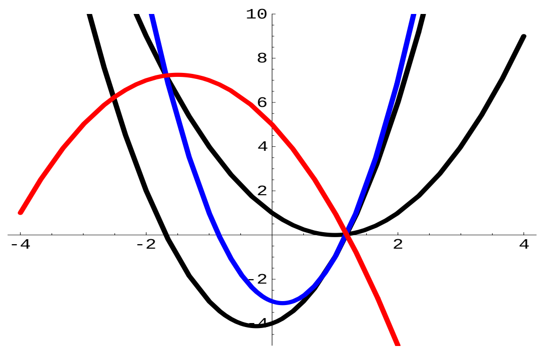


Figura 2.52: Gráficos de f, g, $f+g$ e $f-g$.

[3] Sejam $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = x^3 + 1$.

Logo, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \pm (x^3 + 1)$, e $(f \cdot g)(x) = (\sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x^3 + 1)$; os domínios são:

$$Dom(f \pm g) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = Dom(f \cdot g).$$

$\displaystyle(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3 + 1}$; o domínio é $Dom(\frac{f}{g}) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

2.9.1 Funções Racionais

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios de coeficientes reais. Podemos definir a função **racional** por:

$$\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

Da definição, temos que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) = 0\}$; em outras palavras, o domínio de uma função racional é o conjunto dos números reais menos as raízes do polinômio que aparece no denominador. Note que as funções polinomiais são um caso particular das funções racionais; basta considerar $Q(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.17.

[1] Seja $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 5}$.

Fatorando $Q(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 5 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 5)$, tem-se: $Q(x) = 0$ se $x = \pm 1$; logo, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,\, 1\}$.

[2] Seja $f(x) = \dfrac{x+8}{x^5 - 4x^3 - x^2 + 4}$.

Fatorando $Q(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = (x^3 - 1)(x^2 - 4)$, tem-se: $Q(x) = 0$ se $x = 1$, $x = 2$ ou $x = -2$; logo, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2,\, 1,\, 2\}$.

[3] Seja $f(x) = \dfrac{x^4 + 6}{x^4 + 4x^2 + 3}$.

Fatorando $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 3 = (x^2 + 1)(x^2 + 3)$, tem-se: $Q(x)$ não possui raízes reais; logo $Dom(f) = \mathbb{R}$.

[4] Uma empresa de embalagens deve produzir uma caixa de base quadrada, sem tampa de modo que tenha volume igual a 120 cm^3. Determine a área da caixa em função do comprimento da base.

Denotemos por x o comprimento da base da caixa e h a altura da caixa, o volume é:

$$120 = x^2\, h \Longrightarrow h = \frac{120}{x^2}.$$

Por outro lado, a área total da caixa é $A = x^2 + 4\, x\, h$; logo:

$$A(x) = x^2 + \frac{480}{x} = \frac{x^3 + 480}{x}.$$

Note que $Dom(A) = (0, +\infty)$.

Se uma das variáveis de uma função aumenta e a outra diminui elas são ditas inversamente proporcionais.

O seguinte tipo de função racional, modela esta situação:

$$y = f(x) = \frac{k}{Q(x)},$$

onde k é constante de proporcionalidade e $Q(x)$ é um polinômio ou uma expressão que envolve polinômios. Note que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{x_0 \,/\, Q(x_0) = 0\}$.

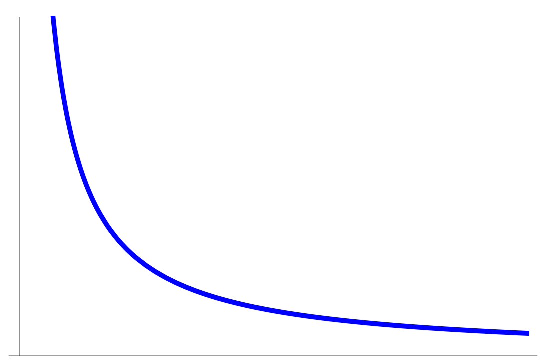


Figura 2.53: Gráfico de $y = \frac{k}{Q(x)}$.

2.9.2 Taxa de Desvalorização de uma Moeda

A taxa de desvalorização de uma moeda é dada por:

$$Des(I) = \frac{I}{I+1},$$

onde I é a taxa de inflação no período.

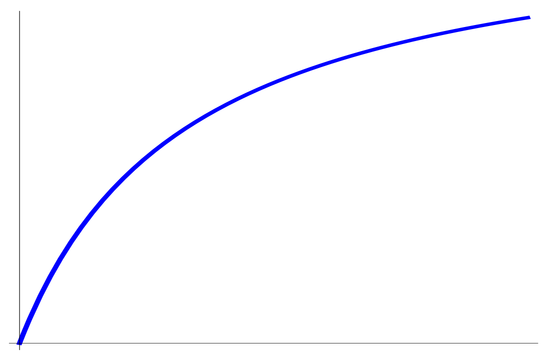


Figura 2.54: Gráfico de $y = Des(I)$.

Exemplo 2.18.

[1] O valor V de um equipamento x anos após ter sido comprado é inversamente proporcional ao quadrado de $x+2$. Se o equipamento foi comprado por 12000 reais.

(a) Determine $V = V(x)$

(b) Qual é o valor do equipamento após 5 anos?

(a) Considere $V(x) = \dfrac{k}{(x+2)^2}$, como $12000 = V(0) = \dfrac{k}{4}$; então $k = 48000$ e:

$$V(x) = \frac{48000}{(x+2)^2}.$$

(b) Calculamos $V(5) = 979.59$, aproximadamente 980 reais.

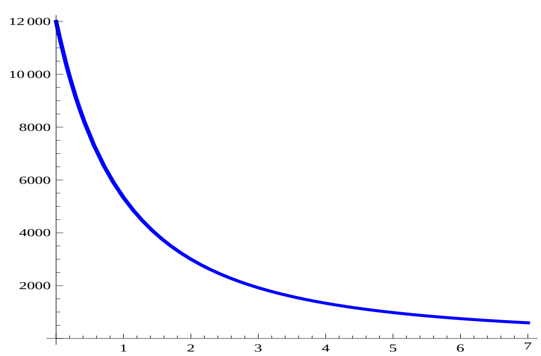


Figura 2.55: Gráfico do exemplo.

[2] Se em determinado período, a taxa de inflação de um país é de 8%, qual será a redução do poder de compra das pessoas?

$$Des(0.08) = \frac{0.08}{1 + 0.08} = 0.074;$$

logo, a perda de compra foi da ordem do 7.4 %.

2.10 Composta de Funções

Definição 2.6. *Sejam f e g funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$.* **A composta das funções** g **e** f *é denotada por $g \circ f$ e definida por:*

$$\boxed{\big(g \circ f\big)(x) = g(f(x))}$$

Observe que a definição faz sentido, pois $f(x) \in Dom(g)$. Por outro lado:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) / f(x) \in Dom(g)\}.$$

Esta definição produz, a partir de funções conhecidas, novas funções, como veremos mais adiante. A definição de composta de funções é de fácil manejo, como veremos nos exemplos.

Exemplo 2.19.

[1] A composta de funções afins é uma função afim.

De fato, sejam $f(x) = m_1\,x + b_1$ e $g(x) = m_2\,x + b_2$; então,

$$(g \circ f)(x) = (m_1\,m_2)\,x + m_2\,b_1 + b_2 \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = m_1\,m_2\,x + m_1\,b_2 + b_1.$$

Por exemplo, se $f(x) = -2\,x - 1$ e $g(x) = x + 5$, então, $(g \circ f)(x) = -2\,x + 4$ e $(f \circ g)(x) = -2\,x - 11$.

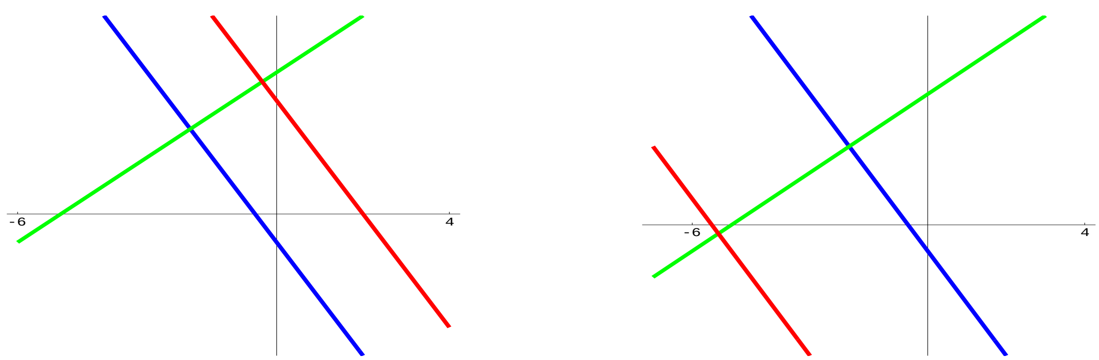


Figura 2.56: Gráficos de f, g, $g \circ f$ e $f \circ g$.

[2] Sejam $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = x + 1$; calcule $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g \circ g$ e $f \circ f \circ f \circ f$ respectivamente.

$Im(f) = [0, +\infty)$ e $Dom(g) = \mathbb{R}$. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$. Logo,

$$Dom(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

$Im(g) = \mathbb{R}$ e $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; logo, não podemos calcular $f \circ g$ a menos que consideremos um domínio menor para g de modo que $Im(g) \subset Dom(f)$.

De fato: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{(x+1)^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 2\,x}$. Temos:

$$Dom(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty).$$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$. Logo,

$$Dom(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty).$$

$(g \circ g \circ g)(x) = g(g(g(x))) = g(g(x+1)) = g(x+2) = x+3$.

$$Dom(g \circ g \circ g) = \mathbb{R}.$$

$(f \circ f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(f(x)))) = \sqrt{x^2 - 4}$.

$$Dom(f \circ f \circ f \circ f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Dos exemplos anteriores podemos concluir que, em geral:

$$\boxed{(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)}$$

[3] Suponha que uma mancha de poluente que contamina uma lagoa tem a forma de um disco de raio r (em cm) e sua área A (em cm^2) é função do raio. Se o raio cresce em função do tempo t (em min) pela lei $r = r(t) = (10\,t + 0.5)\,cm$, determine a área da mancha em função do tempo.

A área é $A(r) = \pi\,r^2$; devemos calcular $A(t)$, por outro lado $A(t) = (A \circ r)(t) = A(r(t))$; logo:

$$A(t) = A(r(t)) = A(10\,t + 0.5) = \pi\,(10\,t + 0.5)^2\,cm^2.$$

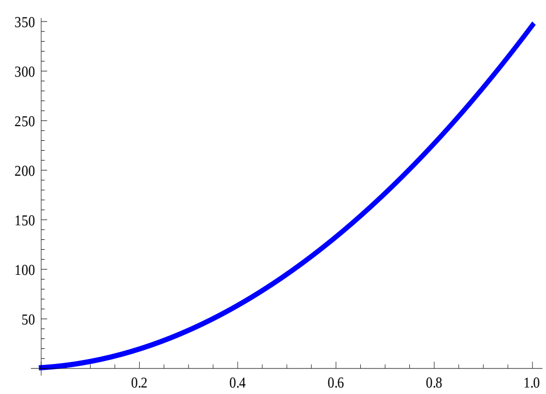


Figura 2.57: Gráfico de $A = A(t)$.

[4] A produção y para fabricar um certo componente eletrônico das TV de plasma é modelada em função da quantidade de matéria prima x utilizada por: $y = f(x) = -x^2 + 10.4\,x + 20$. Se a venda dos componentes depende da produção e é dada por $v(y) = 1.2\,y + 0.1$, determine a venda a partir da quantidade da matéria prima utilizada.

Devemos calcular $v \circ f$:

$$(v \circ f)(x) = v(f(x)) = v(-x^2 + 10.4\,x + 20) = -1.2\,x^2 + 12.48\,x + 24.1.$$

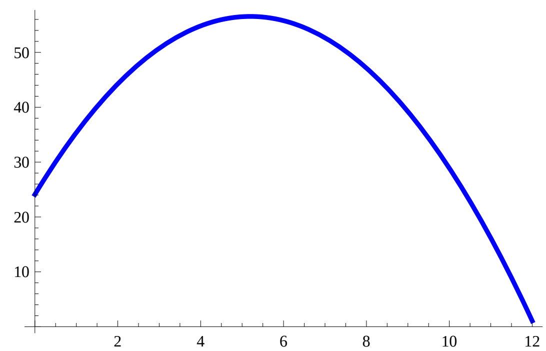


Figura 2.58: Gráfico da venda $\times$ a quantidade de matéria prima

2.11 Inversa de uma Função

Observe as seguintes tabelas:

a	$B = B(a)$
0	25
1	28
2	31
3	35
4	38
5	41
6	44

B	$a = a(B)$
25	0
28	1
31	2
35	3
38	4
41	5
44	6

A primeira tabela foi obtida num estudo sobre a população de baleias corcundas num certo setor costeiro utilizado como ponto de reprodução pela espécie. O tamanho da população de baleias é medido anualmente, durante 6 anos. O número B de baleias é função do ano a em que é realizada a medição: $B = B(a)$. Suponha que, em certo instante, os biológos mudam o ponto de vista e ficam interessados no tempo estimado para que a população de baleias atinja um certo número de indivíduos B, ou seja, desejam obter a em função de B: $a = a(B)$. Tal função é chamada de inversa de $B = B(a)$. Veja a segunda tabela.

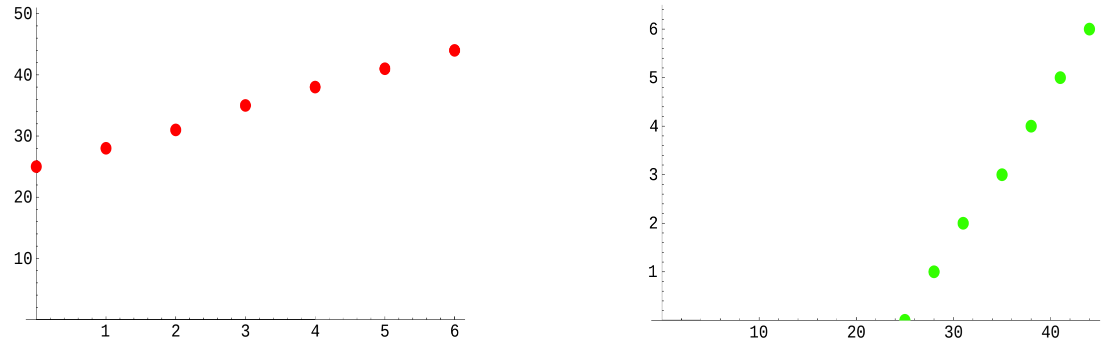


Figura 2.59: Gráfico da $B = B(a)$ e $a = a(B)$, respectivamente.

Definição 2.7. *A função g é dita função inversa de f se:*

1. $Im(g) = Dom(f)$ *e* $Im(f) = Dom(g)$.

2. *Para todo $x \in Dom(g)$, $(f \circ g)(x) = x$ e para todo $x \in Dom(f)$, $(g \circ f)(x) = x$. Em tal caso f é dita* **invertível**.

Exemplo 2.20.

[1] $f(x) = x - 4$, $-1 \le x \le 1$ e $g(x) = x + 4$, $-5 \le x \le -3$ são inversas.

De fato, $Dom(f) = Im(g) = [-1, 1]$, $Dom(g) = Im(f) = [-5, -3]$ e:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 4) = x, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 4) = x.$$

[2] $f(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$ e $g(x) = x^2$, $x \ge 0$ são inversas.

De fato, $Dom(f) = Im(g) = [0, +\infty)$, $Dom(g) = Im(f) = [0, +\infty)$ e,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x, \; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x.$$

Seja f uma função invertível. Denotemos por f^{-1} sua inversa.

Dizer que f^{-1} é a função inversa de f é equivalente dizer que $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ são a função identidade. Em outras palavras, f é **bijetiva**, ou seja, a função f é invertível se, e somente se para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$, temos; se $x_1 \ne x_2$, então $f(x_1) \ne f(x_2)$ e para todo $y \in Im(f)$, existe $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$.

Se f é invertível então f^{-1} é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$. Note que $f^{-1}(x) \ne (f(x))^{-1}$.

O gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta $y = x$.

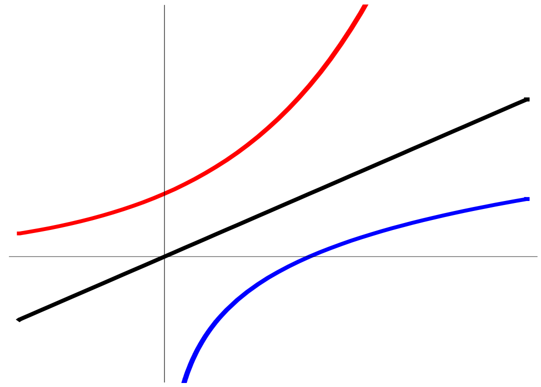


Figura 2.60: Gráficos de f e f^{-1}.

2.11.1 Método para Determinar a Inversa

Escreva a equação $y = f(x)$ que define a função f. Resolva a equação $y = f(x)$, para x em função de y para obter $x = f^{-1}(y)$ e, a seguir, permute x por y. A equação obtida define f^{-1}.

Note que, a rigor, a função f^{-1} toma valores nos $y \in Im(f)$.

É possível determinar geometricamente se uma função possui ou não função inversa. Para isto, desenhe qualquer reta paralela ao eixo dos x; se a reta intersecta o gráfico da função no máximo num ponto, então a função possui inversa.

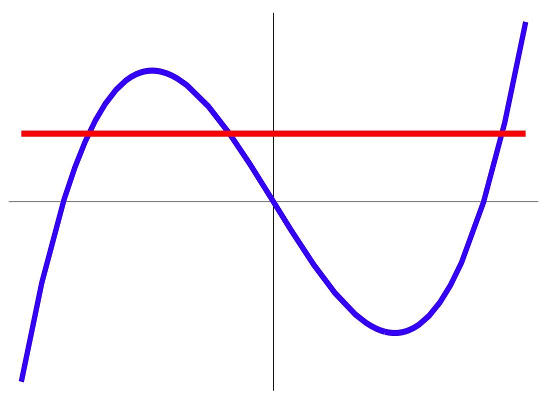


Figura 2.61: Função sem inversa.

Exemplo 2.21.

[1] Funcionamento de um termômetro: O volume de uma quantidade de mercúrio é função da sua temperatura. Usando a função inversa, determinamos a temperatura através de seu volume.

[2] A inversa de uma função afim não constante é afim.

De fato, se $y = f(x) = m\,x + b$; então, $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{m}\,(y - b)$. Permutando x por y,temos:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{m}\,(x - b).$$

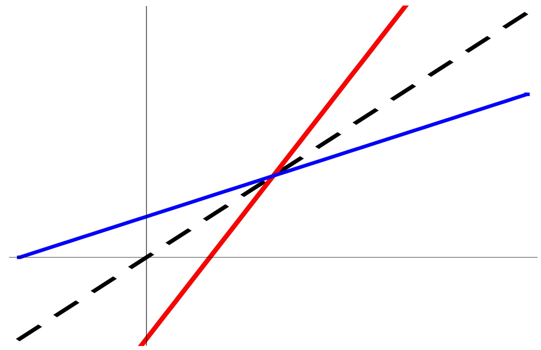


Figura 2.62: Uma função afim e sua inversa.

[3] Seja $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que se n é par a função é par e se n é ímpar a função é ímpar. Logo f possui inversa para $x \geq 0$ se n é par:

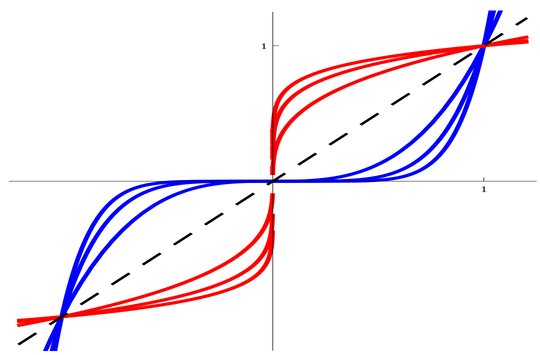


Figura 2.63: Desenho para n ímpar.

f possui inversa para todo $x \in \mathbb{R}$ se n é ímpar. A inversa para ambas é $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Permutando x por y, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

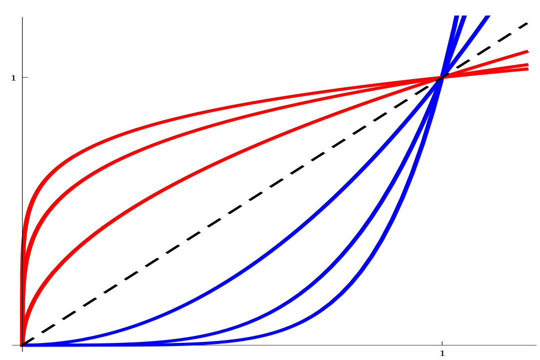


Figura 2.64: Desenho para n par.

[4] Determine a inversa de $f(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$, $a\,d - b\,c \neq 0$.

Fazendo: $y = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ e resolvendo a equação em relação a x, temos,

$$x = \frac{d\,y - b}{a - c\,y};$$

logo $f^{-1}(y) = \dfrac{d\,y - b}{a - c\,y}$ se $y \neq \frac{a}{c}$ ou, equivalentemente,

$$f^{-1}(x) = \frac{d\,x - b}{a - c\,x}$$

se $x \neq \dfrac{a}{c}$, que é a inversa de f.

[5] Uma bola de borracha está sendo inflada e seu volume V é função do tempo t (em min) sendo $V(t) = (4\,t + 5)\ cm^3$. Quanto tempo demora a bola para atingir o volume de $45\ cm^3$?

Devemos determinar a função inversa de V. Como $V = 4\,t + 5$ então $t = \dfrac{V - 5}{4}$ e

$$t = V^{-1}(V) = \frac{V - 5}{4} \quad \text{e} \quad t = V^{-1}(45) = 10\,min.$$

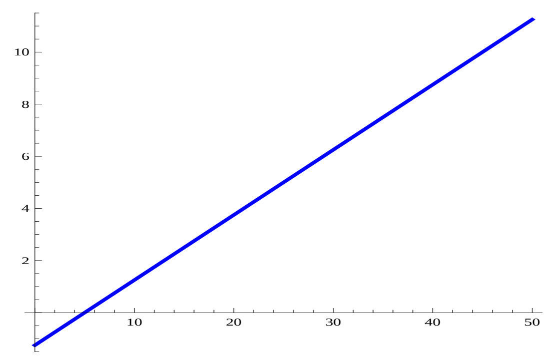


Figura 2.65: Desenho de V^{-1}.

[6] Calcule a inversa de uma função polinomial de segundo grau.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; observando o gráfico de f temos que fazer $-\dfrac{b}{2a} \leq x$ (ou $-\dfrac{b}{2a} \geq x$) para obter a inversa. Resolvendo $y = ax^2 + bx + c$ ou $ax^2 + bx + (c - y) = 0$, temos que: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a}$. Então:

$$f_1^{-1}(y) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} \quad \text{se} \quad a > 0 \ \text{e}$$

$$f_2^{-1}(y) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} \quad \text{se} \quad a < 0.$$

Analogamente se $-\dfrac{b}{2a} \geq x$; ou equivalentemente:

$$f_1^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a} \quad \text{se} \quad a > 0 \ \text{e}$$

$$f_2^{-1}(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a} \quad \text{se} \quad a < 0.$$

2.12 Funções Definida por Partes

É comum aparecer nas aplicações, funções definidas por:

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \in Dom(f_1) \\ f_2(x) & \text{se} \quad x \in Dom(f_2) \\ f_3(x) & \text{se} \quad x \in Dom(f_3) \\ f_4(x) & \text{se} \quad x \in Dom(f_4) \\ \vdots & \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{se} \quad x \in Dom(f_n). \end{cases}$$

Note que $Dom(h) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) \cup \ldots\ldots \cup Dom(f_n)$ e que:

$$h(x) = f_i(x) \Longleftrightarrow x \in Dom(f_i), \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 2.22.

[1] Considere a função :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{5\,x^2} & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ \sqrt{\dfrac{1}{x+1}} & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Logo, $Dom(h) = (-\infty, 0] \cup (0, 1] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R}$, então:

$$h(-3) = \frac{1}{(-3)^2+1} = \frac{1}{10} \quad \text{pois} \quad -3 \in (-\infty, 0]$$

$$h(1) = \frac{1}{5} \quad \text{pois} \quad 1 \in (0, 1]$$

$$h(3) = \sqrt{\frac{1}{3+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{pois} \quad 3 \in (1, +\infty).$$

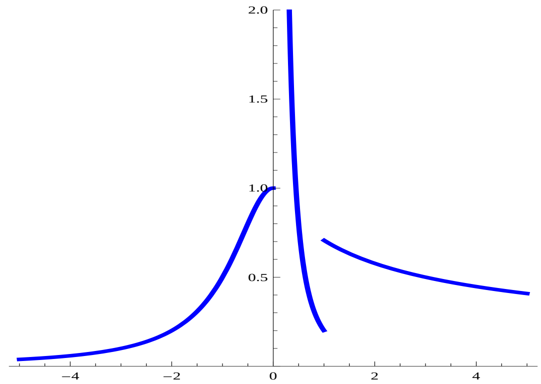


Figura 2.66: Gráfico do exemplo [1].

[2] Uma empresa de ônibus cobra 40 reais pela passagem unitária, se vende menos de 20 passagens, e cobra 50 centavos a menos pela passagem adicional. Denotemos por x o número de passagens, então a função $h = h(x)$, representa a quantidade de dinheiro que recebe a empresa por x passageiros, e é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} 40\,x & \text{se} \quad x \leq 20 \\ [40 - (x - 20)\,0.5]\,x & \text{se} \quad x > 20 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 40\,x & \text{se} \quad x \leq 20 \\ [50 - 0.5\,x]\,x & \text{se} \quad x > 20 \end{cases}$$

Por exemplo, para saber quanto dinheiro recebe a empresa com 46 passageiros, calculamos:

$$h(46) = [50 - 0.5 \times 46] \times 46 = 1242 \quad \text{reais},$$

pois $46 > 20$.

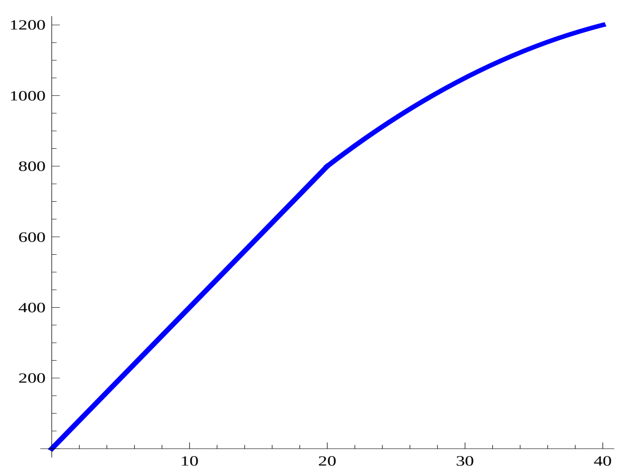


Figura 2.67: Gráfico do exemplo [2].

[3] Um atacadista vende um certo tipo de produto, por caixas, segundo a seguinte tabela de preços, em dólares:

Preço	25.8	24.1	22.5	21.6	20.9	20
x	$x \leq 20$	$20 < x \leq 50$	$50 < x \leq 100$	$100 < x \leq 250$	$250 < x \leq 400$	$400 < x$

onde x é a quantidade de caixas; a tabela de preços pode ser modelada por:

$$p(x) = \begin{cases} 25.8\,x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 20 \\ 24.1\,x & \text{se} \quad 20 < x \leq 50 \\ 22.5\,x & \text{se} \quad 50 < x \leq 100 \\ 21.6\,x & \text{se} \quad 100 < x \leq 250 \\ 20.9\,x & \text{se} \quad 250 < x \leq 400 \\ 20\,x & \text{se} \quad x > 400. \end{cases}$$

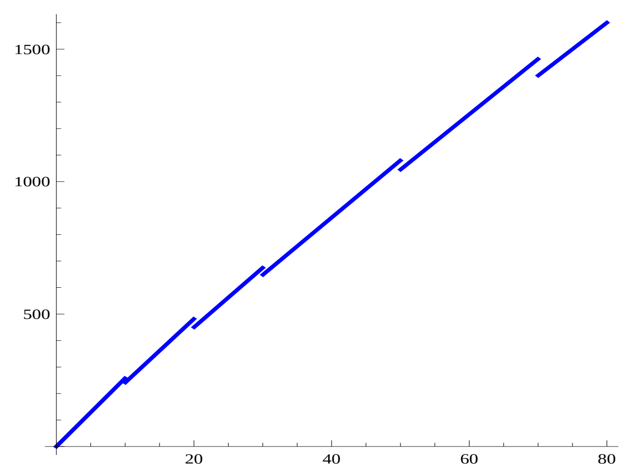


Figura 2.68: Gráfico de $p = p(x)$.

Note que existem algumas compras erradas, por exemplo, $p(20) = 516$ e $p(21) = 506.1$; logo, é melhor comprar 21 caixas.

2.13 Funções Elementares

A seguir apresentamos uma classe importante de funções que tem um papel fundamental nas aplicações que serão tratadas nos capítulos posteriores. Estas funções são ditas elementares, pois não podem ser obtidas através de outras funções.

2.14 Função Exponencial

A função exponencial está associada a fenômenos de crescimento ou decrescimento, como por exemplo, crescimento populacional e desintegração radioativa.

Exemplo 2.23.

Suponha que após 7 meses de observação foram obtidos os seguintes dados de uma população de formigas:

M	Q	V
1	150000	
2	159000	9000
3	168540	9540
4	178652	10112
5	189371	10719
6	200733	11362
7	212777	12044

M é o mês, Q é a quantidade de formigas em cada mês da observação e V é a variação mensal da população. Dividindo a quantidade de formigas de um mês em relação ao mês anterior, obtemos um fator constante 1.06, o que mostra que a população de formigas cresce, aproximadamente, $6\,\%$ ao mês. Temos:

$$\begin{aligned}
&\text{se } x = 0, \text{ então } 150000 = 150000 \times (1.06)^0;\\
&\text{se } x = 1, \text{ então } 159000 = 150000 \times (1.06)^1;\\
&\text{se } x = 2, \text{ então } 168540 = 150000 \times (1.06)^2;\\
&\text{se } x = 3, \text{ então } 178652 = 150000 \times (1.06)^3.
\end{aligned}$$

Em geral, decorridos x meses após a primeira observação, a população de formigas é dada por:

$$f(x) = 150000 \times (1.06)^x.$$

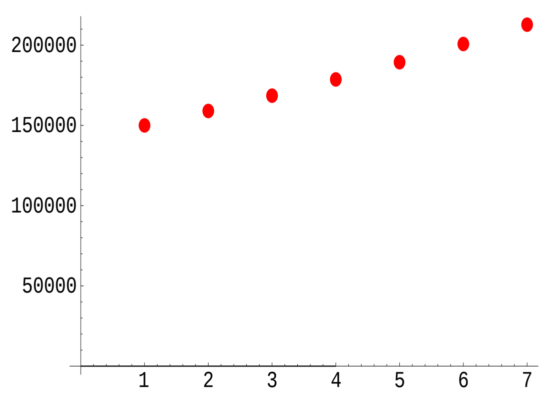


Figura 2.69: Gráfico de $f(x) = 150000 \times (1.06)^x$.

Definição 2.8. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. A* **função exponencial de base** *a é denotada e definida por:*

$$\boxed{y = f(x) = a^x}$$

$Dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = (0, +\infty)$, $f(0) = 1$, $f(1) = a$ e seu gráfico depende de ser $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Se $n \in \mathbb{N}$, então $a^n = a \times a \times \ldots \times a$, n vezes. Se $n \in \mathbb{N}$, então $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = \dfrac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e:

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Se $x \notin \mathbb{Q}$, isto é, x é um número irracional como π, $\sqrt{3}$, que sentido tem a expresão a^π e $a^{\sqrt{3}}$? A resposta rigorosa a esta pergunta será respondida em níveis de estudos mais elevados que o destas notas introdutórias. Por enquanto, vejamos uma idéia intuitiva:

Exemplo 2.24.

Considere $2^{\sqrt{3}}$; o número irracional $\sqrt{3}$ é aproximadamente $\sqrt{3} \cong 1.732050807568\ldots$ Por outro lado, os seguintes números são racionais: 1.7, 1.73, 1.732, 1.73205, etc. Logo, pela observação anterior sabemos calcular $2^{1.7}$, $2^{1.73}$, $2^{1.732}$, $2^{1.73205}$, $\ldots$ e podemos obter um valor aproximado para $2^{\sqrt{3}}$. Observe a tabela:

x	2^x
1.7	3.249009
1.73	3.317278
1.732	3.321880
1.73205	3.321995
$\vdots$	$\vdots$
$\sqrt{3}$	$2^{\sqrt{3}}$

Proposição 2.2. *Seja $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$*

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$. *Isto é:*
$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1}\, a^{x_2},$$
para todo $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$.

2. $f(b\, x) = \big(f(x)\big)^b = \big(f(b)\big)^x$. *Isto é:*
$$a^{b\, x} = (a^x)^b = (a^b)^x,$$
para todo $x,\, b \in \mathbb{R}$.

Dada uma função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \ldots\ldots$ formam uma progressão geométrica (P.G.) de razâo a. Na verdade, para toda função exponencial $f(x) = a^x$, as razões

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

dependem apenas de h e não de x. Esta é uma propriedade característica das funções exponenciais e significa que se consideramos a progressão aritmética de razão h:

$$x,\; x+h,\; x+2\,h, x+3\,h,\; x+4\,h, \ldots\ldots$$

então, obtemos a progressão geométrica de razão a^h:

$$
\begin{aligned}
&f(x+h) = a^h\, f(x),\\
&f(x+2\,h) = f((x+h)+h) = a^h\, f(x+h) = a^{2h}\, f(x)\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&f(x+n\,h) = a^{nh}\, f(x)
\end{aligned}
$$

Pelas propriedades anteriores, cada vez que a abscissa aumenta uma unidade a ordenada é multiplicada por a e cada vez que a abscissa diminui uma unidade a ordenada é multiplicada por $\dfrac{1}{a}$.

Se $a > 1$, então, a distância da curva ao eixo dos x cresce quando x cresce e decresce quando x decresce. Se $a < 1$ ocorre o contrário.

Um caso particular e importante de função exponencial é quando a é a constante de Euler:

$$e \simeq 2.718281828.$$

Gráficos para $0 < a < 1$:

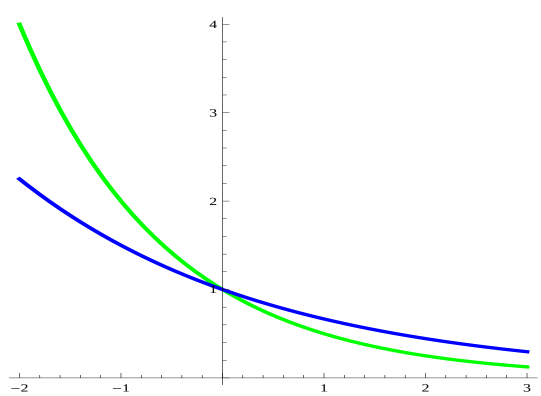


Figura 2.70: $a = \frac{1}{2}$ (verde) e $a = \frac{2}{3}$ (azul).

Gráficos para $a > 1$:

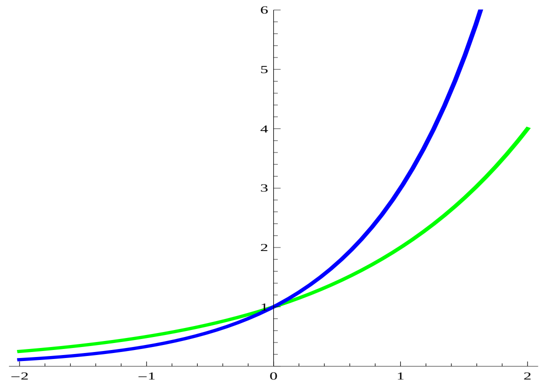


Figura 2.71: $a = 2$ (verde) e $a = 3$ (azul).

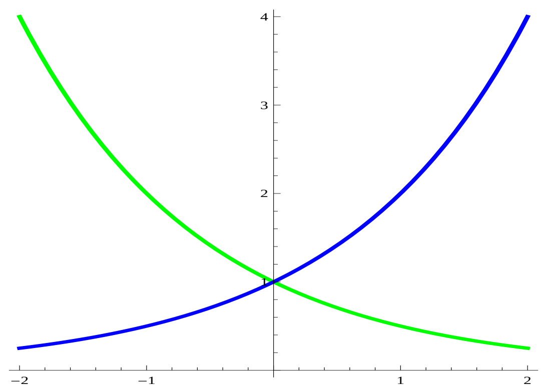


Figura 2.72: Gráficos para $a = \frac{1}{2}$ (verde) e $a = 2$ (azul).

Exemplo 2.25.

[1] Um fabricante de certos componentes eletrônicos fez um estudo estatístico da confiabilidade do seu produto. O estudo indicou que a fração dos componentes que após t anos de uso, ainda estão em condições de funcionamento é, aproximadamente, $f(t) = e^{-0.2\,t}$.

(a) Que fração dos componentes deve funcionar pelo menos por três anos?

(b) Que fração dos componentes deve parar de funcionar durante o terceiro ano de uso?

(a) Devemos calcular: $f(3) = e^{-0.6} \cong 0.54$, isto é, podemos esperar que aproximadamente 55% dos componentes funcione pelo menos três anos.

(b) Para determinar a fração dos componentes que deve parar de funcionar durante o terceiro ano de uso, basta calcular:

$$f(3) - f(4) = e^{-0.6} - e^{-0.8} \cong 0.099.$$

Portanto, podemos esperar que, aproximadamente, 10% dos componentes parem de funcionar durante o terceiro ano de uso.

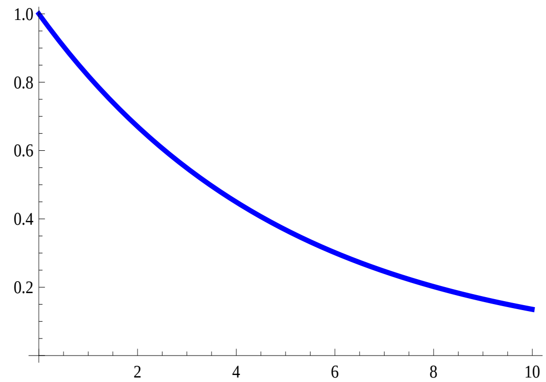


Figura 2.73: Gráfico de $f(t) = e^{-0.2t}$.

[2] Num dia de verão, um refrigerante gelado é retirado de uma geladeira cuja temperatura é de 12^oC e é colocada numa sala onde a temperatura é de 32^oC. De acordo com uma lei da Física, a temperatura do refrigerante, após t minutos mais tarde, é dada por $T(t) = 32 - A\,e^{-k\,t}$, onde $A,\ k > 0$. Supondo que a temperatura do refrigerante é 16^oC após 20 minutos, qual será a temperatura do refrigerante, após 40 minutos?

Primeiramente devemos determinas as constantes A e k. Sabemos que inicialmente a temperatura do refrigerante é de 12^oC; logo, $T(0) = 12$ e $32 - A = 12$, donde $A = 20$. Por outro lado, após 20 minutos a temperatura é de 16^oC, e:

$$T(20) = 16 \Rightarrow 32 - 20\,e^{-20\,k} = 16 \Rightarrow e^{-20\,k} = \frac{4}{5}.$$

Finalmente:

$$T(40) = 32 - 20\,e^{-40\,k} = 32 - 20\,[e^{-20\,k}]^2 = 32 - 20\left[\frac{4}{5}\right]^2 \cong 19.2^oC.$$

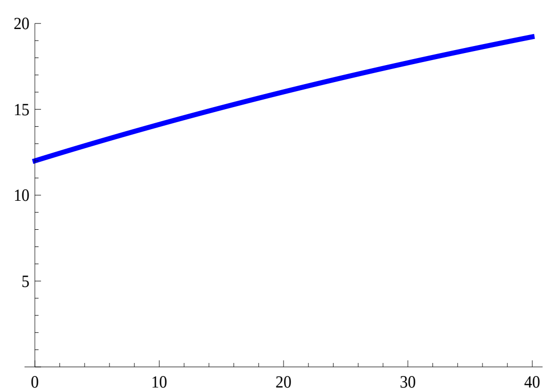


Figura 2.74: Gráfico do exemplo [2].

[3] Uma empresa deve encerrar suas atividades em 15 semanas. A diretoria deseja diminuir os preços de todos os artigos que vende de tal modo que quando feche suas atividades, as

mercadorias restantes tenham o valor de 30% de seu preço original. Em que percentual deve diminuir, semanalmente, os preços para obter este resultado?

Se uma mercadoria custa 100 u.m. após 15 semanas deveria valer 30 u.m. Seja x o fator de desconto, então:

$$30 = 100\,(1-x)^{15} \Longrightarrow x = 1 - \left[\frac{3}{10}\right]^{1/15} \cong 0.0771281.$$

Logo, deverá reduzir o preço em torno de 7% por semana.

2.15 Função Logarítmica

Como qualquer reta paralela ao eixo dos x intersecta o gráfico da função exponencial $y = a^x$ no máximo num ponto, ela possui uma inversa denominada **função logarítmica de base** a, que é denotada por:

$$\boxed{f(x) = log_a(x)}$$

e definida por:

$$\boxed{y = log_a(x) \Longleftrightarrow a^y = x}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < a \neq 1$. Note que $Dom(f) = (0, +\infty)$, $Im(f) = \mathbb{R}$, $f(1) = 0$, $f(a) = 1$ e seu gráfico depende de ser $a > 1$ ou $0 < a < 1$.
Gráficos para $0 < a < 1$:

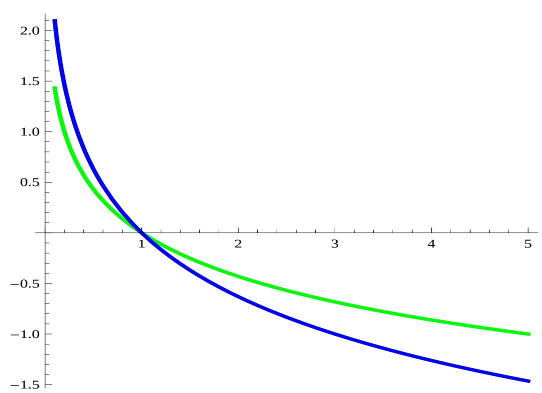


Figura 2.75: $a = \frac{1}{5}$ (verde) e $a = \frac{1}{3}$ (azul).

Gráficos para $a > 1$:

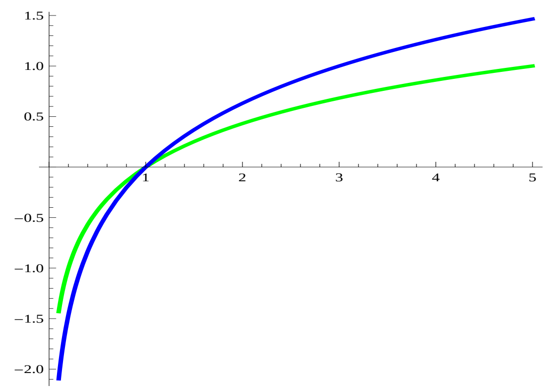


Figura 2.76: $a = 5$ (verde) e $a = 3$ (azul).

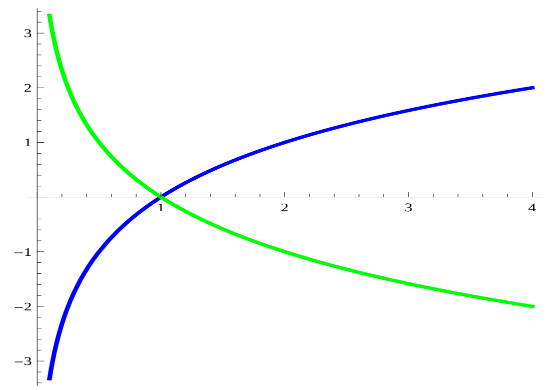


Figura 2.77: Gráficos para $a = 2$ (azul) e $a = \frac{1}{2}$ (verde).

Usando novamente o fato de $y = log_a(x)$ ser a inversa da exponencial temos as seguintes identidades:

$$log_a(a^x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$a^{log_a(x)} = x,$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Proposição 2.3. *Seja $y = log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}$ e tal que $0 < a \neq 1$:*

1. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, *para todo* $x_1,\ x_2 \in (0, +\infty)$, *isto é:*

$$log_a(x_1 \cdot x_2) = log_a(x_1) + log_a(x_2), \quad \textit{para todo} \quad x_1,\ x_2 \in (0, +\infty).$$

2. $log_a(x^b) = b \cdot log_a(x)$.

3. . $log_a(\dfrac{x_1}{x_2}) = log_a(x_1) - log_a(x_2)$; *para todo* x_1, $x_2 \in (0, +\infty)$.

4. $log_a(b) = \dfrac{1}{log_b(a)}$.

5. $log_a(x) = \dfrac{log_b(x)}{log_b(a)}$.

6. $a^x = b^{x\, log_b(a)}$.

Um caso particular e importante de função logarítmica é quando a é a constante de Euler, o número $e \simeq 2.718281828$. Em tal caso a notação usual é :

$$f(x) = log_e(x) = ln(x),$$

chamado logaritmo natural de x. Veja os próximos capítulos.

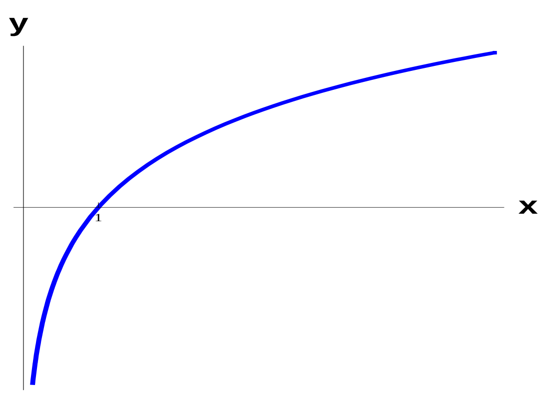


Figura 2.78: Gráfico de $f(x) = ln(x)$.

A relação entre a^x e e^x é:

$$\boxed{a^x = \left(e^{ln(a)}\right)^x = e^{k\,x}}$$

onde $k = ln(a)$.

Exemplo 2.26.

[1] Determine o domínio da função $f(x) = ln(ln(x))$.

Note que $ln(u)$ é definido se $u > 0$; logo, para que $f(x) = ln(ln(x))$ esteja definido é necessário que $ln(x) > 0$; logo $x > 1$ e $Dom(f) = (1, +\infty)$.

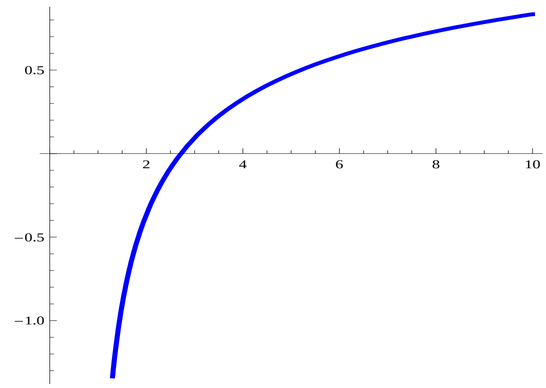


Figura 2.79: Gráfico de $f(x) = ln(ln(x))$.

[2] Determine a inversa da função $f(x) = 81 \times \big(6561\big)^x$.

Fazendo $y = 81 \times (6561)^x = 3^{8x+4}$ e aplicando logaritmo de base $b = 3$ a ambos os lados: $log_3(y) = 8\,x + 4$ e $x = \dfrac{log_3(y) - 4}{8}$ ou,

$$f^{-1}(y) = \frac{log_3(y) - 4}{8}.$$

Equivalentemente, $f^{-1}(x) = \dfrac{log_3(x) - 4}{8}$, $(x > 0)$ que é a inversa da função dada.

[3] Uma floresta possui, aproximadamente, $24000\,m^3$ de madeira comercializável, a qual aumenta na razão de 3.5% ao ano. Outra floresta possui, aproximadamente, $48000\,m^3$ de madeira comercializável com a mesma razão de crescimento da primeira.

(a) Quantos anos devem trascorrer para que a primeira floresta tenha a mesma quantidade de madeira da segunda?

(b) Quantos anos são necessários para que ambas as florestas tripliquem a quantidade de madeira?

Denotemos por $f(t) = 24000 \times 1.035^t$ e $g(t) = 48000 \times 1.035^t$ as funções exponenciais que modelam cada floresta. Então:

(a) Devemos ter $f(t) = 48000$; logo, $24000 \times 1.035^t = 48000$, então $1.035^t = 2$. Aplicando logaritmo natural a ambos os lados:

$$t = \frac{ln(2)}{ln(1.035)} \cong 20.14\,\text{anos}.$$

(b) Devemos ter $f(t_0) = 72000$ e $g(t_1) = 144000$, então $1.035^{t_0} = 3$ e $1.035^{t_1} = 3$. Aplicando logaritmo natural a ambos os lados: :

$$t = t_0 = t_1 = \frac{ln(3)}{ln(1.035)} \cong 31.93\,\text{anos}.$$

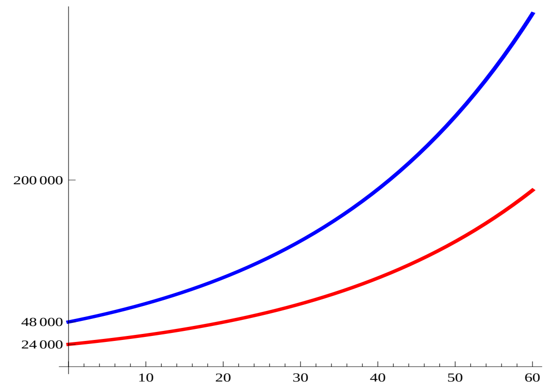


Figura 2.80: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$.

[4] O montante da dívida de uma empresa com os fornecedores, após t meses é modelada por $M(t) = 5000000 \times 1.07^t$ em reais. Determine quando a dívida atinge 15000000 reais?

Devemos determinar t tal que $15000000 = M(t) = 5000000 \times 1.07^t$, isto é $3 = 1.07^t$, então:

$$3 = 1.07^t \Longrightarrow t = \frac{ln(3)}{ln(1.07)} \cong 16.23,$$

logo, a dívida atinge 15000000 reais em aproximadamente 17 meses.

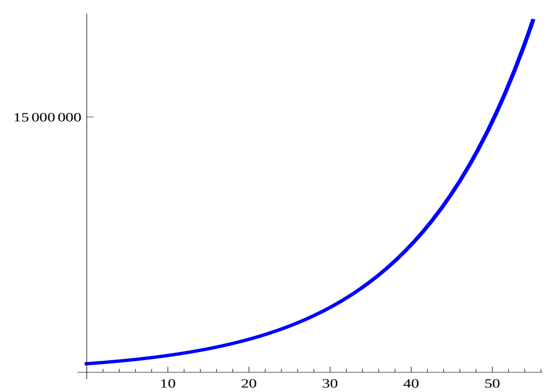


Figura 2.81: Gráfico de $M = M(t)$.

2.16 Exercícios

1. Exprima como função de x:

   (a) a área de um triângulo de base x se sua altura é o dobro de sua base.

   (b) o volume de uma esfera de raio x.

   (c) o volume de um cone circular reto de raio x se sua altura é o triplo do raio da base.

   (d) o volume e a área total de um cilindro circular reto de raio x sendo sua altura igual a $\frac{10}{3}$ do raio da base.

2. Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^4$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

   (e) $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^2+1}$

   (f) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

   (g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\,x + 3}$

   (h) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

   (i) $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$

   (j) $f(x) = \dfrac{9\,x^2-4}{r}3\,x - 2$

3. Escreva a função $f(x) = |x| + |x+4|$ sem usar valor absoluto e esboce seu gráfico.

4. Seja $f(x) = |x| - 2\,x$; determine $Dom(f)$; calcule $f(1)$, $f\big(-\dfrac{2}{3}\big)$ e verifique que $f(|a|) = -|a|$.

5. Determine o domínio de $f(x) = \dfrac{x-1}{2\,x+7}$ e calcule $f\big(\dfrac{1}{x}\big)$ e $\big(f(x)\big)^{-1}$.

6. Simplifique a seguinte expressão: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x \neq a$, se:

   (a) $f(x) = x^2,\ a = 1$

   (b) $f(x) = x^3,\ a = -2$

   (c) $f(x) = x^2 + x,\ a = -1$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ a = 1$

   (e) $f(x) = 2\,x + 1,\ a = 2$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ a = 2$

   (g) $f(x) = x^3 + x,\ a = 2$

   (h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3},\ a = 3$

   (i) $f(x) = \sqrt[3]{x+1},\ a = 1$

   (j) $f(x) = \dfrac{1}{x^4},\ a = 4$

7. Repita o exercício anterior para um a qualquer e compare os resultados obtidos.

8. Fazendo uma tabela, esboce os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = x^2 + 1$

(b) $y = (x-1)^2$

(c) $y = (x+1)^2$

(d) $y = x^2 - 1$

(e) $y = x\,|x|$

(f) $y = \dfrac{1}{x-2}$

(g) $y = \sqrt{4 - x^2}$

(h) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

(i) $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

(j) $y = |x-1| + |x-2|$

(k) $y = \dfrac{|x|}{1-x}$

(l) $y = 1 + x - |x|$

9. Verifique se as seguintes funções são constantes, explique:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|} - \dfrac{|x|}{x}$

10. Esboce os gráficos no mesmo desenho:

    (a) $y = |x|$, $y = |x+1|$, $y = |x-1|$

    (b) $y = |x|$, $y = 2\,|x|$, $y = \frac{|x|}{2}$

11. Determine $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g, se:

    (a) $f(x) = 2\,x, \quad g(x) = x^2 + 2$

    (b) $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = |x+2|$

    (c) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x^2 - 1$

    (d) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x+3}$

    (e) $f(x) = x^4, \quad g(x) = (\dfrac{1}{x})^4$

    (f) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^2$

    (g) $f(x) = x^3 + x^2, \quad g(x) = (\dfrac{1}{x^2})^4$

    (h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = x^2$

12. Seja $f = g \circ h$. Calcule h se:

    (a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$

    (b) $f(x) = b\,x + a$, $g(x) = x + a$

    (c) $f(x) = |x^2 - 3\,x + 5|$, $g(x) = |x|$

    (d) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3$

13. Seja $f(x) = a\,x + b$. Para que valores de a e b vale: $(f \circ f)(x) = 9\,x - 3$?

14. Se $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = \dfrac{1}{2x}$, determine o domínio de $g \circ f$ e esboce o gráfico de $g \circ f$.

15. Verifique que $Im(f) \subset Dom(g)$ e determine $g \circ f$ se:

(a) $f(x) = x+2,\ g(x) = 3\,x+1$

(b) $f(x) = x^2+2,\ g(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = x^2+3,\ g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

(d) $f(x) = 2x-3, \quad g(x) = -x^2+3x+1$

(e) $f(x) = x+1,\ g(x) = \dfrac{2}{x-2}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

16. Escreva $h(x)$ como composta de duas outras funções:

(a) $h(x) = (x^2+1)^4$

(b) $h(x) = (x^2-9)^{-2}$

(c) $h(x) = \sqrt[4]{3\,x+5}$

(d) $h(x) = (ln(x))^2+1$

(e) $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(f) $h(x) = ln(\dfrac{1}{x^2})$

17. Determine f_n, se $f_0(x) = x+3$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, $n = 0,\ 1,\ 2, ...$

18. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = x^4+x^3-x^2$

(b) $y = 2+(x-1)^3$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

(d) $y = x^3-x^2$

19. Ache o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x0 = \sqrt{ln(x)}$

(b) $f(x) = ln(ln(x))$

(c) $f(x) = log_a(|x|)$

(d) $f(x) = log_a(x\,(x^2-2)(x^2-3))$

20. Determine a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

(c) $f(x) = x^4,\ x > 0$

(d) $f(x) = x^2-2x,\ x > 1$

(e) $f(x) = 2+\dfrac{3}{x+1}$

(f) $f(x) = x^2-4x+3$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(h) $f(x) = \dfrac{x+2}{2\,x-1}$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x > 0$

(j) $f(x) = \dfrac{3\,x+5}{4-3\,x}$

(k) $f(x) = 1+log_a(x)$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,log_a(\dfrac{x+1}{x-1})$

21. Sejam $f(x) = 1-x$ e $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$. Verifique que f e g são as inversas de f e g respectivamente.

22. Sejam $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[a^x + a^{-x}\right]$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}\left[a^x - a^{-x}\right]$, $a > 0,\ a \neq 1$. Verifique que:

    (a) $f(x+y) = f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y)$

    (b) $g(x+y) = f(x)\,g(y) + f(y)\,g(x)$

    (c) Analise o caso $a = e$.

23. Esboce o gráfico das seguintes funções exponenciais:

    (a) $f(x) = a^x,\ a = 2,\ a = \dfrac{1}{2}$

    (b) $f(x) = a^x,\ a = 10,\ a = 20$

    (c) $f(x) = a^{-x},\ a = e,\ a = 3$

    (d) $f(x) = a^{-2x},\ a = 2,\ a = 10$

24. Esboce o gráfico das seguintes funções logarítmicas:

    (a) $y = ln(-x),\ x < 0$

    (b) $y = ln(|x|)$

    (c) $y = \dfrac{ln(x)}{x}$

    (d) $y = x\,ln(x)$

    (e) $y = |ln(x)|$

    (f) $y = ln(x^2)$

25. (a) Se $f(x) = ln\big(\dfrac{1-x}{1+x}\big)$, verifique que:

    $$f(a) + f(b) = f\big(\frac{a+b}{1+a\,b}\big).$$

    (b) Se $f(x) = 2^x$, verifique que: $f(x+3) - f(x-1) = 15\,f(x-1)$.

26. Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, determine $Dom(f)$ e calcule:

    (a) $(f \circ f \circ f \circ f)(x^2 + 1)$

    (b) $(f \circ f \circ f)((x+1)^2)$

    (c) $(f \circ f)\big(\dfrac{1}{1-x}\big)$

    (d) $(f \circ f)\big(\dfrac{1}{x}\big)$

    Determine em cada caso as condições para as compostas.

27. Quando uma função polinomial do primeiro grau verifica:

    $$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)\ ?$$

    Esta propriedade vale ou não para:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = 2\,x^3$

(c) $f(x) = 2\,x + 1$

(d) $f(x) = 3\,x$

28. Determine os vértices das seguintes parábolas:

    (a) $y = -x^2 + 4\,x - 3$

    (b) $y = x^2 - 8\,x + 12$

    (c) $y = 2\,x^2 - x - 1$

    (d) $y = x - x^2 - 9$

29. Determine a função afim f tal que $f(1) = 2$ e $f(2) = -4$ e a função quadrática g tal que $g(1) = -1$, $g(2) = -2$ e $g(3) = 1$.

30. Seja $f(x) = \sqrt{log_{\frac{1}{2}}(log_{10}(x+1))}$. Determine $Dom(f)$ e calcule $f(9)$.

31. Se $log_b(a\,\sqrt[3]{b}) = 4$ e $log_a(b) = c$, determine c.

32. Verifique que a função afim tem como gráfico uma reta não vertical.

33. O custo para produzir uma unidade de um certo produto é de 5 reais e a partir da décima unidade o custo é de 2 reais. Se o custo é uma função afim, determine tal função.

34. Uma garagem cobra diárias de 10 reais, mas dispobiniliza para os clientes mais frequentes um selo por 60 reais, tal que os motoristas que possuem o selo pagam diárias de 4 reais.

    (a) Determine as funções que modelam o custo para estacionar x dias por mês.

    (b) Determine o ponto de interseção e explique o resultado.

35. Uma empresa comprou uma máquina por 25000 reais. Sabendo que a vida útil da máquina é de 10 anos, determine a depreciação linear e o valor da máquina após 5 anos.

36. Um empresário comprou equipamentos de informática por 32000 reais. Uma depreciação linear reduziu seu valor a 4000 reais após 8 anos.

    (a) Determine o valor do equipamento após 4 anos.

    (b) Daqui a quantos anos o valor do equipamento será nulo?

37. O preço de um carro daqui a 3 anos será de 20000 reais e sofre uma depreciação linear que reduz seu valor a 10000 reais após 5 anos. Determine o preço atual.

38. O orçamento mensal de uma família é de 8000 reais. Se tem uma despesa fixa de 3500 reais e despesas variáveis no valor de 1500 reais, determine a restrição orçamentária da família. Esboce as regiões determinadas pela restrição orçamentária, explicando o que cada uma representa.

39. Um grupo familiar destina 500 reais para comprar refrigerantes e água mineral. Cada litro de refrigerantes custa 2 reais e cada litro de água mineral custa 1.2 reais. Determine a restrição orçamentária.

40. Determine em quantos meses um capital de 30000 reais, aplicados à taxa de 12% ao ano, rende 4500 reais de juros simples.

41. Qual o capital que acrescido de seus juros à taxa de 8% ao ano, num período de 2 anos e 3 meses, produz um montante de 110689 reais?

42. O capital de 30000 reais, foi aplicado a uma taxa de 5% ao mês durante 15 meses. Determine o montante.

43. Determine a taxa anual em que esteve aplicado o capital de 45300 reais sabendo que em 3 anos rendeu 13590 reais de juros simples.

44. Os ganhos de uma empresa, em milhões de dólares, é modelado por:
$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + 6\,x + 20, \quad 0 \leq x \leq 39$$
onde x á quantidade de dinheiro que a empresa aplica em publicidade trimestralmente. Que montante a empresa deve utilizar em propaganda para ter ganhos máximos?

45. Um produto é vendido a um preço p, em dólares, tal que o preço de compra é modelado por:
$$p(x) = \frac{45.67}{1 + 0.0023\,x},$$
onde x ó número de unidades vendidas.

    (a) Determine a inversa de $p = p(x)$.

    (b) Quantas unidades foram vendidas ao preço de 10 dólares?

46. O pH (potencial hidrogênico) é uma escala logarítmica que varia de 0 a 14, e nos indica quão ácida ou alcalina é uma substância. Valores abaixo de 7,0 são ácidos e acima são alcalinos. O valor 7 é neutro e corresponde ao pH da água destilada. O pH é modelado por:
$$pH = -log_{10}[H^+],$$
onde $[H^+]$ é a concentação de íons de hidrogênio mol/litro. Complete a seguinte tabela:

Substância	$[H^+]$	pH
Leite	1.5848×10^{-7}	
L. de Magnesia	10^{-10}	
Suco de laranja	3.162×10^{-5}	
Limão	0.501×10^{-2}	
Vinagre	12.58×10^{-4}	
Tomates	6.30×10^{-8}	

Capítulo 3

FUNÇÕES EM ECONOMIA

3.1 Introdução

Nestas notas aplicaremos os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável a um ramo da Economia, chamado de Microeconomia, que estuda como os agentes individuais, as empresas e os consumidores tomam decisões, bem como suas respectivas iterações no mercado.

Em geral, em Análise Econômica as variáveis utilizadas são, em geral, discretas e não negativas; isto é, definidas em subconjuntos do conjunto dos números naturais. Para aplicar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, estenderemos, de forma natural, todas as funções aos números reais positivos. Portanto, os gráficos das funções utilizadas neste capítulo, se localizam no primeiro quadrante.

Alguma vezes os economistas consideram valores negativos; por exemplo, a oferta negativa de um produto (veja no próximo parágrafo), implica em que os bens e/ou serviços não podem ser achados no mercado seja por não serem produzidos ou por estarem estocados esperando uma alta nos preços. Por outro lado um preço negativo, implica em que o produtor pague aos consumidores para levar os bens que oferece no mercado.

Nos exemplos e exercícios utilizaremos o princípio **ceteris paribus**, frase em latim que significa, todas as outras coisas ficam iguais, isto é, a única coisa que estará se alterando será a variável que se estiver analisando. A seguir daremos algumas definições básicas da Economia:

Empresa ou fábrica é a unidade básica de produção num sistema econômico.

Produto é qualquer bem ou serviço obtido por processo produtivo.

Mercado é qualquer sistema que permita pôr em contato os compradores e os vendedores de um mesmo bem ou serviço para a realização de intercâmbios voluntários.

A **concorrência perfeita** entre empresas é caracterizada pela hipótese de que existem muitas empresas e que nenhuma em particular consegue controlar o preço do produto por mudanças na sua cadeia produtiva.

Nos próximos parágrafos, utilizaremos as notações que usualmente aparecem nos livros de Economia.

3.2 Função de Demanda e de Preço

A **demanda** é a relação entre o preço de um bem e a quantidade demandada pelos compradores. A lei de demanda diz que: **se tudo permanecer constante, a quantidade demandada de um produto ou bem, varia inversamente proporcional a seu respectivo preço e vice versa**. Logo, é equivalente utilizar o preço em função da quantidade ou a quantidade em função do preço.

Segue diretamente da lei de demanda que quando o preço de um produto sobe a demanda diminui e vice-versa. Em geral, a demanda de um produto, assim como outras quantidades estudadas em Economia, dependem de inúmeras variáveis. Por exemplo, a demanda de um produto depende do preço, da quantidade ofertada do produto, do preço de possíveis substitutos do produto, da renda, hábitos e preferências dos consumidores. Nestas notas, assumiremos que todas as funções a estudar dependem somente de uma variável, permanecendo as outras constantes.

Definição 3.1. *Se denotamos por p o preço unitário de um produto e por x a quantidade demandada deste produto oferecido no mercado por uma empresa, então a função $x = f(p)$ que os relaciona é chamada* **função de demanda**.

A função de demanda define a relação que existe entre a quantidade oferecida e o preço do produto. Logo, a função demanda descreve o comportamento do consumidor. A quantidade demandada de um bem é aquela que os compradores desejam e podem comprar a determinado preço.

O gráfico da função de demanda é chamado **curva de demanda**. A função de demanda pode sofrer mudanças ou perturbações devido, essencialmente, a variações na renda dos indivíduos, ao preço de outros bens substitutos e ao gosto dos consumidores. Uma curva de demanda típica tem forma descendente porque, quanto maior o preço unitário, menor o interesse dos compradores em adquirir o produto.

O modelo mais simples de função de demanda é a função afim ou polinomial de primeiro grau. O modelo deve ter coeficiente angular negativo, isto é:

$$x = f(p) = a\,p + b, \quad a < 0.$$

Se $p = 0$, temos que $x = b$ é o número de unidades demandadas, quando o produto é grátis.

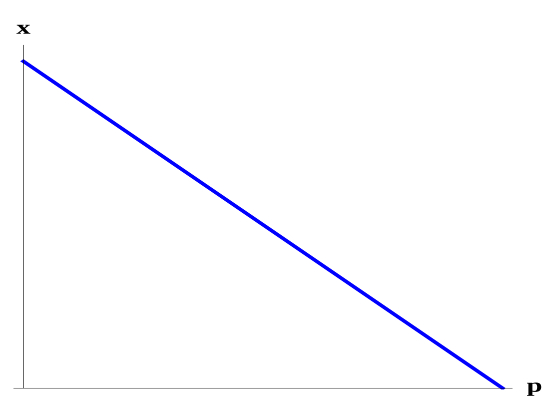


Figura 3.1: Modelo afim de demanda.

Definição 3.2. *A função inversa (se existe) da função de demanda é chamada* **função de preço** *e a denotamos por* $p = g(x)$.

Logo, o preço e a quantidade de um produto são inversamente proporcionais. Isto é, aumento de preço implica em uma diminuição de demanda, valendo a recíproca.

Se a função de demanda de um produto é afim, a função de preço é dada por:

$$p = g(x) = m\,x + r, \quad m < 0.$$

Se $x = 0$, temos que $p = r$ é o maior preço que os consumidores pagariam pelo produto.

Exemplo 3.1.

[1] Uma companhia ferroviária verificou que quando cobra 6 reais pela passagem, a média de passagens vendidas é de 720 e quando o preço é de 11 reais, a média de passagens vendidas é de 320. Ache a função de demanda, se ela for afim.

Como deve ser afim: $x = f(p) = a\,p + b$; logo, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} f(6) = 720 \\ f(11) = 320 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\,a + b = 720 \\ 11\,a + b = 320. \end{cases}$$

Temos que $a = -80$, $b = 1200$, Logo:

$$x = f(p) = -80\,p + 1200.$$

Note que $x \geq 0$ se, e somente se $0 \leq p \leq 15$.

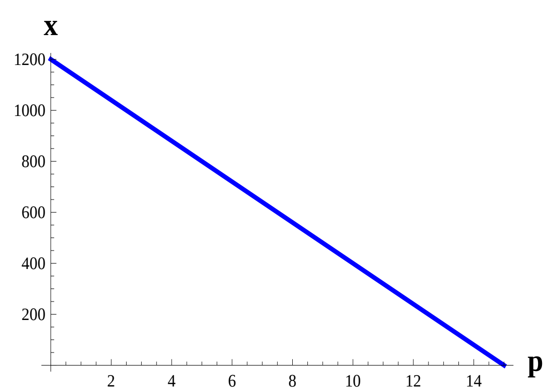


Figura 3.2: Curva de demanda do exemplo [1].

A função preço para esta demanda é:

$$p = -\frac{x}{80} + 15,$$

tal que $0 \leq x \leq 1200$.

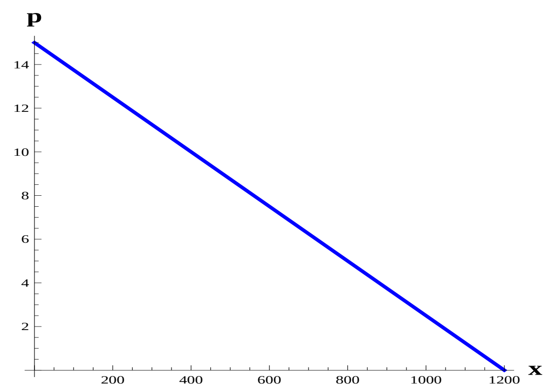


Figura 3.3: Curva de preço do exemplo [1].

[2] Uma fábrica de equipamentos eletrônicos vende uma quantidade x de artigos (em milhões) quando o preço é de p, reais por unidade. Se a relação que existe entre p e x é dada por:

$$x^2 - 2\,p\,x = p^2 + 25,$$

determine o número de artigos vendidos a 10 reais.

Resolvamos a equação de segundo grau $x^2 - 2\,p\,x - p^2 - 25 = 0$ para x, lembrando que a raiz negativa da equação, em Economia, não tem significado. Então:

$$x = f(p) = p + \sqrt{2\,p^2 + 25}.$$

Logo, $f(10) = 25$ milhões de artigos.

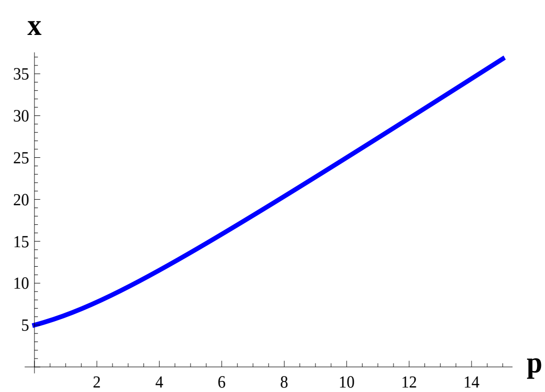


Figura 3.4: Curva de demanda do exemplo [2].

[3] Numa empresa, a venda de certo produto tem a seguinte função de demanda:

$$x = f(p) = 3.25 \times e^{-0.31p},$$

onde p é dado em milhões de reais e x em unidades/mês . Determine a função de preço.

Devemos calcular a função inversa de $x = 3.25 \times e^{-0.31p}$; então, aplicando logaritmo a ambos os lados, obtemos:

$$p = -\frac{1}{0.31}\,\big[ln(\frac{x}{3.25})\big], \quad x \in (0, 3.25).$$

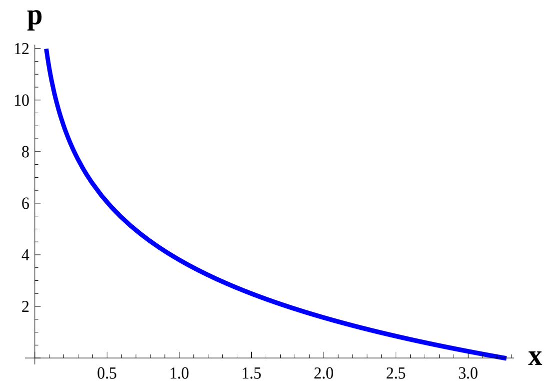


Figura 3.5: Curva de preço do exemplo [3].

3.3 Função de Oferta

A **oferta** é a relação entre o preço de um bem e a quantidade do mesmo que é oferecida pelos produtores. A lei de oferta diz: **se tudo permenecer constante, a oferta de um produto, durante um período de tempo, varia diretamente proporcional ao preço**.

A oferta de um produto depende essencialmente da quantidade, do preço e do custo do produto, da tecnologia com que se produz o produto, dos concorrentes, do clima, etc. Como antes, consideramos estas variáveis como constantes, exceto uma.

Definição 3.3. *Se denotamos por p o preço unitário de um produto e por x a quantidade do produto oferecido no mercado, então a função $p = f(x)$ que os relaciona é chamada* **função de oferta**.

A função de oferta define a relação que existe entre o preço de mercado de um produto ou bem e a quantidade desse mesmo produto ou bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender.

A função de oferta descreve o comportamento do produtor. O gráfico da função de oferta é chamado **curva de oferta**.

A função de oferta pode sofrer mudanças ou perturbações devido, essencialmente, a variações do preço das matérias primas, ao preço dos fatores de produção, aos preços de substitutos e dos fatores tecnológicos.

Uma curva de oferta típica tem forma ascendente, porque quanto maior o preço unitário, maior o interesse dos empresários em fabricar o produto.

O modelo mais simples de função de oferta é o de função afim ou polinomial de primeiro grau.

É bastante intuitivo que quando o preço de um bem aumenta, a oferta aumenta e decresce se o preço decresce. Logo, o modelo afim deve ter coeficiente angular não negativo, isto é:

$$p = f(x) = a\,x + b, \quad a \geq 0.$$

O caso $a = 0$, indica um preço constante independente da oferta. Se a reta for vertical, isto é, se o coeficiente angular não é definido, isto implica em que a oferta é constante, independente do preço.

Exemplo 3.2.

[1] Quando o preço de mercado de certo produto atinge US$ 300 por unidade, a fábrica não produz este produto; quando o preço do produto aumenta US$ 20 a fábrica disponibiliza 600 unidades do produto no mercado. Ache a função de oferta se ela for afim.

Como a função deve ser afim: $p = f(x) = a\,x + b$; para $x = 0$, temos que $300 = b$ e $p = a\,x + 300$; por outro lado, $300 + 20 = 600\,a + 300$, logo $a = \dfrac{1}{30}$; então a curva de oferta é:

$$p(x) = \frac{x}{30} + 300.$$

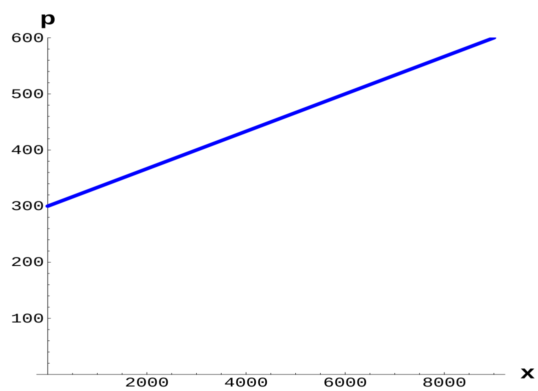


Figura 3.6: Curva de oferta.

[2] Numa empresa a relação entre o preço p em reais e a quantidade x de unidades de certo produto é $x = p^2 - p - 6$. Determine a partir de que preço haverá oferta? A que preço a oferta será de 24 unidades. A partir de que preço a oferta será superior a 14 unidades? Qundo a oferta ficará entre 14 e 66 unidades?

A empresa tera oferta se $x > 0$, isto é $p^2 - p - 6 = (p - 3)\,(p + 2) > 0$; sendo $p > 0$, então, temos que $p > 3$. Por outro lado, temos que

$$24 = p^2 - p - 6 \Longrightarrow (p - 6)\,(p + 5) = 0 \Longrightarrow p = R\$\,6.00$$

Agora resolvemos $p^2 - p - 6 > 14$; como $p > 0$, então $p > 5$. Finalmente, resolvemos:

$$14 < p^2 - p - 6 < 66 \Longrightarrow 5 < p < 9.$$

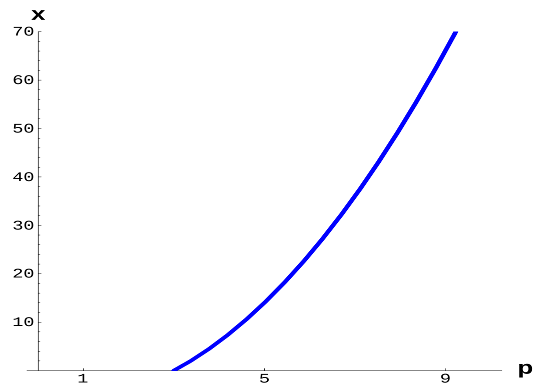


Figura 3.7: Curva de oferta.

3.4 Função Custo Total

O custo para produzir certo produto ou serviço pode ser subdividido em custo fixo e custo variável. Os custos fixos são associados ao gasto da empresa decorrente de produzir ou não um produto, isto é, independem da quantidade produzida; por exemplo, o aluguel e certo tipo de imposto. O custo variável é o que muda de acordo com o volume de produção, isto é, os custos são igual a zero quando não existe produção.

Definição 3.4. *A* **função custo total** *representa o custo final para produzir x unidades de um certo produto.*

Denotemos por $C = C(x)$, a função custo total de uma empresa. Esta função tem duas componentes, a saber, o custo variável que representa os gastos em matéria prima, mão de obra, entre outros, e o custo fixo. Se a quantidade de unidades produzidas for zero, temos que $C(0) \geq 0$. Quando $C(0) \neq 0$, então $C(0)$ representa o custo fixo de produção. O domínio desta função é determinado pelo produtor, considerando a quantidade máxima que pode produzir.

Custo Médio

Seja $C = C(x)$, a função custo total de uma empresa. A **função custo médio** é denotada e definida por:

$$CM_e(x) = \frac{C(x)}{x}, \quad x > 0,$$

isto é, o custo total dividido pela quantidade produzida. Esta função representa o custo para produzir uma unidade do produto.

Exemplo 3.3.

[1] Uma empresa para produzir x unidades de um certo tipo de produto tem como função de custo total $C(x) = 2\,x^4 + 12\,x^3 + 9\,x + 30$. Determine as funções de custo fixo, custo variável e custo médio. Calcule o custo para fabricar 10 unidades.

Primeiramente escrevamos $C(x) = \big[2\,x^4 + 12\,x^3 + 9\,x\big] + 30$, logo: o custo fixo é de $30\,u.\,m.$ e o custo variável é $2\,x^4 + 12\,x^3 + 9\,x$. Da definição, temos que o custo médio é:

$$CM_e(x) = 2\,x^3 + 12\,x^2 + 9 + \frac{30}{x}, \quad x > 0.$$

e o custo para fabricar 10 unidades é de $C(10) = 32120\,u.\,m.$

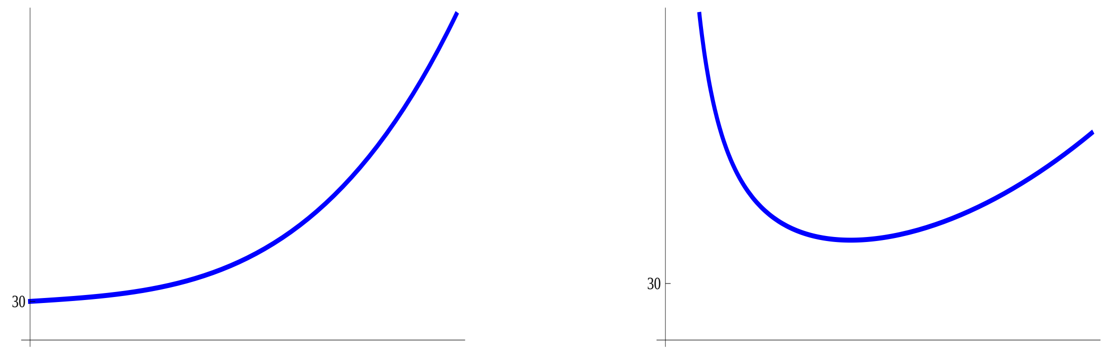


Figura 3.8: Gráficos de C e de CM_e, respectivamente.

[2] Uma empresa de distribuição de combustíveis necessita adquirir um caminhão tanque ao custo de 50000 u. m. Estima-se que o custo operacional do caminhão é de $2\ u.\,m.$ por quilômetro rodado e que pode percorrer 100000 km antes da primeira revisão. Ache a função custo total se ela for afim.

Se x é o número de quilômetros percorrido pelo caminhão, $2\,x$ representa o custo variável e 50000 o custo fixo. Então:

$$C(x) = 2\,x + 50000, \quad x \in (0, 50000).$$

Logo o custo médio é:

$$CM_e(x) = 2 + \frac{50000}{x}, \quad x \in (0, 50000),$$

que representa o custo do caminhão por quilômetro percorrido.

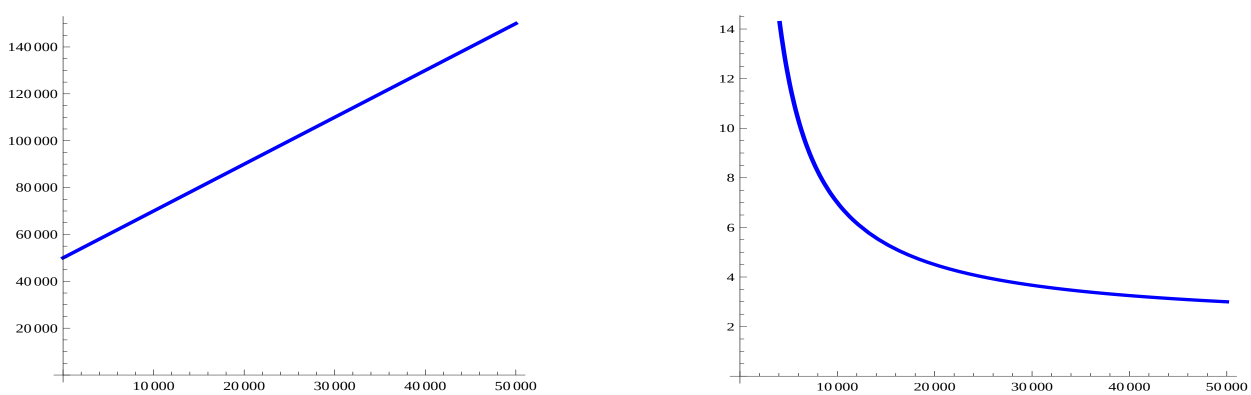


Figura 3.9: Gráficos de C e de CM_e, respectivamente.

3.5 Função Receita Total

A **receita total** é a quantidade total paga pelos compradores aos vendedores por um certo bem.

Definição 3.5. *A* **função receita total** *de uma empresa é todo o dinheiro que recebe pela venda de seus produtos e/ou serviços.*

Logo, a função receita total de uma empresa é o produto da quantidade do produto que é vendido pelo preço unitário do produto. Se $p = f(x)$ é uma função de preço, então a função receita total é dada por:

$$R(x) = x\,f(x),$$

onde o preço de venda ou do serviço varia segundo o número de unidades vendidas. Da definição segue que a função receita total depende da função de oferta, a qual depende do número de unidades vendidas; logo, a receita total depende do número de unidades vendidas.

Se $x > 0$, então:

$$\frac{R(x)}{x} = f(x),$$

é a **receita média** por unidade, que é igual à oferta por unidade.

Exemplo 3.4.

Uma montadora de carros tem como função de receita total $R(x) = 5\,x - 3\,x^2$ para um certo tipo de carro. Ache a função da oferta e esboce ambos os gráficos.

Como $R(x) = 5\,x - 3\,x^2 = x\,(5 - 3\,x)$, temos que $p = 5 - 3\,x$ é a função da oferta da montadora.

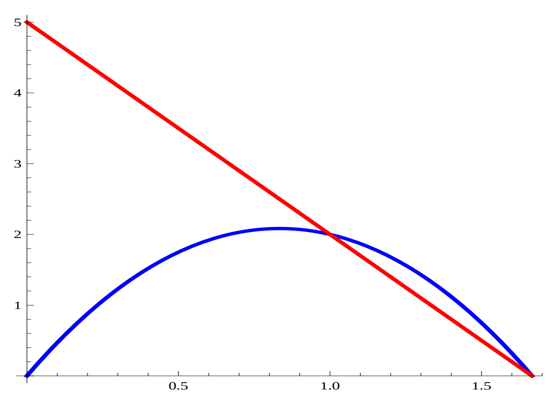


Figura 3.10: Curva da receita (azul) e de oferta (vermelho).

3.6 Função de Lucro

O **lucro** é a relação entre os benefícios de uma empresa e a quantidade de bens e/ou serviços que esta produz.

Definição 3.6. *A* **função lucro** *é a quantidade de dinheiro que uma empresa obtem por produzir e vender uma certa quantidade de bens e/ou serviços.*

Sejam $C = C(x)$ a função custo e $R = R(x)$ a receita de uma empresa. Se denotarmos por $L = L(x)$ a função lucro, então

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

Se $R(x) > C(x)$, temos $L(x) > 0$; analogamente se, $R(x) < C(x)$, então $L(x) < 0$, isto é, uma empresa só tem lucro se os custos totais não ultrapassam a receita total de produção.
Definimos a função de **lucro médio**, para $x > 0$:

$$LMe(x) = \frac{L(x)}{x}.$$

O lucro médio representa o ganho obtido em produzir e vender uma unidade do produto. Os pontos de interseção dos gráficos das funções de custo e da receita são chamados **de nivelamento**, isto é, a quantidade mínima que a empresa pode produzir para a receita igualar-se à despesa.

Exemplo 3.5.

[1] Um laboratório farmacêutico tem um novo medicamento que deseja colocar no mercado. Estudos de mercado indicam que a demanda anual do produto depende essencialmente do preço. Estimou-se que a função de demanda para produzir este remédio é $x + 500\,p = 250000$, onde p é dado em US$ e x é a quantidade de caixas. Por outro lado, o custo de produção deste remédio é $C(x) = 300000 - 300\,x - 0.25\,x^2$. Determine a função lucro. Qual é o lucro se vender 1000 caixas do remédio?

Primeiramente calculemos $R(x) = x\,f(x)$, onde $p = f(x)$ é a função preço, então:

$$p = -\frac{x}{500} + 500 \Longrightarrow R(x) = 500\,x - \frac{x^2}{500} \Longrightarrow L(x) = 0.248\,x^2 + 800\,x - 300000.$$

Logo, $L(1000) = 748000$ dólares.

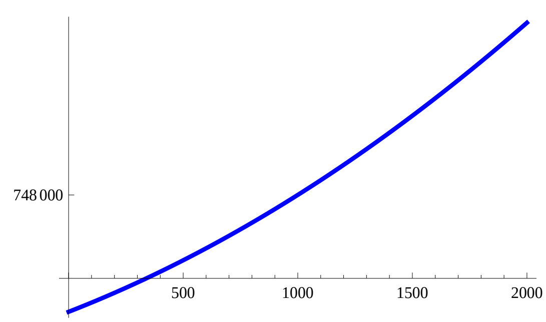


Figura 3.11: Gráfico da função lucro.

[2] Uma fábrica de circuitos para telefones celulares tem custo fixo para funcionar de US$ 100000 e um custo de US$ 4 para produzir cada unidade, que são vendidas a um preço de US$ 8 por unidade. Determine as funções custo, custo médio, receita e lucro da fábrica. Calcule cada uma das funções obtidas, para 10000 unidades. Quando a fábrica terá lucro?

Observamos que o custo para produzir x unidades do produto é de $US\$\,4\,x$, então a função custo total é $C(x) = 4\,x + 100000$. Logo:

$$CM_e(x) = \frac{100000}{x} + 4, \quad R(x) = 8\,x \quad \text{e} \quad L(x) = 4\,x - 100000.$$

Calculemos as funções:

$C(10000) = 140000$, o custo para fabricar 10000 unidades
$CM_e(10000) = 14$, o custo médio para fabricar 1 unidade
$R(10000) = 80000$, a receita total da venda de 10000 unidades
$L(10000) = -60000$, resultado da venda de 10000 unidades.

A fábrica terá lucro se $L(x) \geq 0$, isto é, $4\,x - 100000 \geq 0$, ou seja, se $x \geq 25000$. Logo, a fábrica terá lucro se fabricar mais de 25000 circuitos.

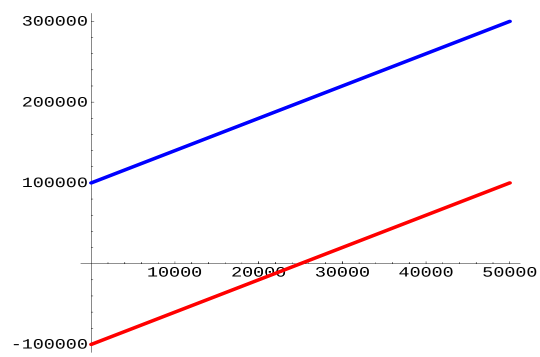


Figura 3.12: Gráficos do custo e do lucro.

[3] Uma empresa pode vender um determinado artigo a um certo preço unitário. Se o custo de produção é dado por $C(x) = 90\,x^2 + 900$ e a receita é $R(x) = 18\,x^4$, determine o lucro, o lucro médio e ponto de nivelamento da empresa. Esboce seus gráficos.

Determinemos o ponto de nivelamento, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 90\,x^2 + 900 \\ y = 18\,x^4. \end{cases}$$

Subtraindo, obtemos $18\,x^4 - 90\,x^2 - 900 = 18\,(x^2 - 10)\,(x^2 + 5) = 0$; logo temos a raiz real positiva $x = \sqrt{10}$ e, portanto, $y = 1800$. O ponto de nivelamento é $(\sqrt{10}, 1800)$. Por definição:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 18\,x^4 - 90\,x^2 - 900,$$
$$LM(x) = \frac{L(x)}{x} = 18\,x^3 - 90\,x - \frac{900}{x}.$$

Note que $L(x) = 18\,(x^2 - 10)\,(x^2 + 5)$; logo, $L(x) \geq 0$ se, e somente se $x \in [\sqrt{10}, +\infty)$

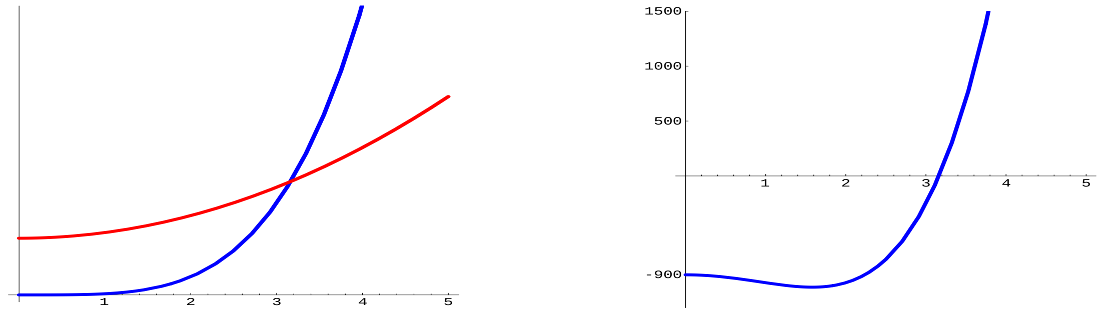


Figura 3.13: Gráficos da receita (azul), do custo (vermelho) e do lucro , respectivamente.

[4] Uma empresa que produz componentes eletrônicos para sistemas de injeção eletrônica de carros, tem funções de custo total $C(x) = 10\,x + 8$ e de receita $R(x) = -2\,x^2 + 25\,x + 1$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto. Calcule os pontos de nivelamento. Quando a empresa tem e não tem lucro por produzir estes componentes?

Primeiramente observamos que $R(x) \geq 0$ se $0 \leq x \leq 12.539$. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 10\,x + 8 \\ y = -2\,x^2 + 25\,x + 1, \end{cases}$$

obtemos os pontos de nivelamento: $(0.5, 13)$ e $(7, 78)$. Diretamente da definição do lucro, temos que $L(x) = -2\,x^2 + 15\,x - 7 = (x - 7)(1 - 2\,x)$, então

$$\begin{aligned} L(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in (0.5, 7) \\ L(x) < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in (0, 0.5) \cup (7, +\infty). \end{aligned}$$

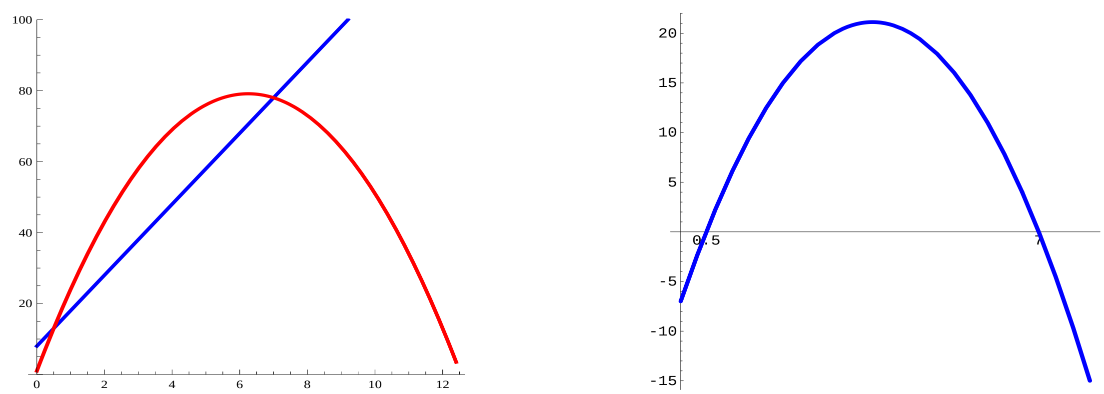


Figura 3.14: Gráficos de C, R e L, respectivamente.

[5] Uma empresa que produz softwares para segurança de imóveis tem como função de custo total $C(x) = x^2 + 5\,x + 10$ e de demanda $x = f(p) = 100 - 5\,p$. É possível determinar o lucro máximo da empresa?

Primeiramente escrevemos $p = 20 - \dfrac{x}{5}$, então $R(x) = 20\,x - \dfrac{x^2}{5}$ e:

$$L(x) = -\frac{6\,x^2}{5} + 15\,x - 10.$$

Logo, $L = L(x)$ é uma função quadrática. Portanto, como o coefiente de x^2 é negativo, o ponto de maior altura da parábola é o vértice:

$$\Big(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\Big) = (6.25, 36.87).$$

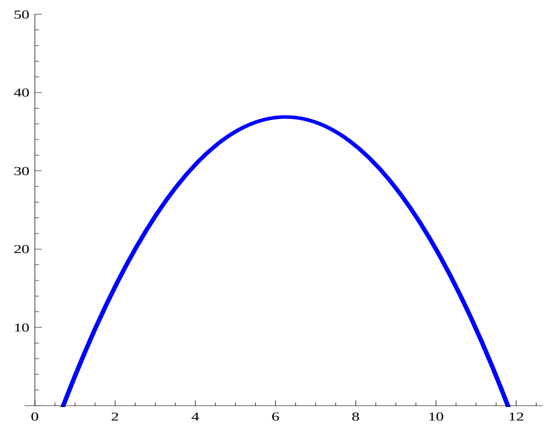


Figura 3.15: Gráfico de L.

3.7 Função de Produção

A **produção** é a relação entre a quantidade de fatores utilizados para produzir um bem e a quantidade total produzida deste bem.

São chamados fatores de produção os bens e/ou serviços que podem ser transformados em produção. A produção é a transformação dos fatores de produção da empresa para a venda no mercado.

São chamados fatores fixos de produção as quantidades que envolvem a produção e que não podem ser modificadas rapidamente, por exemplo, o prédio onde se efetua a produção. Os fatores variáveis de produção são os que podem ser modificados rapidamente no processo produtivo, por exemplo, a energia elétrica utilizada na produção

Definição 3.7. *A* **função de produção** *indica qual a quantidade máxima de produto que pode ser produzida, dada uma determinada quantidade de fatores produtivos e uma determinada tecnologia.*

Se denotamos por q a quantidade de insumos utilizados por uma empresa para produzir um determinado produto e por y a quantidade de produtos que pode produzir com a quantidade q de insumos, a função de produção será denotada por $y = P(q)$.

Este conceito pode ser aplicado a um produto ou a um serviço, a uma empresa, a um setor de atividade, ou mesmo a toda uma economia. O gráfico da função de produção é chamado **curva de produção**.

Exemplo 3.6.

[1] Uma fábrica produz um número y de um determinado produto em função da quantidade de trabalho q, medida em homens/hora. A relação entre estas duas quantidades é dada pela função $y = P(q) = 32\,q$, onde $0 \le q \le 8$. Que quantidade destes bens é produzida por 5.5 homens/hora? Quantos homens/hora são necessários para produzir 96 unidades do produto?

Primeiramente calculamos $P(5.5) = 32 \times 5.5 = 176$ unidades. Por outro lado, temos que $96 = 32\,q$; então $q = 3$ homens/hora.

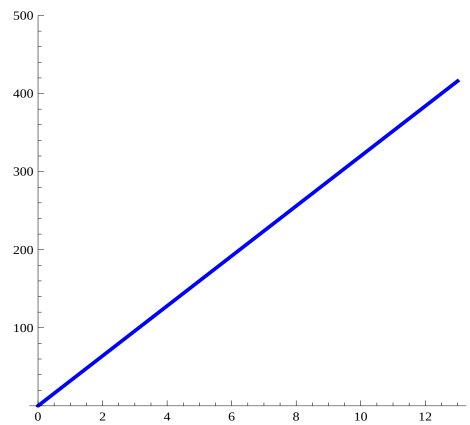


Figura 3.16: Curva de produção.

[2] Uma usina produz dois tipos de aço: A_1 e A_2. O lucro que representa para a usina a venda de cada tipo de aço é dado, respectivamente por:

$$L_1(x) = 360\,x - 500 \quad \text{e} \quad L_2(x) = 400\,x - 1500.$$

Para produzir ambos os tipos de aço é utilizada a mesma matéria prima e as funções de produção associadas a cada tipo de aço, são:

$$P_1(q) = 2.4\,q \quad \text{e} \quad P_2(q) = 3.2\,q,$$

onde $0 \le q \le 100$ (q em toneladas de ferro). Se a usina possui 60 toneladas de ferro, que tipo de aço a usina deve produzir?

Para produzir 60 toneladas de A_1, temos

$$L_1(P_1(q)) = 864\,q - 500; \quad \text{então} \quad L_1(P_1(60)) = 51340.$$

Para produzir 60 toneladas de A_2, temos

$$L_2(P_2(q)) = 1280\,q - 1500, \quad \text{então} \quad L_2(P_2(60)) = 75300.$$

Logo, a produção de aço A_2 dará maior lucro à usina.

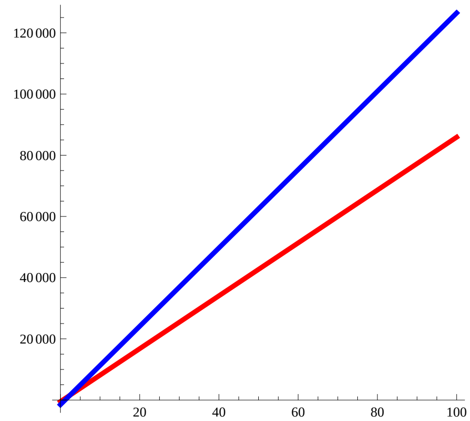


Figura 3.17: Lucro de A_1 (vermelho) e A_2 (azul).

3.8 Equilíbrio da Oferta e da Demanda

Em geral, o equilíbrio é relativo às condições do mercado que tendem a persistir. Se a determinado preço, as quantidades de produtos que o produtor deseja vender se igualam às quantidades que os consumidores desejam comprar, diz-se que o mercado está em equilíbrio.

Definição 3.8. O equilíbrio de mercado *ocorre na interseção das curvas de demanda e de oferta.*

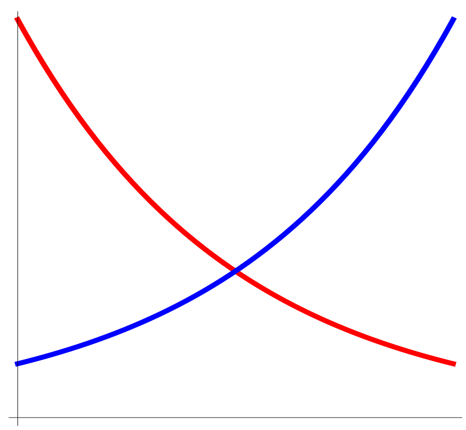


Figura 3.18: Equilíbrio de demanda (vermelho) e de oferta (azul).

Isto é, nos pontos que representam os preços, a quantidade ofertada se iguala à quantidade demandada.

O ponto de interseção é dito **ponto de equilíbrio do mercado**; a ordenada do ponto é dita **preço de equilíbrio do mercado** e a abscissa do ponto é dita **quantidade de equilíbrio do mercado**.

Em mercados perfeitamente competitivos, se o preço de mercado de um produto está acima do preço de equilíbrio, temos excesso de oferta, o que deve fazer abaixar os preços.

Quando o preço de mercado de um produto está abaixo do preço de equilíbrio, temos excesso de demanda, o que eleva os preços do produto.

Interpretação Geométrica do Equilíbrio de Mercado

Considere o seguinte gráfico, formado pelas curvas de demanda e de oferta:

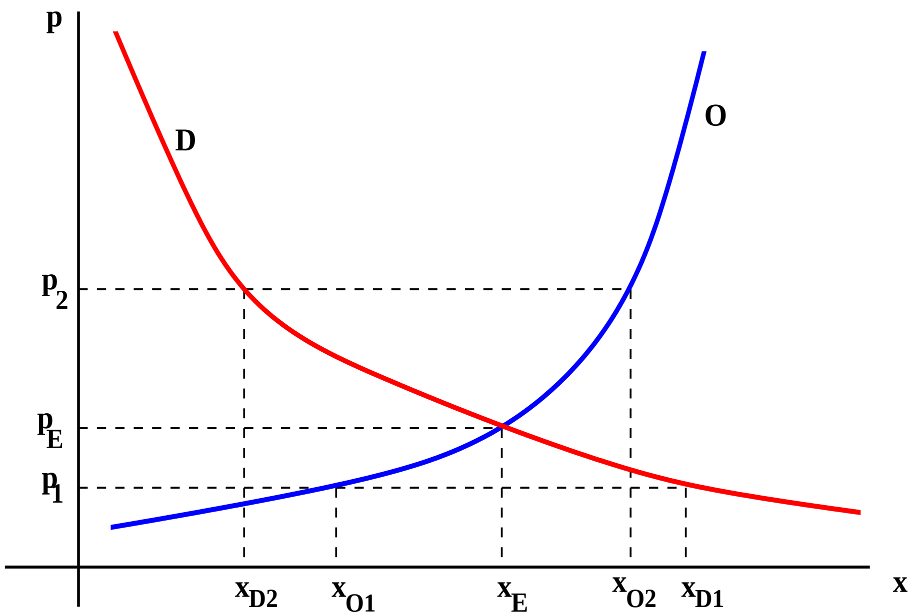


Figura 3.19: Equilíbrio de demanda (vermelho) e de oferta (azul).

Denotemos por (x_E, p_E) o ponto de equilíbrio do mercado.

Se o preço do produto em questão for $p_1 < p_E$, então a empresa espera vender x_{O1} unidades e os consumidores planejam comprar x_{D1} unidades do produto; logo estariam faltando $x_{D1} - x_{O1}$ unidades aos consumidores, o que forçaria o aumento de preço do produto até, p_E, onde seriam oferecidas x_E unidades.

Se o preço do produto em questão for $p_E < p_2$, então a empresa espera vender x_{O2} unidades e os consumidores planejam comprar x_{D2} unidades do produto; logo estariam sobrando a quantidade $x_{O2} - x_{D2}$ de unidades, o que forçaria a queda do preço do produto, até p_E, onde seriam oferecidas x_E unidades.

Com a passagem do tempo é possível provar que desequilíbrios entre a oferta e a demanda são corrigidos e tendem a aproximar-se do equilíbrio. De fato, o preço tem um efeito regulador, isto é, cada vez que se tem um excesso de oferta segue uma escassez de oferta, e vice-versa.

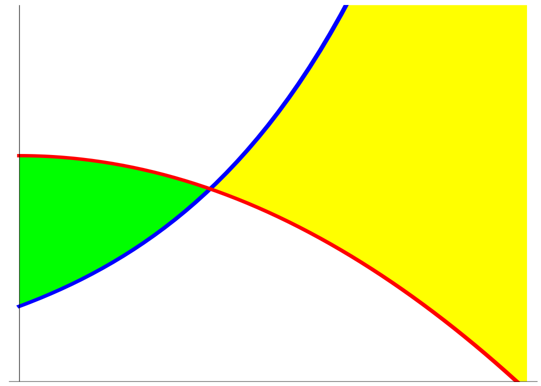


Figura 3.20: Equilíbrio da oferta e da demenda. Zona de escassez em verde e do exesso em amarelo.

3.8.1 Equilíbrio Linear

É comum utilizar função de demanda e função de oferta, afins. Neste caso, a determinação do equilíbrio é bastante simples, pois basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} x &= -a\,p + b \\ x &= c\,p + d, \quad a,\, c > 0. \end{cases}$$

A solução do sistema é:

$$p_E = \frac{b-d}{a+c} \quad \text{e} \quad x_E = \frac{a\,d + b\,c}{a+c}.$$

O ponto de equilíbrio é (x_E, p_E).

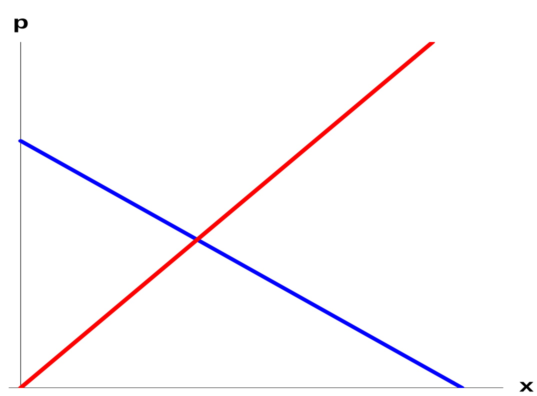


Figura 3.21: Equilíbrio Linear.

3.9 Equilíbrio do Custo e da Receita

De forma análoga ao equilíbrio da oferta e da demanda podemos tratar o do custo e o da receita.

Suponhamos que um empresário deseja saber quantas unidades de um certo produto terá que vender para que a receita das vendas seja igual ao custo para produzir o produto, isto é, quando não terá prejuízo.

Sejam $C = C(x)$ e $R = R(x)$ as funções de custo e da receita para x unidades do produto vendidas. Inicialmente, devido aos custos fixos a curva do custo está acima da curva da receita. Para pouca produção a empresa tem prejuízo. Por outro lado, para uma elevada produção a curva do custo está abaixo da curva da receita, logo a empresa tem lucro.

Definição 3.9. **O equilíbrio** *do custo e da receita ocorre na interseção das curvas do custo e da receita.*

O ponto de equilíbrio é exatamente onde a empresa não tem lucro e nem prejuízo.

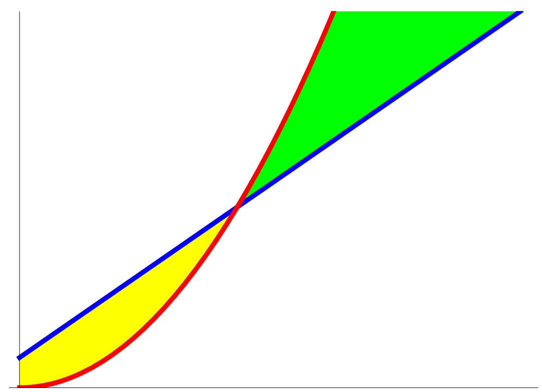


Figura 3.22: Equilíbrio da receita (vermelho) e do custo (azul).

A região amarela no desenho corresponde ao prejuízo da empresa e a região verde corresponde ao lucro obtido pela empresa.

Exemplo 3.7.

[1] A demanda de um certo produto é dada por $x = 36 - 4\,p$ e a oferta por $x = 30 + 2\,p$.

(a) Determine o preço de equilíbrio e a repectiva quantidade.

(b) Se o preço for 4 u. m., existe excesso de oferta ou de demanda? Determine o excesso.

(a) Pelo visto anteriormente:

$$p_E = 1 \quad \text{e} \quad x_E = 32.$$

(b) Para um preço de $p = 4$, a quantidade demandada é: $x = 36 - 16 = 20$ e a quantidade ofertada é $x = 30 + 8 = 38$; então, existe um excesso de oferta de $38 - 20 = 18$.

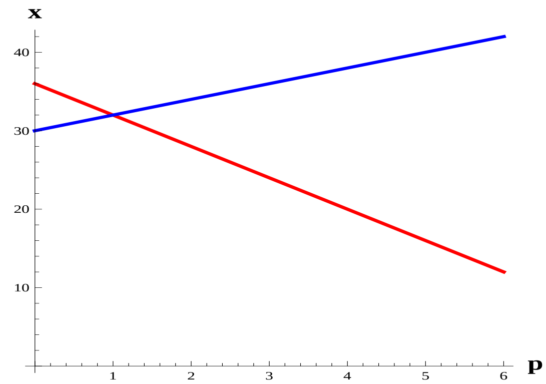


Figura 3.23: Equilíbrio de demanda (vermelho) e de oferta (azul).

[2] A demanda e a oferta de um certo produto fabricado por uma empresa são dadas pelas seguintes equações:

$$x^2 + p^2 - 25 = 0 \quad \text{e} \quad p^2 - 8\,x + 8 = 0,$$

(a) Ache o ponto de equilíbrio.

(b) Se o preço for 2 u. m., existe excesso de oferta ou de demanda. Determine o excesso.

(a) Devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + p^2 - 25 = 0 \\ p^2 - 8\,x + 8 = 0. \end{cases}$$

Obtemos $p = 4$ e $x = 3$ e o ponto de equilíbrio é $(4, 3)$. Note que a função de demanda é dada por $x = \sqrt{25 - p^2}$, $0 \leq p \leq 5$.

(b) Para um preço de $p = 2$, a quantidade demandada é: $x^2 = 25 - 4 = 21$, isto é, $x = \sqrt{21}$ e a quantidade ofertada é $\dfrac{3}{2}$, então existe falta de oferta igual a $\sqrt{21} - \dfrac{3}{2} \cong 3.08$.

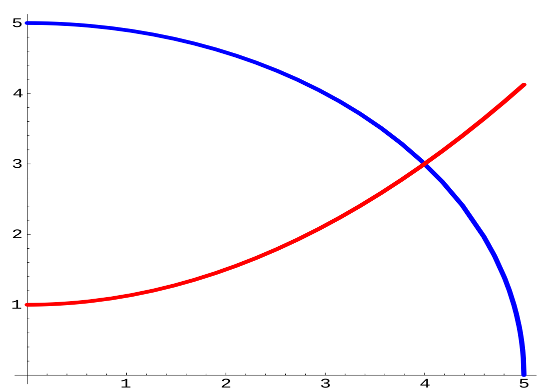


Figura 3.24: Equilíbrio de demanda (vermelho) e de oferta (azul).

[3] Se a oferta e a demanda de um certo produto fabricado por uma empresa são dadas pelas seguintes equações:

$$3\,x^2 - 6\,x + p - 8 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - p + 4 = 0,$$

ache o ponto de equilíbrio.

Devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3\,x^2 - 6\,x + p - 8 = 0 \\ x^2 - p + 4 = 0. \end{cases}$$

Obtemos $p = 8$ e $x = 2$ e o ponto de equilíbrio é $(8, 2)$. Note qua a função demanda é dada por $x = \sqrt{p-4}$, $4 \le p$.

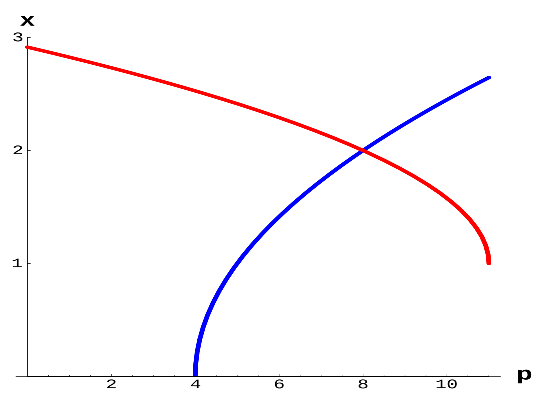


Figura 3.25: Equilíbrio de demanda (vermelho) e de oferta (azul).

[4] Uma empresa que produz componentes eletrônicos para sistemas de injeção eletrônica de carros, tem funções de custo total $C(x) = 10\,x + 12$ e de receita $R(x) = 2\,x^2$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto.

(a) Quantos componentes devem ser vendidos para que a empresa não tenha prejuízo?

(b) Se são produzidas 12 unidades do produto a empresa tem lucro?

(a) Devemos resolver:

$$C(x) = R(x) \Longleftrightarrow 10\,x + 12 = 2\,x^2 \Longleftrightarrow x = 6.$$

A empresa deve vender 6 unidades do produto para não ter prejuízo.

(b) Como foram produzidas 12 unidades do produto a empresa tem lucro:

$$L(x) = R(x) - C(x) \Longleftrightarrow L(12) = R(12) - C(12) = 156\,u.m.$$

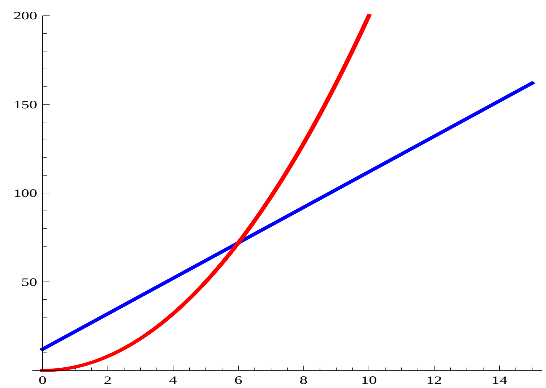


Figura 3.26: Equilíbrio da receita (vermelho) e do custo (azul).

3.10 Cálculo de Juros Compostos

Se uma quantia inicial A_0 em dinheiro for investida a uma taxa de juros compostos de $r\%$, m vezes ao ano, o montante do investimento, após t anos será dado por:

$$A(t) = A_0 \left[1 + \frac{r}{m}\right]^{mt}.$$

A taxa anual de juros de uma aplicação financeira é chamada **taxa nominal**. A capitalização dos juros da aplicação é chamada **taxa efetiva**, que em geral, é sempre menor do que a taxa nominal. A relação entre estas taxas é:

$$r_{ef} = \left[1 + \frac{r}{m}\right]^{m} - 1.$$

3.10.1 Desconto

O conceito de desconto é complementar ao de juros compostos. De fato, num problema de juros compostos, procuramos determinar o valor futuro A de um montante A_0, do presente. O problema de descontar é inverso ao anterior, isto é, achar o valor A_0 a partir de um montante A que poderá estar diponível daqui a t anos. Então, o valor atual da quantia:

$$A_0 = \frac{A}{\left[1 + \frac{r}{m}\right]^{mt}} = A\left[1 + \frac{r}{m}\right]^{-mt}.$$

Exemplo 3.8.

[1] Se 1000 reais são investidos a uma taxa de juros compostos de 7% ao ano, qual é o montante acumulado após 5 anos, se os juros forem capitalizados semestralmente?

Temos que $A_0 = 1000$, $m = 2$ e $r = 0.07$, então:

$$A(t) = 1000 \left[1 + \frac{0.07}{2}\right]^{2t},$$

logo $A(5) \cong 1410.59$ reais. A taxa efetiva é $r_{ef} = 7.12\%$ ao ano.

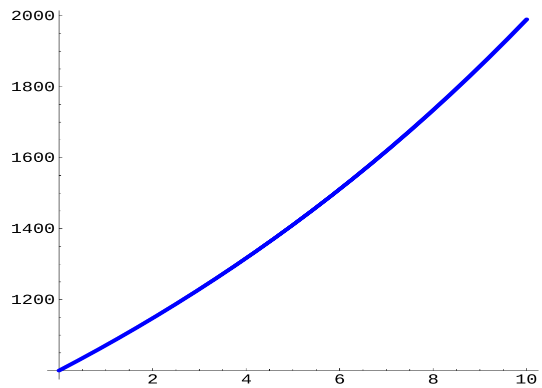


Figura 3.27: Evolução dos juros.

Note que se queremos determinar o montante acumulado após t anos, se os juros forem capitalizados mensalmente, devemos calcular:

$$A(12) = 1000 \left[1 + \frac{0.07}{2}\right]^{24} \cong 2283.33.$$

[2] Se 20000 reais são investidos a uma taxa de juros compostos de $r\%$ ao ano e se 1000000 reais é o montante acumulado após 10 anos, determine os juros, se forem capitalizados semestralmente?

Temos que determinar r, onde

$$20000 \left[1 + \frac{r}{2}\right]^{20} = 1000000,$$

logo $r = 43.2\%$ reais. A taxa efetiva é $r_{ef} = 47.8\%$ ao ano.

3.11 Demografia: Modelos Populacionais

A função de população total definida num certo conjunto de indivíduos que integram uma população determina a evolução no tempo das variações desta população. Existem diversos modelos para determinar esta evolução. Estudaremos os mais simples.

Uma função de população bastante simples é a definida por:

$$N(t) = N_0(1 + i)^t, \tag{3.1}$$

onde N_0 é a população inicial que se incrementa numa taxa anual de $i\%$. Note que $N(0) = N_0$.

Exemplo 3.9.

Ao redor de um garimpo se estabelece uma população inicial de 150 habitantes que cresce a uma taxa anual de 6%. Se este crescimento da população cresce segundo (3.1), determine a população após 10 anos.

Como $i = 0.06$, temos: $N(t) = 150\,(1 + 0.06)^t = 150\,(1.06)^t$, logo $N(10) = 268.62$, isto é, aproximadamente, 268 pessoas.

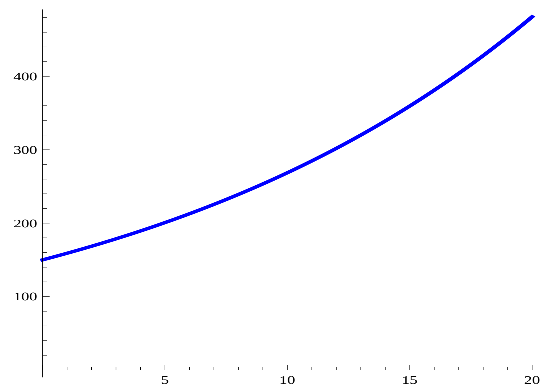


Figura 3.28: Evolução da população.

3.12 Crescimento e Decrescimento Exponencial

Um modelo para estudar populações, um pouco mais complexo que o anterior, é o chamado modelo exponencial.

Diz-se que uma quantidade experimenta um crescimento exponencial quando cresce de acordo com a lei:

$$Q(t) = Q_0\, e^{kt}, \tag{3.2}$$

onde $Q_0,\ k > 0$. $Q(0) = Q_0$ é dito o valor inicial. Este modelo se aplica em diversas situações interessantes.

Exemplo 3.10.

[1] Projeta-se que em t anos, a população de um estado será de $P(t) = 10\,e^{0.02t}$ milhões de habitantes. Qual é a população atual? Qual será a população em 20 anos, se a população continuar crescendo nesta proporção?

A população atual é $P(0) = 10$ milhões de habitantes e $P(20) = 10\,e^{0.4} \cong 14.918$ milhões de habitantes .

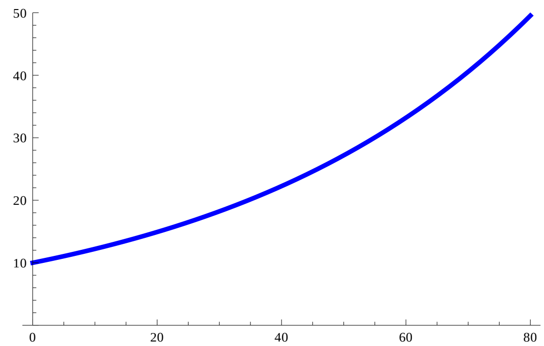


Figura 3.29: Gráfico de [1].

[2] Biólogos determinaram que em condições ideais uma colônia de bactérias cresce exponencialmente. Se, inicialmente existem 3000 bactérias e após 30 minutos estão presentes 9000, quantas bactérias estarão presentes após uma hora?

Note que:

$$Q(t) = 3000\, e^{kt},$$

pois $Q(0) = 3000$; por outro lado $9000 = Q(30) = 3000\, e^{30k}$ e $e^{30k} = 3$. Logo,

$$Q(60) = 3000\, e^{60k} = 3000\, \left(e^{30k}\right)^2 = 3000 \times 9 = 27000 \quad \text{bactérias.}$$

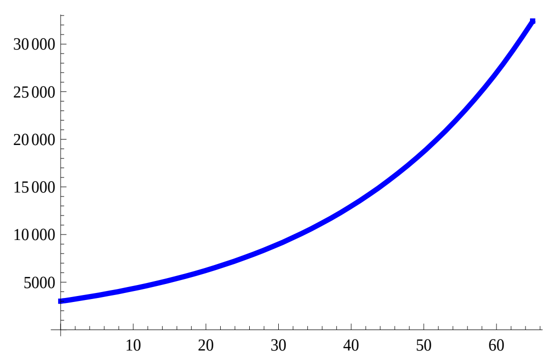


Figura 3.30: Gráfico de [2].

Uma quantidade que decresce de acordo com a lei $Q(t) = Q_0\, e^{-kt}$; $Q_0,\ k > 0$ é dita que experimenta um decrescimento exponencial com valor inicial $Q(0) = Q_0$.

[3] Se o índice anual de inflação permanecer constante em 5% durante os próximos 10 anos, o custo de um serviço em qualquer ano da década será dado, aproximadamente por:

$$I(t) = c\,(1.05)^t, \quad t \in [0, 10],$$

onde t é o tempo, em anos, e c é o custo atual do serviço. Se o preço atual de uma entrada de cinema é 15 reais, qual deverá ser o preço da mesma entrada daqui a 10 anos?

O preço será dado por: $I(10) = 15\,(1.05)^{10} \cong 24.43$ reais.

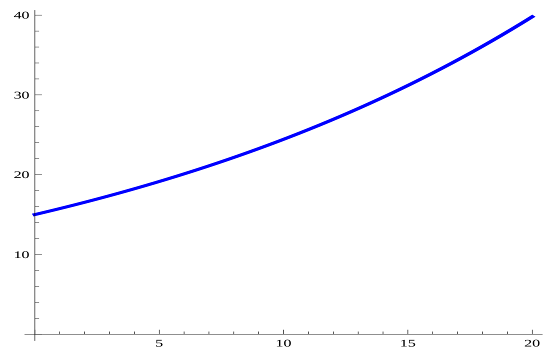


Figura 3.31: Gráfico de [3].

[4] O produto interno bruto (PIB) de um certo país era de 100 bilhões de dólares em 1990 e de 180 milhões de dólares no ano 2000. Supondo que o PIB tem um crescimento exponencial, qual será o seu valor no ano 2010?

Seja t o tempo, em anos, decorridos desde 1990 e denotemos por:

$$P(t) = A\,e^{kt}$$

o PIB; então $P(0) = A = 100$; logo: $P(t) = 100\,e^{kt}$, $180 = P(10) = 100\,e^{10k}$ e $k = \dfrac{ln(1.8)}{10}$. Podemos escrever:

$$P(t) = 100\,e^{\frac{ln(1.8)\,t}{10}} = 100\,e^{0.0587787\,t}.$$

$P(20) = 100\,e^{2\,ln(1.8)} = 100\,(1.8)^2 = 324$. Logo, o PIB no ano de 2010 será de 324 bilhões de dólares.

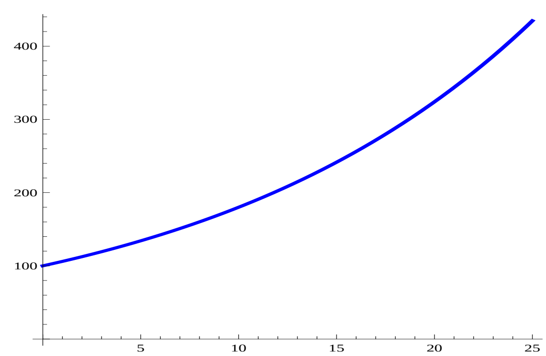


Figura 3.32: Gráfico de [4].

[5] Havendo uma recessão econômica, o lucro anual de uma empresa americana diminuiu de US$ 840.000, em 2003 para US$ 630.000 em 2005. Se o lucro segue um modelo exponencial de decaimento, qual é o lucro esperado em 2008?

Seja $L(t) = C\,e^{kt}$ o lucro, onde t é dado em anos; então, $840 = L(0) = C$ e $L(t) = 840\,e^{kt}$. Após dois anos: $630 = L(2) = 840\,e^{2k}$, donde $k = \dfrac{1}{2}\,ln(\dfrac{3}{4}) \cong -0.1438$. Logo:

$$L(t) = 840\,e^{-0.1438\,t}$$

e $L(5) = 840\,e^{5(-0.1438)} \cong 409.28$. O lucro esperado para 2008 é de US$ 409.280, aproximadamente.

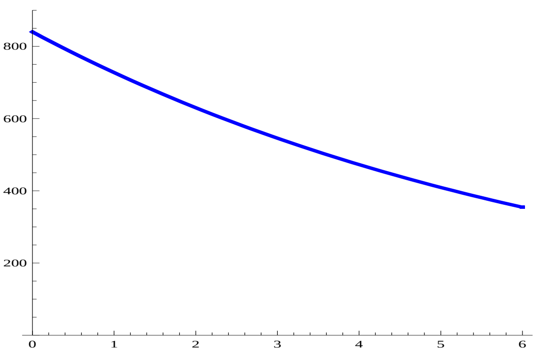


Figura 3.33: Gráfico de [5].

[6] Quando se estocam grãos, após certo tempo, os grãos se deterioram e a quantidade de grãos em condições de comercializar tem decaimento exponencial. Sabendo-se que inicialmente estão estocados 750 toneladas de grãos e após 3 anos tem-se 290 toneladas, determine a quantidade de grãos em condições de comercializar após 5 anos.

Seja $E(t) = C\,e^{kt}$ a função que representa a quantidade de grão em condições de comercializar, em toneladas, após t anos; então, $750 = E(0) = C$, logo:

$$E(t) = 750\,e^{kt} \Longrightarrow 290 = 750\,e^{3k} \Longrightarrow k \cong -0.316731.$$

Então:

$$E(t) = 750\,e^{-0.316731t}$$

e $E(5) = 153.9$ toneladas.

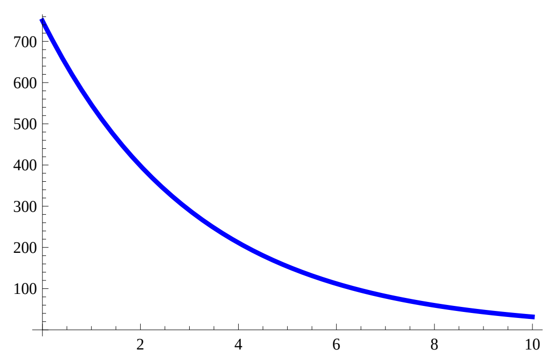


Figura 3.34: Gráfico de $E = E(t)$.

3.13 Função Logística

O modelo exponencial é interessante, pois é simples e serve como base para outros modelos mais complexos que estudam situações mais gerais. Por outro lado, crescimentos exponenciais não acontecem na natureza, pelo menos por tempo ilimitado. No entanto, durante breves intervalos de tempo populações crescem com este modelo. Observa-se que os níveis de natalidade de uma população diminui quando a população aumenta. Os motivos podem ser variados, como fatores sociais, econômicos ou suprimento limitado de alimentos e de espaço. A população eventualmente se estabilizaria num nível compatível com o que o meio ambiente pode suportar, sem a extinção da espécie. Um ótimo modelo para o estudo deste tipo de situação é a função logística, definida por:

$$L(t) = \frac{A}{1 + B\,e^{-Ct}},$$

onde A, B, e C são constantes positivas. Este modelo também é usado no estudo da propagação de epidemias, da propagação de doenças infecciosas e da propagação de boatos ou notícias.

Exemplo 3.11.

[1] Uma população de moscas drosófilas num ambiente limitado é dada por:

$$L_1(t) = \frac{400}{1 + 39\,e^{-0.4t}},$$

onde t denota o número de dias transcorridos. Qual é a população inicial? Qual é a população no $10^{\underline{o}}$ dia?
Note que inicialmente, temos $L_1(0) = 10$ moscas; $L_1(10) = 233.33$; aproximadamente, 233 moscas.

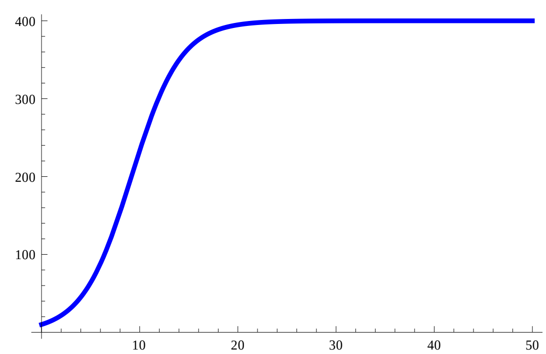


Figura 3.35: Gráfico de $L_1 = L_1(t)$.

[2] Durante uma epidemia de dengue, o número de pessoas que adoeceram após t dias, num certo bairro, é dado por:

$$L_2(t) = \frac{10000}{1 + 99\,e^{-0.2t}}.$$

Quantas pessoas ficaram doentes após o primeiro dia? Quantas pessoas ficaram doentes após 25 dias?
Note que inicialmente, temos $L_2(1) = 121.87$; aproximadamente 121 doentes e $L_2(25) = 5998.6$; aproximadamente, 5998 doentes.

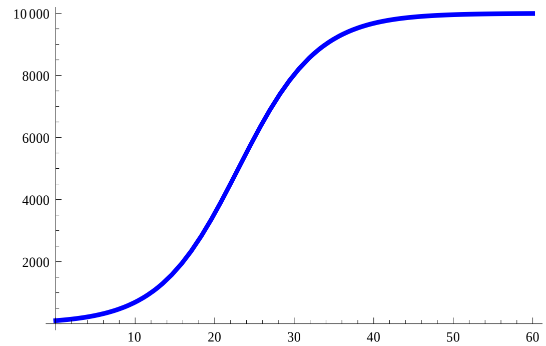


Figura 3.36: Gráfico de $L_2 = L_2(t)$.

[3] A população de uma cidade é de 20000 habitantes, de acordo com um censo realizado em 1990 e 25000 habitantes de acordo de um censo realizado em 1995. Sabendo que a população tem um crescimento exponencial, pergunta-se:

i) qual era a população no ano de 1980?

ii) quando a cidade atingirá uma população de 40000 habitantes?

i) $Q(t) = 20000\, e^{kt}$; por outro lado, $25000 = Q(5) = 20000\, e^{5k}$ e $k = \frac{1}{5}\, ln\big(\frac{5}{4}\big) \cong 0.044628$; logo,

$$Q(t) = 20000\, e^{0.044628t}$$

e $Q(-10) = 12800$ habitantes.

ii) Se $Q(t) = 40000$, então $t = 15.531$; aproximadamente, 15 anos.

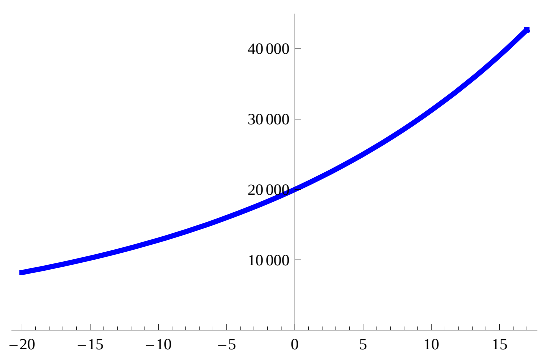


Figura 3.37: Gráfico da evolução da população.

[4] Se a população de uma certa espécie de peixes num ambiente limitado é dada por:

$$L(t) = \frac{50000}{1 + 199\, e^{-t}},$$

onde t denota o número de semanas transcorridas, quanto tempo será necessário para a população atingir 20000 peixes?

Devemos determinar $t = L^{-1}(y)$, onde $y = L(t)$; logo:

$$t = L^{-1}(y) = ln\big(\frac{199\,y}{50000 - y}\big).$$

Então, para $y = 20000$, temos $t = ln\big(\frac{398}{3}\big) \cong 4.88$, aproximadamente em 5 semanas.

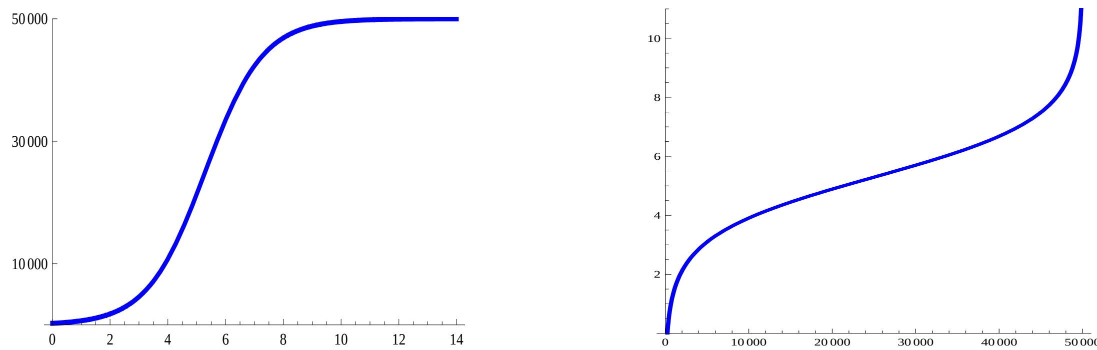


Figura 3.38: Gráficos de L e L^{-1}, respectivamente.

3.14 Função de Gompertz

Esta função de crescimento é dada por:

$$N(t) = c\,a^{R^t},$$

onde N é o número de indivíduos de uma população no instante t, $0 < R < 1$ é a taxa de crescimento da população; a população inicial é $N(0) = c\,a$.

O gráfico desta função é dito curva de Gompertz.

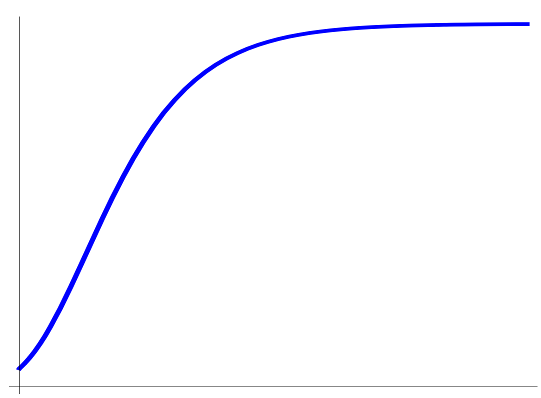


Figura 3.39: Curva de Gompertz padrão.

Esta curva foi utilizada em grande escala por psicólogos na descrição de diversos aspectos do crescimento humano. Os administradores, por analogia, utilizam esta função para descrever o crescimento das empresas e como função de lucro total.

Exemplo 3.12.

[1] A diretoria de uma empresa após diversas análises, deduz que o número de empregados da empresa será: $N(t) = 325 \times 0.05^{0.6^t}$, onde N é o número de empregados após t anos. Supondo que o modelo está correto, pede-se:

(a) Quantos empregados tinha inicialmente?

(b) Quantos empregados terá a empresa após 3 anos?

(a) Calculamos $N(0) = 325 \times 0.05 = 16.25$; aproximadamente 16 empregados.

(b) $N(3) = 325 \times 0.05^{0.6^3} = 170.16$; aproximadamente 170 empregados

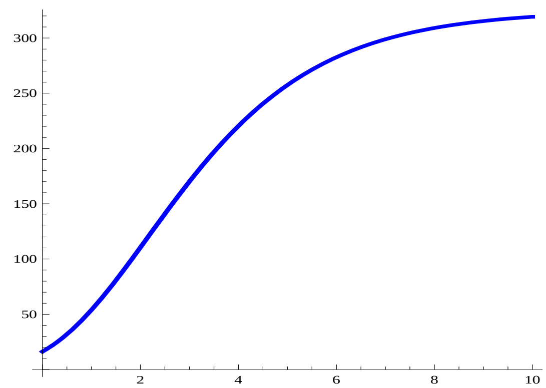


Figura 3.40: Curva de Gompertz do exemplo.

[2] O número de empresas que possui uma multinacional é modela por:

$$N(t) = c \times 0.5^{0.75^t},$$

onde t é o número de anos após a fundação da multinacional. Se inicialmente tinha 10 empresas, quantas terá após 20 anos?

Note que $10 = N(0) = 0.5\,c$, logo $c = 20$ e:

$$N(t) = 20 \times 0.5^{0.75^t},$$

e $N(20) \cong 19.95$, aproximadamente 20 empresas.

3.15 Lei de Pareto

O economista V. Pareto propôs uma função para a distribuição de renda em um grupo de indivíduos.

A distribuição de renda, segundo Pareto, é dada pela seguinte lei (empírica):

$$N(x) = \frac{a}{x^b}, \quad x > 0$$

onde N é o número que exprime a renda maior que o nível de renda x; a constante b depende somente da população; usualmente é considerado $b = 1.5$. Note que $0 < x < im$, onde im é o lucro máximo.

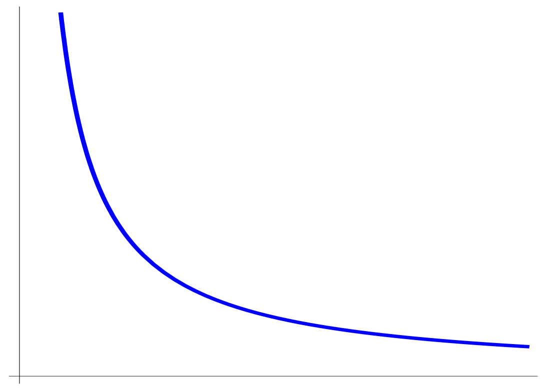


Figura 3.41: Gráfico de $N = N(x)$ padrão.

Exemplo 3.13.

[1] Suponha que num certo país a função de Pareto de distribuição da renda seja dada por:

$$N(x) = \frac{121 \times 10^{10}}{x^{1.5}}.$$

(a) Determine o número de pessoas que possuem mais de um milhão de reais.

(b) Quantas pessoas tem renda entre 10000 e 100000 reais?

(c) Das 100 pessoas de maior renda, qual é a de renda menor?

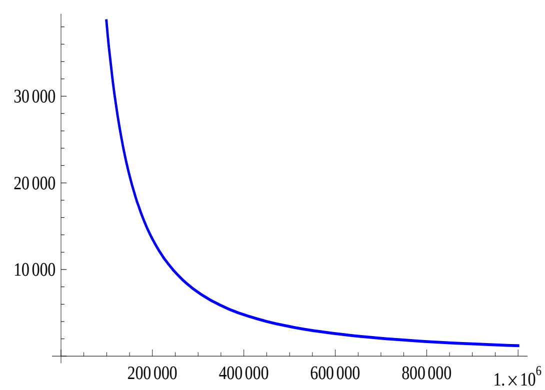


Figura 3.42: Função de Pareto.

(a) Calculamos $N(10^6) = 1210$ pessoas que possuem pelo menos um milhão de reais.

(b) Calculamos $N(10000) - N(100000) = 1210000 - 38263.6 \cong 1171736$; logo, são aproximadamente 1171736 pessoas.

(c) Resolvemos $\dfrac{121 \times 10^{10}}{x^{1.5}} = 100$, então $x^{1.5} = 121 \times 10^8$, logo $x = 5.27056 \times 10^6$

[2] Se a lei de Pareto de distribuição da renda, em dólares, de uma certa população é:

$$N(t) = \frac{300 \times 10^9}{t^{1.7}}.$$

(a) Quantas pessoas possuem mais de um milhão de dólares?

(b) Quantas pessoas possuem renda entre 3000 e 10000 dólares?

(c) Qual é a menor renda das 35 pessoas que possuem renda mais alta?

(a) Devemos calcular $N(1000000) = N(10^6)$, logo:

$$N(10^6) = \frac{300 \times 10^9}{10^{10.2}} \cong 18.92;$$

aproximadamente 19 pessoas.

(b) O número de pessoas que excede 3000 é dado por: $N(3000) = N(3 \times 10^3) \cong 368142$ e o número de pessoas que excede 10000 é dado por: $N(10000) = N(10^4) \cong 47546$, logo o número de pessoas que possuem renda entre 3000 e 10000 dólares é:

$$N(3000) - N(10000) = 320596.$$

(c) Devemos resolver:

$$35 = \frac{300 \times 10^9}{t^{1.7}} \Longrightarrow t \cong 696582 \text{ dólares}.$$

3.16 Escala Logarítmica

A escala logarítmica é utilizada em diversas áreas, quando se deseja representar graficamente dados que tem uma grande variação. Vejamos o seguinte exemplo:

Suponha que a evolução da população numa grande metrópole, por décadas, é dada pela seguinte tabela:

Ano	População P
1940	1250000
1950	2750000
1960	3840000
1970	4760000
1980	5260000
1990	5940000
2000	6890000

Façamos a escala logarítmica para logaritmo na base 10, base 20 e na base e:

Ano	$log_{10}(P)$	$log_{20}(P)$	$ln(P)$
1940	6.09	4.68	14.03
1950	6.43	4.94	14.82
1960	6.58	5.06	15.16
1970	6.67	5.13	15.37
1980	6.72	5.16	15.47
1990	6.77	5.20	15.59
2000	6.83	5.25	15.74

Gráficos em diversas escalas logarítmicas:

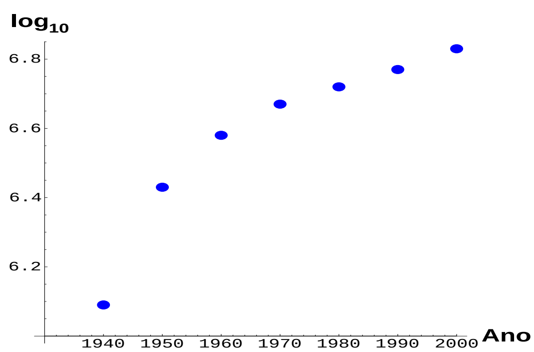
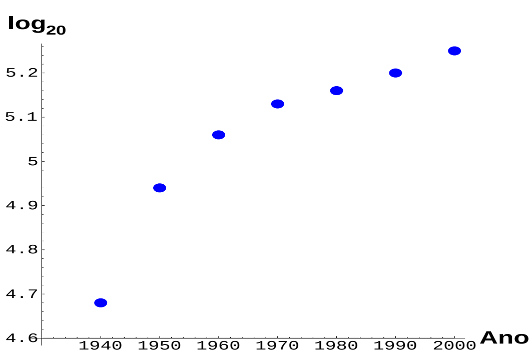


Figura 3.43: Escala log_{10}.



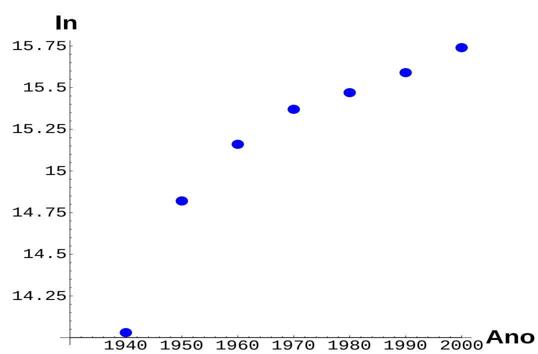


Figura 3.44: Escala log_{20} e ln, respectivamente.

3.17 Regressões por Mínimos Quadrados

3.17.1 Regressão Linear

Suponha que numa experiência realizada foram coletados os seguintes pares de dados (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), tais que os x_i não são todos iguais. A teoria subjacente à experiência sugere que os dados devem estar ao longo de uma curva. O método dos mínimos

quadrados consiste em determinar a curva que melhor se ajusta aos dados, ou seja, consiste em determinar uma curva de modo que a soma dos desvios verticais à curva seja mínima.
Quando a curva em questão é uma reta o procedimento é chamado regressão linear por mínimos quadrados. Denotemos a reta por $y = a\,x + b$. É possível verificar que a e b são a única solução do sistema linear:

$$\begin{cases} a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i & = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,b & = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Exemplo 3.14.

[1] Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos $(0,0)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,3)$, $(1,2)$ e $(3,2)$.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	0	0	0
2	-1	2	1	-2
3	-2	-1	4	2
4	2	3	4	6
5	1	2	1	2
6	3	2	9	6

n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$
6	3	8	19	14

Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 19\,a + 3\,b = 14 \\ 3\,a + 6\,b = 8, \end{cases}$$

que tem como solução $a = \dfrac{4}{7}$ e $b = \dfrac{22}{21}$; então, a reta é $y = \dfrac{4x}{7} + \dfrac{22}{21}$.

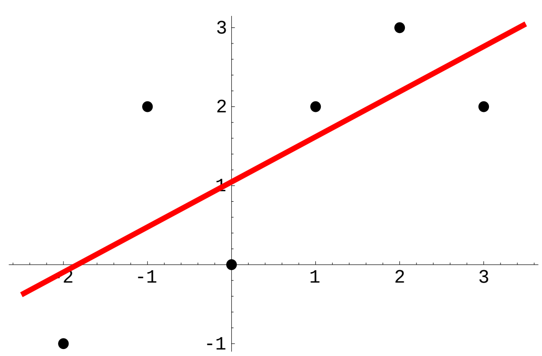


Figura 3.45: Exemplo [1].

[2] Considere a seguinte tabela sobre mortes por consumação de álcool per cápita, no ano de 2003, dos seguintes países:

País	l/p	Mortes
A	250	95
B	300	120
C	350	165
D	370	167
E	400	170
F	470	174

(a) Suponha que existe uma correlação linear entre os dados da tabela e utilize o método dos mínimos quadrados para determinar a reta de melhor ajuste à tabela.

(b) Se num país a consumação foi de 550 litros per cápita no ano de 2003, utilizando (a), determine a possível mortalidade.

(a) Determinamos a reta que fica a menor distância vertical dos pontos $(250, 95)$, $(300, 120)$, $(350, 165)$, $(370, 167)$, $(400, 170)$ e $(470, 174)$.

n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$
6	2140	891	792800	329070

Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 792800\,a + 2140\,b &= 329070 \\ 2140\,a + 6\,b &= 891, \end{cases}$$

que tem como solução $a = \dfrac{846}{2215}$ e $b = \dfrac{10875}{886}$; então, a reta é $y = \dfrac{846x}{2215} + \dfrac{10875}{886}$.

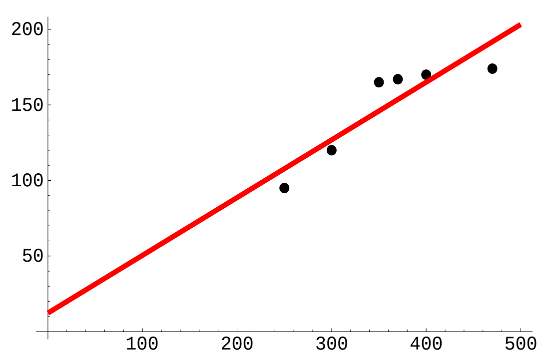


Figura 3.46: Exemplo [2] (a).

(b) Se $x = 550$, $y = \dfrac{196995}{886} \simeq 222.34$.

3.17.2 Regressão Quadrática

Analogamente à regressão linear, quando a curva em questão é uma parábola o procedimento é chamado regressão quadrática por mínimos quadrados. Denotemos a parábola por:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c,$$

obde a, b e c são constantes por determinar. É possível verificar que a, b e c são a única solução do sistema linear:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\,n & = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Exemplo 3.15.

[1] Determine a parábola que melhor se ajusta aos pontos $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, $(2,5)$, $(-2,3)$ e $(3,7)$.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
0	0	0	0	0	0	0
-1	1	-1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
2	5	10	4	8	16	20
-2	3	-6	4	-8	16	12
3	7	21	9	27	81	63

n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i^3$	$\sum x_i^4$	$\sum x_i^2 y_i$
6	3	17	25	19	27	115	97

Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 115\,a + 27\,b + 19\,c = 97 \\ 27\,a + 19\,b + 3\,c = 25 \\ 19\,a + 3\,b + 6\,c = 17, \end{cases}$$

que tem como solução $a = \dfrac{5}{7}$, $b = \dfrac{8}{35}$ e $c = \dfrac{16}{35}$; então, a parábola é

$$y = \frac{5\,x^2}{7} + \frac{8\,x}{35} + \frac{16}{35}.$$

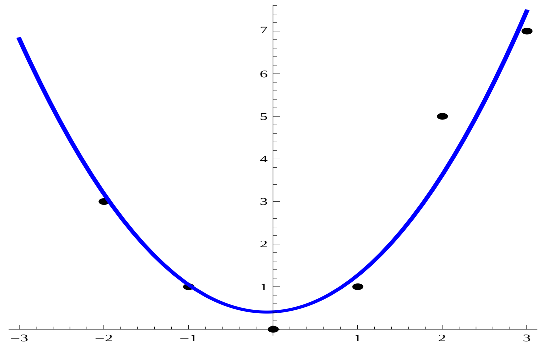


Figura 3.47: Exemplo [1].

[2] Determine a parábola que melhor se ajusta aos pontos $(0, 0.01)$, $(0.26, 0.17)$, $(0.35, 0.25)$, $(0.51, 0.23)$, $(0.74, 0.19)$ e $(1, 0.02)$.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
0	0.01	0	0	0	0	0
0.26	0.17	0.0442	0.0676	0.017576	0.004569	0.011496
0.35	0.25	0.0875	0.1225	0.042875	0.0150062	0.030625
0.51	0.23	0.1173	0.2601	0.132651	0.067652	0.059823
0.74	0.19	0.1406	0.5476	0.405224	0.299866	0.104044
1	0.02	0.02	1	1	1	0.02

n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i^3$	$\sum x_i^4$	$\sum x_i^2 y_i$
6	2.86	0.87	0.4096	1.9978	1.59833	1.38709	0.225984S

Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 1.387909\, a + 1.59833\, b + 1.9978\, c = 0.2259885 \\ 1.59833\, a + 1.9978\, b + 2.86\, c = 0.4096 \\ 1.9978\, a + 2.86\, b + 6\, c = 0.87, \end{cases}$$

que tem como solução $a = -0.900803$, $b = 0.909109$ e $c = 0.0115957$; então, a parábola é

$$y = -0.900803\, x^2 + 0.909109\, x + 0.0115957.$$

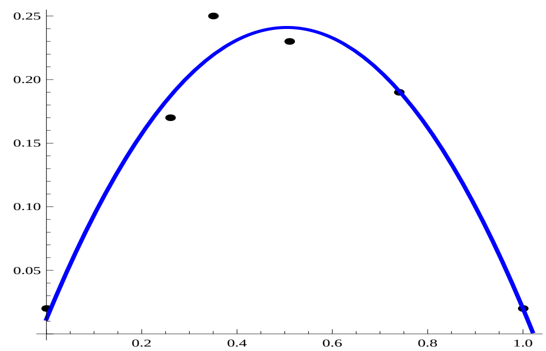


Figura 3.48: Exemplo [2].

3.17.3 Regressão Exponencial

Se a curva procurada é do tipo $f(x) = b\,a^x$, tal que $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, aplicando logaritmo a ambos os lados, obtemos:

$$ln(f(x)) = x\,ln(a) + ln(b);$$

obtemos a reta $Y = A\,x + B$ na escala logarítmica, onde $Y = ln(f(x))$, $A = ln(a)$ e $B = ln(b)$. Logo, aplicamos a regressão linear aos pontos $(ln(x_i), ln(y_i))$; o procedimento para determinar a e b é chamado regressão exponencial por mínimos quadrados. Então, da regressão linear, obtemos:

$$\begin{cases} A &= \dfrac{A_1 - A_2}{K} \\ \\ B &= \dfrac{B_1 - A\,B_2}{n}. \end{cases}$$

onde $A_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,ln(y_i)$, $A_2 = \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln(y_i)\right]$, $K = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2$, $B_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln(y_i)$ e $B_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Note que:

$$a = e^A \quad \text{e} \quad b = e^B.$$

Exemplo 3.16.

Suponha que os seguintes dados foram obtidos do valor das ações de certa empresa na bolsa, entre os meses de março e outubro: $(3, 0.37)$, $(4, 0.46)$, $(5, 0.51)$, $(6, 0.66)$, $(7, 0.8)$, $(8, 0.98)$, $(9, 1.26)$ e $(10, 1.59)$. A primeira coordenada indica o mês e a segunda o valor das ações no mês correspondente, em u.m. Suponha que existe uma correlação exponencial entre os dados. Determine a exponencial que melhor se ajusta aos pontos.

x_i	y_i	$ln(y_i)$	$x_i\,ln(y_i)$	x_i^2
3	0.37	-0.994	-2.982	9
4	0.46	-0.776	-3.106	16
5	0.51	-0.673	-3.366	25
6	0.66	-0.415	-2.493	36
7	0.80	-0.223	-1.562	49
8	0.98	-0.020	-0.16	64
9	1.26	0.190	1.71	81
10	1.59	0.463	4.63	100

n	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum ln(y_i)$	$\sum x_i ln(y_i)$	$\sum x_i^2$
8	52	6.63	-2.448	-7.318	380

Logo, $A_1 = -7.318$ $A_2 = -15.912$, $K = 42$, $B_1 = -2.448$ e $B_2 = 52$; então $A = 0.2046$ e $B = -1.6359$. Finalmente:

$$a = e^{0.2046} = 1.227 \quad \text{e} \quad b = e^{-1.6359} = 0.194$$

e:

$$y = 0.194 \times 1.227^x.$$

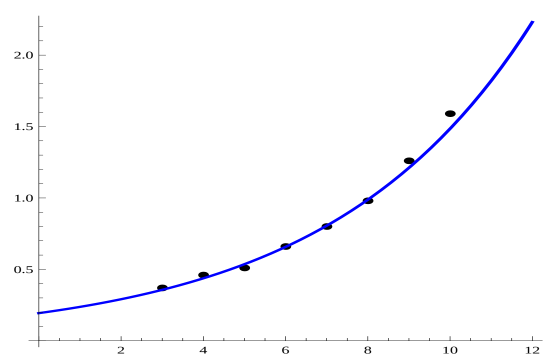


Figura 3.49: Gráfico de $y = 0.194 \times 1.227^x$.

3.18 Exercícios

1. Considere as seguintes funções de demanda:

   (a) $f(p) = 1 - p^3$

   (b) $f(p) = \sqrt{p^3 - p}$

   (c) $f(p) = \dfrac{p}{p-4}$

   (d) $f(p) = \dfrac{1}{1+\sqrt{p}}$

   (e) $f(p) = \dfrac{2\,p}{p^2+1}$

   (f) $f(p) = \sqrt{p^2 - 4\,p + 3}$

   (g) $f(p) = \sqrt{p - \sqrt{p}}$

   (h) $f(p) = \dfrac{\sqrt{4-p^2}}{p}$

   (i) $f(p) = \dfrac{\sqrt{p-4}}{\sqrt{p-9}}$

   (j) $f(p) = \dfrac{p^5+p^2}{p^2+1}$

   (a) Determine o domínio e a imagem de cada função.

   (b) Esboce o gráfico de cada função.

   (c) Ache as funções de preço de cada função, se existirem.

2. Quando o preço for 2500 reais, 2000 computadores de determinado tipo são oferecidos aos consumidores; quando o preço sobe para 3200 reais, 5000 computadores são oferecidos. Ache a função da oferta, se for afim e esboce o gráfico

3. Quando o preço for 1000 reais, nenhum tênis de determinado tipo está disponível no mercado; quando o preço cai para 400 reais, 10000 tênis são oferecidos. Ache a função da oferta se for afim e esboce o gráfico

4. A função de custo total de uma fábrica é $C(x) = x^3 - 9\,x^2 + 42\,x$.

   (a) A função de oferta será $p(x) = 3\,x^2 - 18\,x + 42$?

   (b) Esboce ambos os gráficos no mesmo sistema de coordenadas.

5. O custo em $u.m.$ (unidades monetárias) para remover $x\%$ dos detritos tóxicos despejados num aterro é dado por:
$$C(x) = \frac{0.8\,x}{100-x},$$
   para $0 < x < 100$.

   (a) Determine o custo total referente à remoção de 40%, 60% e 90% dos detritos. Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

   (b) Que percentual de detritos pode ser removido por $10.000\,u.m$?

   (c) Determine o custo médio e esboce seu gráfico.

6. Uma empresa que produz componentes eletrônicos para computadores, tem custo total de $C(x) = x^2 + 40\,x + 100$.

   (a) Calcule o custo médio e o custo fixo da empresa.

   (b) Se o preço do produto for 80 reais, qual deve ser a quantidade produzida?

   (b) Quando a empresa tem lucro?

7. Uma empresa que fabrica aviões de pequeno porte, tem como função de receita total $R(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ para um determinado modelo:

   (a) Esboce o gráfico de $R = R(x)$.

   (b) Determine a função de demanda e esboce seu gráfico.

8. Determine o ponto de equilíbrio de empresas que tem as seguinte funções de oferta e de demanda:

   (a) $2\,p = 20 - 2\,x$ e $4\,p = 3\,x + 2$.

   (b) $2\,p = 10 - 6\,x$ e $2\,p = 8\,x + 24$.

   (c) $x = 4\,p - 3$ e $(p + 10)\,x = 120 - 5\,p - 50$.

   (d) $(x + 1)\,p = 5$ e $4\,p = x$.

   (e) $x = 10\,p + 4\,p^2$ e $x = 96 - 8\,p - 2\,p^2$.

   (f) $(x + 10)\,(p + 5) = 225$ e $x - p + 5 = 0$.

   (g) Esboce os gráficos de (a), (b), (c), (d), (e) e (f).

9. Uma montadora de carros, tem funções de custo total $C(x) = 10\,x + 80$ e de receita $R(x) = -3\,x^2 + 50\,x + 5$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto.

   (a) Calcule os pontos de nivelamento.

   (b) Quando a empresa tem e não tem lucro por produzir estes componentes?

10. Uma cadeia de lanchonetes, tem funções de custo total $C(x) = 600 - 20\,x$ e de receita $R(x) = 40\,x$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto.

    (a) Calcule os pontos de nivelamento.

    (b) Quando a empresa tem e não tem lucro?

11. O custo para produzir um certo tipo de perfume é de 25 reais por unidade e o custo associado à produção é de 120 reais. O preço ao consumidor é de 35 reais, Ache:

    (a) O custo total e esboce o gráfico.

    (b) A receita total e esboce o gráfico.

    (c) O lucro total e esboce o gráfico.

    (d) A produção para ter um lucro de 2500 reais

12. O custo total para produzir um certo bem é $C(x) = 10\,x + 4$ e a função de demanda é $x = 10 - x^2$.

    (a) Ache a função receita total e esboce o gráfico.

    (b) Ache a função lucro total e esboce o gráfico.

13. 20 artigos de um certo produto são vendidos quando seu preço unitário é 90 dólares e são vendidas 58 unidades quando seu preço cai para 50 dólares. Supondo que a demanda é uma função afim, determine-a.

14. Quando um certo produto é vendido a 20 dólares, nenhum produto é achado no mercado; a cada aumento de 5 dólares, 100 a mais destes produtos são ofertados no mercado. Supondo que a oferta é uma função afim, determine-a.

15. Se 25000 reais são investidos a uma taxa de juros compostos de 12.5% ao ano, qual é o montante acumulado após 10 anos, se os juros forem capitalizados semestralmente?

16. Suponha que se aplicou 1000 reais a uma taxa de juros compostos de 19% ao

    (a) Calcule o montante final do capital inicial, após 5 anos, após 10 anos e após 15 anos

    (b) Represente graficamente o crescimento do investimento.

17. Se 1000 reais são investidos a uma taxa de juros anual de 6%, capitalizados trimestralmente, calcule o capital ao final de:

    (a) 1 ano, 5 anos e 10 anos.

    (b) Represente graficamente o crescimento do investimento.

18. A lei de Pareto para a distribuição de lucros de certo grupo é dada por:

$$N(x) = \frac{625 \times 10^9}{x^{3/2}}.$$

    (a) Quantas pessoas recebem lucros entre 2500 e 10000 u.m.?

    (b) Qual é o menor lucro das 6 pessoas que recebem os maiores lucros?

19. A lei de Pareto de distribuição da renda de uma certa população é:

$$N(t) = \frac{50 \times 10^{10}}{t^{1.4}}.$$

(a) Quantas pessoas possuem mais de um milhão de dólares?

(b) Quantas pessoas possuem renda entre 4000 e 12000 dólares?

(c) Qual é a menor renda das 20 pessoas que possuem renda mais alta?

20. Se parar a contaminação de uma certa lagoa, estima-se que os níveis de contaminação diminuem de acordo com a lei:

$$y = y_0\, e^{-0.2582t},$$

onde t é dada em anos e y_0 é o nível de contaminação quando parou a contaminação. Em quantos anos a lagoa reduzirá a contaminação pela metade?

21. Se o valor de um imóvel cresce à razão de 10 % ao ano, após t anos, o valor do imóvel comprado por p_0 u. m. é modelado por:

$$V(t) = p_0 \times 1.11^t.$$

Se um imóvel foi comprado em 100000 u.m. no ano 2000 qual será seu preço em 2010 e em 2015?

22. O comprimento (em centímetros) de muitos peixes, de t anos de idade, importantes na alimentação de muitas populações, pode ser, aproximadamente, modelado pela função de Von Bertalandffy:

$$f(t) = a\,[1 - b\,e^{-kt}],$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

(a) Para um peixe típico do Oceano Pacífico: $a = 200$, $b = 0.965$ e $k = 0.18$. Calcule o comprimento de um destes peixes típicos de 10 anos.

(b) Como se interpreta a constante a na fórmula?

23. Resolva a formúla de Von Bertalandffy $y = a\,[1 - b\,e^{-kt}]$, para t em função de y, a, b e k. O resultado pode ser empregado para calcular a idade de um peixe conhecendo a medida de seu comprimento.

24. Se certa marca de uma certo produto é comprada por C dólares, seu valor comercial ao final de t anos pode ser modelado por $w(t) = 0.78 \times C \times 0.85^{t-1}$. Se o preço inicial da marca é de 10000 dólares., calcule, aproximadamante, o seu valor depois de 1 ano e depois de 7 anos.

25. Para calcular a dosagem de medicamentos que pode ser prescrita para crianças de 1 a 14 anos é utilizada a função
$$W(t) = \frac{e^t}{t+14},$$
onde e é a dose para adultos em mg e t é a idade em anos. Determine a dose que pode ser indicada para uma criança de 6 anos se a dose adulta é de $400\,mg$.

26. Numa epidemia de gripe, o número de pessoas num bairro que pegaram gripe após t dias é dado por :
$$L(t) = \frac{90000}{1 + 1990\,e^{-0.5t}}.$$
(a) Quantas pessoas foram infectadas após 1 dia? após 10 dias?

(b) Em quantos dias 50000 pessoas ficaram com gripe?

27. Utilizando exemplos determine o comportamento do gráfico da função logística se variamos A, B e C.

28. O departamento de pessoal de uma empresa determina que o número de empregados é modelado por:
$$N(t) = c \times 0.04^{0.5^t},$$
onde t é dado em anos. Se a empresa incialmente tinha 8 empregados, quantos terá após 10 anos?

29. Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos:

(a) $(-6,-10)$, $(-3,3)$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ e $(4,7)$.

(b) $(1,-1)$, $(3,-3)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(-3,2)$ e $(5,4)$.

30. Determine a parábola que melhor se ajusta aos pontos:

(a) $(-2,7.7)$, $(-1,5.3)$, $(0,3)$, $(1,4.9)$, $(2,8.3)$ e $(4,19)$.

(b) $(-3,-1.2)$, $(-2,3)$, $(-1,7.3)$, $(0,8.4)$, $(0.5,7.6)$, $(1,7.2)$ e $(2,3.8)$.

31. Determine a exponencial que melhor se ajusta aos pontos:

(a) $(-1,0.3)$, $(-0.5,0.56)$, $(0,1.13)$, $(0.5,1.6)$, $(2,8.8)$ e $(2.5,15)$.

(b) $(-1,4.2)$, $(-0.5,1.8)$, $(-0.1,1)$, $(0,0.8)$, $(0.5,0.6)$, $(1,0.3)$ e $(2,0.05)$.

32. A seguinte tabela mostra a população de um certo país, no período 2000-2009, em milhões e t representa o tempo, em anos, inicilamente com $t = 10$:

t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	25.3	25.51	25.62	25.67	25.7	25.81	25.91	30.2	30.52	30.6

Suponha que existe uma correlação linear entre os dados.

(a) Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos.

(b) Utilizando (a), determine a possível quantidade de habitantes no ano 2030.

33. A seguinte tabela mostra qual é o tamanho médio, em alqueires, de terras cultivadas por pequenos donos de terras.

Ano	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Alq.	211	301	380	421	469	491

Suponha que existe uma correlação quadrática entre os dados.

(a) Determine a parábola que melhor se ajusta aos pontos.

(b) Utilizando (a), determine a possível quantidade de habitantes no ano 2010 e 2020.

(c) Suponha que também existe uma correlação linear entre os dados. Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos e compare os resultados obtidos em (b).

Capítulo 4

LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

4.1 Introdução

O desenvolvimento teórico de grande parte do Cálculo foi feito utilizando a noção de **limite**. Por exemplo, as definições de derivada e de integral definida, independente de seu significado geométrico ou físico, são estabelecidas usando limites.

Inicialmente desenvolveremos a idéia intuitiva de limite, estudando o comportamento de uma função $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio. Por exemplo, seja

$$f(x) = \frac{2\,x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2\,x + 1)(x - 1)}{x - 1}.$$

É claro que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Estudaremos a função nos valores de x que ficam próximos de 1, mas sem atingir 1. Para todo $x \in Dom(f)$ temos que $f(x) = 2x + 1$. Vamos construir uma tabela de valores de x aproximando-se de 1, pela esquerda ($x < 1$) e pela direita ($x > 1$) e os correspondentes valores de $f(x)$:

$x < 1$	$f(x)$
0	1
0.5	2
0.7	2.4
0.8	2.6
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
0.9999	2.9998
0.99999	2.99998
0.999999	2.999998
0.9999999	2.9999998

$x > 1$	$f(x)$
2	5
1.7	4.4
1.5	4
1.2	3.4
1.09	3.18
1.009	3.018
1.0009	3.0018
1.00009	3.00018
1.000009	3.000018
1.0000009	3.0000018
1.00000009	3.00000018

Observando as tabelas, podemos verificar que: "à medida que x vai se aproximando de 1, os valores de $f(x)$ vão aproximando-se de 3". A noção de proximidade pode ficar mais precisa utilizando valor absoluto. De fato, a distância entre dois pontos quaisquer $x,\, y \in \mathbb{R}$ é $|y - x|$. Assim a frase escrita entre aspas, pode ser expressa por:

$$\text{se } |x-1| \text{ aproxima-se de zero, então } |f(x)-3|$$

também se aproxima de zero; em outras palavras: para que $|f(x)-3|$ seja pequeno é necessário que $|x-1|$ também seja pequeno. O número 3 é chamado limite de $f(x)$ quando x está próximo de 1. No exemplo, temos $|f(x)-3| = 2|x-1|$; logo, a distância de $f(x)$ a 3 é igual a duas vezes a distância de x a 1. É claro que quando x aproxima-se de 1, $|x-1|$ aproxima-se de zero e consequentemente $|f(x)-3|$ também aproxima-se de zero. Mais ainda, poderemos tornar $f(x)$ tão perto de 3 quanto desejarmos, bastando para tal considerar x suficientemente próximo de 1. Por exemplo, se desejarmos que $|f(x)-3|$ seja igual a $0,2$, basta considerar $|x-1| = 0,1$; agora, se desejarmos que $|f(x)-3| < 0,02$, basta considerar $|x-1| < 0,01$.

De um modo geral, considerando qualquer número real positivo ε (letra grega epsilon), tão pequeno quanto se deseje e definindo o número real δ (letra grega delta), $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, teremos que a distância de $f(x)$ a 3 é menor que ε, desde que a distância de x a 1 seja menor que δ. Então para todo número real positivo ε existe outro número real positivo δ, que depende de ε, tal que se $0 < |x-1| < \delta$, então $|f(x)-3| = 2\,|x-1| < 2\delta = \varepsilon$. Note que todos os intervalos abertos que contém 1 intersectam $\mathbb{R} - \{1\}$ de forma não vazia.

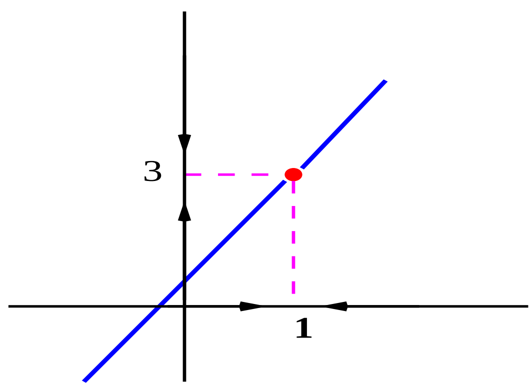


Figura 4.1:

Definição 4.1. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$ tais que para todo intervalo aberto I, contendo b, tem-se $I \cap (A - \{b\}) \neq \phi$. O número real L é o* **limite** *de $f(x)$ quando x aproxima-se de b quando para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que, se $x \in A$ e $0 < |x-b| < \delta$ então $|f(x)-L| < \varepsilon$.*

A notação é:

$$\boxed{\lim_{x\to b} f(x) = L}$$

A definição é equivalente a dizer:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (b-\delta, b+\delta) \cap \big(A - \{b\}\big)$, então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

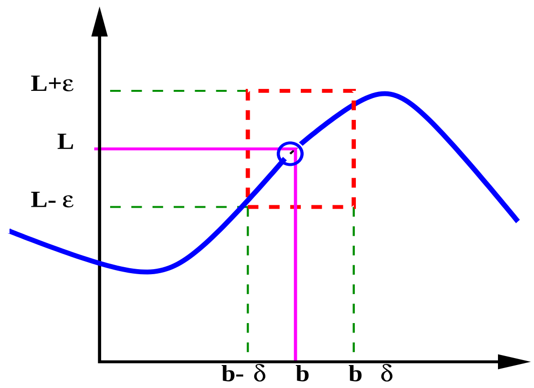


Figura 4.2:

Observe que o limite de uma função $y = f(x)$ num ponto b, depende apenas dos valores que f assume nas proximidades de b, ou seja, num pequeno intervalo aberto de centro b.

Proposição 4.1. Unicidade do limite *Se* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L_1$ *e* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L_2$; $(L_1, L_2 \in \mathbb{R})$, *então*

$$L_1 = L_2.$$

Em outras palavras se o limite existe (é um número real), ele é único. Para a prova veja o apêndice.

Corolário 4.1. *Se as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são tais que* $f(x) = g(x)$ *exceto num ponto* b, *então:*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x),$$

desde que exista um dos limites.

Esta propriedade nos permite "simplificar"antes de calcular o limite, como no primeiro exemplo.

Exemplo 4.1.

[1] Sejam $f(x) = \dfrac{2\,x^2 - x - 1}{x - 1}$ e $g(x) = 2\,x + 1$.
Logo, $f(x) = g(x)$ se $x \neq 1$; então, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$, como já foi verificado.

[2] Seja

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Observemos que $f(1) = 2$, mas o valor do limite da função quando x tende a 1 não depende do valor da função no ponto 1, pois $f(x) = x + 5$ se $x \neq 1$; logo:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x + 5) = 6.$$

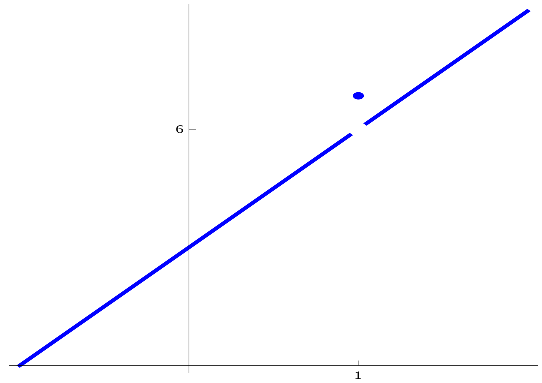


Figura 4.3: Exemplo [2].

Proposição 4.2. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$*, existem, então para todo* α, $\beta \in \mathbb{R}$*:*

1. $\lim\limits_{x\to a} \big[\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big] = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to a} g(x).$

2. $\lim\limits_{x\to a} \big[f(x)\, g(x)\big] = \big[\lim\limits_{x\to a} f(x)\big]\,\big[\lim\limits_{x\to a} g(x)\big].$

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, *se* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0.$

4. $\lim\limits_{x\to a} \big[f(x)\big]^n = \big[\lim\limits_{x\to a} f(x)\big]^n$, *se* $n \in \mathbb{N}$.

5. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$ *e* n *é qualquer natural, ou* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *positivo, negativo ou nulo e* n *é um natural ímpar.*

6. $\lim\limits_{x\to a} ln\big[f(x)\big] = ln\big[\lim\limits_{x\to a} f(x)\big]$, *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0.$

7. *Se* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ *e existe* $\delta > 0$ *tal que* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$*, para* $0 < |x-a| < \delta$*, então* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$*.*

Segue diretamente da proposição 4.2:

(a) Se $P(x)$ é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a).$$

(b) Se $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função racional e $a \in Dom(f)$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo 4.2.

Calcule os seguintes limites:

[1] $\lim\limits_{x\to 0}[10\,x^6 - 3\,x^5 + 2\,x^4 + x^3 + 5\,x + 10]$.

Neste caso $P(x) = 10\,x^6 - 3\,x^5 + 2\,x^4 + x^3 + 5\,x + 10$; logo:

$$\lim_{x\to 0}[10\,x^6 - 3\,x^5 + 2\,x^4 + x^3 + 5\,x + 10] = \lim_{x\to 0} P(x) = P(0) = 10.$$

[2] $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^4-9}$.

Como $\lim\limits_{x\to 2}(x^4 - 9) = 7 \neq 0$, podemos aplicar a proposição 4.2; então,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^4-9} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^4-9)} = \frac{4}{7}.$$

[3] $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8\,x^2 + 17\,x - 10}{x-2}$.

Como $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$, não podemos aplicar a proposição 4.2; mas fatorando o numerador:

$$\frac{x^3 - 8\,x^2 + 17\,x - 10}{x-2} = \frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-5)}{x-2} = (x-1)\,(x-5),$$

para todo $x \neq 2$. Logo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8\,x^2 + 17\,x - 10}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1)\,(x-5) = -3.$$

[4] Determine o valor de a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3\,x^2 + a\,x + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista.

Note que $x^2 + x - 2 = (x+2)\,(x-1)$. Dividindo $3\,x^2 + a\,x + a + 3$ por $x + 2$; obtemos:

$$3\,x^2 + a\,x + a + 3 = (x+2)\,(3\,x + a - 6) + (15 - a);$$

logo, para que a divisão seja exata devemos ter $a = 15$; então:

$$3\,x^2 + a\,x + a + 3 = 3\,(x^2 + 5\,x + 6) = 3\,(x+2)\,(x+3)$$

e

$$\lim_{x\to -2} \frac{3\,x^2 + a\,x + a + 3}{x^2 + x - 2} = 3\,\lim_{x\to -2} \frac{x+3}{x-1} = -1.$$

[5] $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4}$.

Como $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$, não podemos aplicar diretamente a proposição 4.2; mas racionalizando o numerador:

$$\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}.$$

Logo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{6}.$$

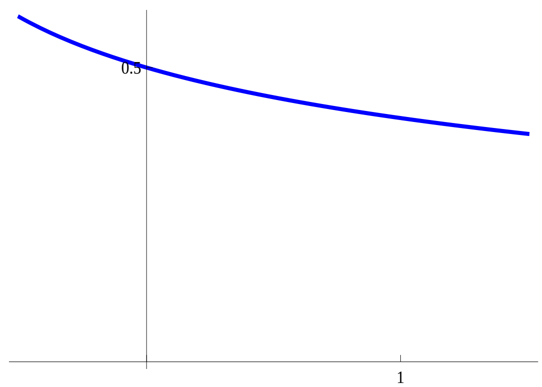


Figura 4.4: Gráfico de $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}-1}{x-4}$, perto de 4.

[6] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$.

Para calcular este limite façamos a mudança de variáveis $x=t^{20}$; então:

$$\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\frac{t^5-1}{t^4-1}=\frac{(t^4+t^3+t^2+t+1)\,(t-1)}{(t-1)\,(t^3+t^2+t+1)}.$$

Se $x\to 1$, então $t\to 1$; logo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4+t^3+t^2+t+1}{t^3+t^2+t+1}=\frac{5}{4}.$$

[7] Seja $f(x)$ uma função tal que $|f(x)|\le x^2$; então, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

De fato. Pela proposição 4.2, ítem 7, temos: $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$, o que implica, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

4.2 Limites Laterais

Sejam f uma função definida em um domínio D (que pode ser um intervalo ou uma reunião de intervalos).

Definição 4.2.

1. *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *tal que existem* $b \in \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \subset Dom(f)$*. O número real* L *é o limite à direita de* $f(x)$*, quando* x *se aproxima de* a *pela direita se para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$*, se* $a < x < a + \delta$*. Notação:*

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

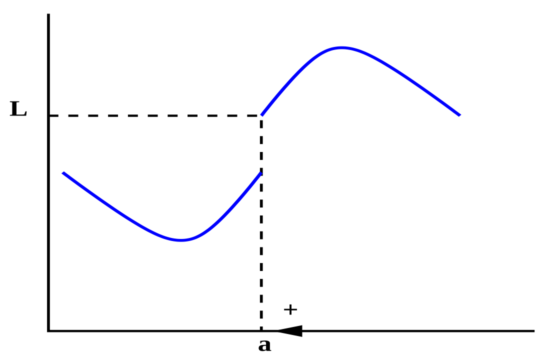


Figura 4.5: Limite à direita.

2. *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *tal que existem* $c \in \mathbb{R}$ *e* $(c, a) \subset Dom(f)$*. O número real* L *é o limite à esquerda de* $f(x)$*, quando* x *se aproxima de* a *pela esquerda se para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$*, se* $a - \delta < x < a$*. Notação:*

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = L}$$

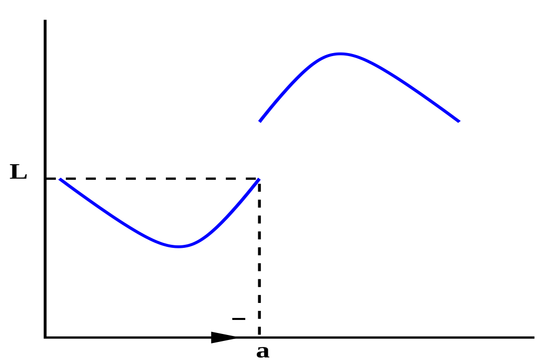


Figura 4.6: Limite à esquerda.

Exemplo 4.3.

[1] Calcule:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x),$$

se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \\ -x^2+9 & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

Para calcular estes limites observemos que $x \to 2^+$ significa que x fica perto de 2, para valores de x maiores que 2 e $x \to 2^-$ significa que x fica perto de 2, para valores de x menores que 2. Assim:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x^2+9) = 5.$$

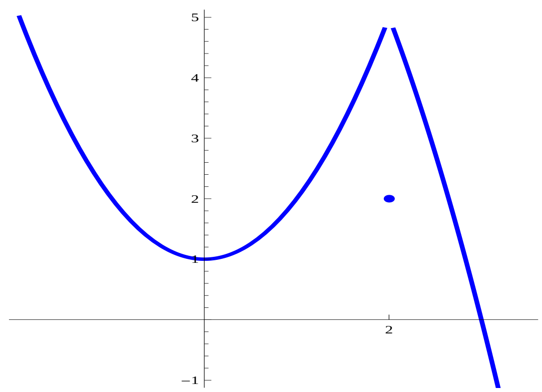


Figura 4.7: Gráfico de f, perto de 2.

[2] Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Novamente, para calcular estes limites observemos que $x \to 0^+$ significa que x fica perto de 0, para valores x maiores que 0 e $x \to 0^-$ significa que x fica perto de 0, para valores x menores que 0. Primeiramente, escrevamos a função da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Assim $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-1) = -1$.

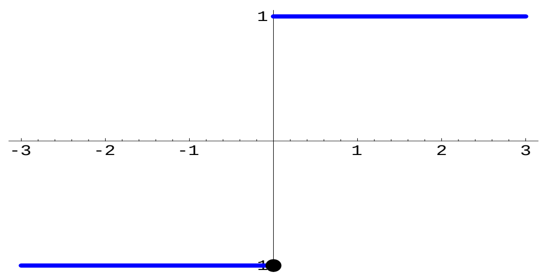


Figura 4.8: Gráfico de f.

[3] Calcule $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4\,x + 6 & \text{se} \quad x < 2 \\ -x^2 + 4\,x - 2 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Calculando diretamente :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x^2 + 4\,x - 2) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 - 4\,x + 6) = 2.$$

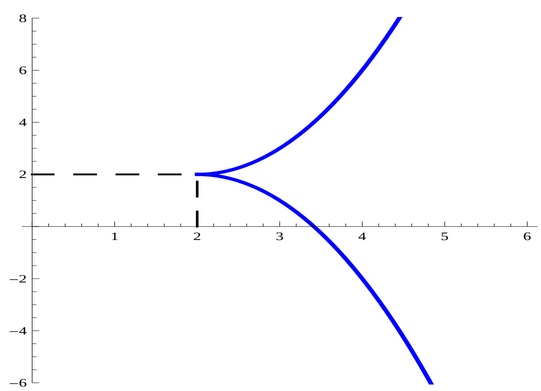


Figura 4.9: Gráfico de f, perto de 2.

Relação entre limite e limites laterais

Teorema 4.2. *Seja $f(x)$ uma função com domínio D nas condições das definições. Então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, os limites laterais existem e :*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Para a prova, veja o apêndice.

Teste para determinar quando não existe um limite

Se

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)}$$

ou se um dos limites laterais não existe, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe.

Exemplo 4.4.

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad x<2 \\ 2 & \text{se} \quad x=2 \\ -x^2+9 & \text{se} \quad x>2. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes. Do exemplo [1] das páginas anteriores temos $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$. Pelo teorema, temos que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

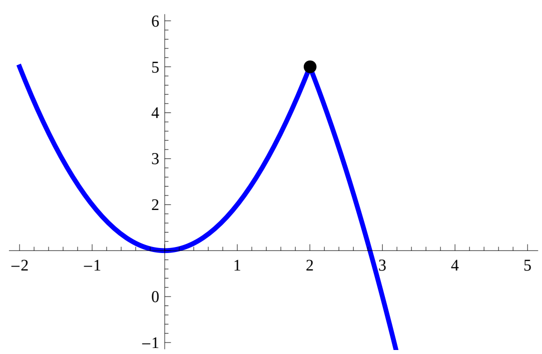


Figura 4.10: Gráfico de f, perto de 2.

[2] Determine o valor da constante c tal que $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ exista, se:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se} \quad x\le c \\ x & \text{se} \quad x>c. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes.

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c} x = c \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c}(2-x^2) = 2-c^2.$$

Pelo teorema, devemos ter $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$; logo, resolvemos a equação $c^2+c-2=0$ de onde obtemos $c=1$ e $c=-2$. Então, podemos definir:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se} \quad x\le 1 \\ x & \text{se} \quad x>1 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se} \quad x\le -2 \\ x & \text{se} \quad x>-2. \end{cases}$$

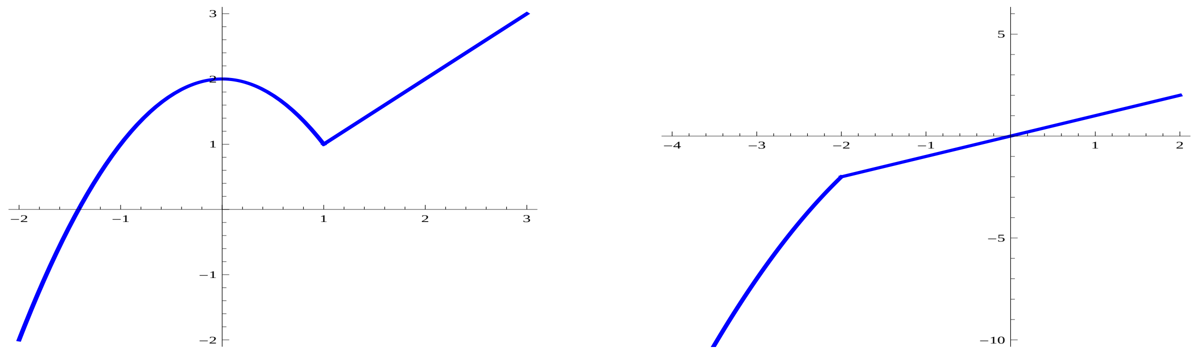


Figura 4.11: Gráficos de f para $c = 1$ e $c = -2$, respectivamente.

[3] Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 3x & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe.

[4] A função degrau unitário é definida como:

$$u_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < c \\ 1 & \text{se} \quad x \geq c, \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Logo, $\lim\limits_{x \to c^-} u_c(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to c^+} u_c(x) = 1$; logo, $\lim\limits_{x \to c} u_c(x)$ não existe.

4.3 Limites no Infinito

Definição 4.3.

1. *Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $x > A$.

2. *Seja $f : (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $B > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $x < -B$.

Proposição 4.3. *Para todo número natural n e para $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, tem-se:*

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x^n} = 0.$

2. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{b}{x^n} = 0.$

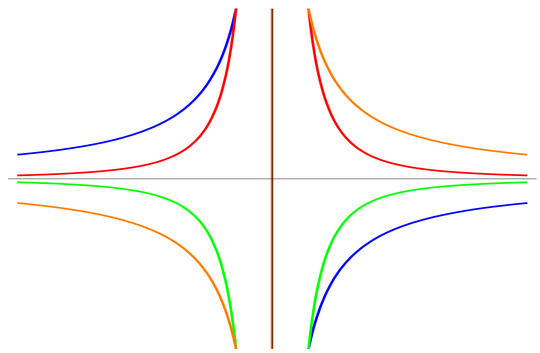


Figura 4.12: Gráficos de $f(x) = \dfrac{b}{x^n}$ para diferentes b e n.

Proposição 4.4. *Se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$ existem, então, para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:*

1. $$\lim_{x \to \pm\infty} \Big[\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\Big] = \alpha \lim_{x \to \pm\infty} f(x) + \beta \lim_{x \to \pm\infty} g(x),$$

2. $$\lim_{x \to \pm\infty} \Big[f(x)\, g(x)\Big] = \Big[\lim_{x \to \pm\infty} f(x)\Big]\Big[\lim_{x \to \pm\infty} g(x)\Big],$$

3. $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)}, \text{ se } \lim_{x \to \pm\infty} g(x) \neq 0.$$

Exemplo 4.5.

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(\dfrac{3}{x^3} + 5\big)$.

Aplicando diretamente a proposição anterior:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(\frac{3}{x^3} + 5\big) = \lim_{x \to +\infty} \big(\frac{3}{x^3}\big) + \lim_{x \to +\infty} 5 = 0 + 5 = 5.$$

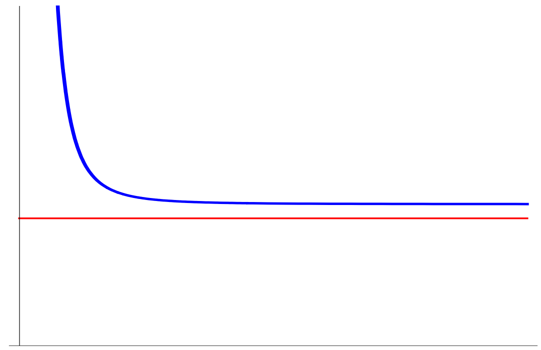


Figura 4.13: Gráfico de f quando $x \to +\infty$.

[2] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2}$.

Aplicando diretamente a proposição anterior :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2} = 5 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

4.3.1 Cálculo de Limites no Infinito de Funções Racionais

Proposição 4.5. *Seja*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ *e* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$ *são polinômios de coeficientes reais de graus* n *e* m*, respectivamente, isto é* $a_n \neq 0$ *e* $b_m \neq 0$*. Então:*

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & se \quad n = m \\ \\ 0 & se \quad n < m \end{cases}}$$

De fato:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + b_0} = \frac{x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots\ldots + \frac{a_0}{x^n}\right]}{x^m \left[b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots\ldots + \frac{b_0}{x^m}\right]}.$$

Aplicando limite e as propriedades da proposição 4.4, obtemos o resultado. Para $n > m$, veja o próximo parágrafo.

Exemplo 4.6.

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 5x^3 + x + 2}$.

Como $n < m$, temos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 5x^3 + x + 2} = 0$.

[2] Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2}$.

Como $n = m$, temos: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2} = \dfrac{2}{3}$.

[3] Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}$.

Neste problema, a função não é racional, mas utilizaremos a mesma idéia dos exercícios anteriores:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-5}} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+2\,x+1}{x^2-5}} \\ &= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2\,x+1}{x^2-5}} = \sqrt{1} = 1.\end{aligned}$$

[4] Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}$.

Aparentemente este limite é análogo ao do exemplo [3]; mas devemos ter cuidado, pois, $x \to -\infty$, significa que $x < 0$; logo, consideramos $\sqrt{x^2} = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-5}} = \lim_{-x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}} = -1.$$

4.4 Limites Infinitos

Seja f uma função definida num domínio D, que pode ser um intervalo ou uma reunião de intervalos. Seja a um ponto que não pertence necessariamente a D, mas tal que nas proximidades de a existam pontos de D; em outras palavras, qualquer intervalo aberto que contem a intersecta D de forma não vazia.

Definição 4.4.

1. *Diz-se que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, *quando para todo* $A > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > A$, *se* $x \in D$ *e* $0 < |x-a| < \delta$.
2. *Diz-se que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, *quando para todo* $B > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < -B$, *se* $x \in D$ *e* $0 < |x-a| < \delta$.

Analogamente podemos definir limites laterais infinitos. Assim:

Diz-se que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, quando para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ se $a-\delta < x < a$.

Diz-se que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, quando para todo $B > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < -B$ se $a < x < a+\delta$.

Não é difícil ver que para todo número natural n, temos:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Proposição 4.6. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Então*

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *se* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ *para valores de x próximos de a.*

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ *se* $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ *para valores de x próximos de a.*

Exemplo 4.7.

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

Como $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$, observando que se $x > \dfrac{2}{3}$, mas $x \neq 1$, então $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2} > 0$,aplicando o teorema, temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = +\infty.$$

[2] Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-5}{(x-2)^2}$.

Como $\lim\limits_{x\to 2}(2x-5) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 1}(x-2)^2 = 0$, observando que se $x < \dfrac{5}{2}$, mas $x \neq 2$, então $\dfrac{2x-5}{(x-2)^2} < 0$, aplicando o teorema, temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{(x-2)^2} = -\infty.$$

Analogamente podemos definir outros tipos de limites. Como exercício, defina os seguintes limites:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$

Corolário 4.3. *Para funções racionais, temos:*

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & se \quad n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & se \quad n = m \\ 0 & se \quad n < m \end{cases}.$$

Exemplo 4.8.

[1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\big[x^5+3x^3+x+1\big]$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right]=1$; temos,

$$\lim_{x\to+\infty}\big[x^5+3x^3+x+1\big]=\lim_{x\to+\infty}x^5\left[1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right]=\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty.$$

[2] $\lim\limits_{x\to-\infty}\big[x^5+3x^3+x+1\big]$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right]=1$; temos,

$$\lim_{x\to-\infty}\big[x^5+3x^3+x+1\big]=\lim_{x\to-\infty}x^5\left[1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right]=\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty.$$

[3] $\lim\limits_{x\to-\infty}\big[x^6+x^3+1\big]$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^6}\right]=1$; temos,

$$\lim_{x\to-\infty}\big[x^6+x^3+1\big]=\lim_{x\to-\infty}x^6\left[1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}\right]=\lim_{x\to-\infty}x^6=+\infty.$$

[4] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^5+1}{x^4+5x^3+2}\right]$.

Como $n>m$, pelo corolário anterior: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^5+1}{x^4+5x^3+2}\right]=+\infty.$

4.5 Símbolos de Indeterminação

Nas operações com limites, muitas vezes aparecem os símbolos:

$$\infty-\infty,\ \infty\cdot 0,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

chamados símbolos de indeterminação. Quando aparece um destes símbolos no cálculo de um limite, nada se pode dizer sobre este limite. Ele poderá existir ou não, dependendo da expressão da qual se está calculando o limite.

Exemplo 4.9.

[1] Se $f(x)=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ e $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, onde f e g são definidas em $\mathbb{R}-\{1\}$, então,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}g(x)=+\infty,$$

mas $\lim\limits_{x\to1}\big(f(x)-g(x)\big)=1$.

[2] Se $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ e $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, onde f e g são definidas em $\mathbb{R}-\{1\}$, então, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$, mas $\lim\limits_{x\to1}\big(f(x)-g(x)\big)$ não existe.

4.6 Limites Fundamentais

[1] Primeiro limite fundamental:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x}$$

Façamos uma tabela usando a função $f(x) = \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^x$

$x > 0$	$f(x)$
10^1	2.59374
10^2	2.70481
10^3	2.71692
10^4	2.71815
10^5	2.71827

$x < 0$	$f(x)$
-10^1	2.86797
-10^2	2.73200
-10^3	2.71964
-10^4	2.71842
-10^5	2.71829

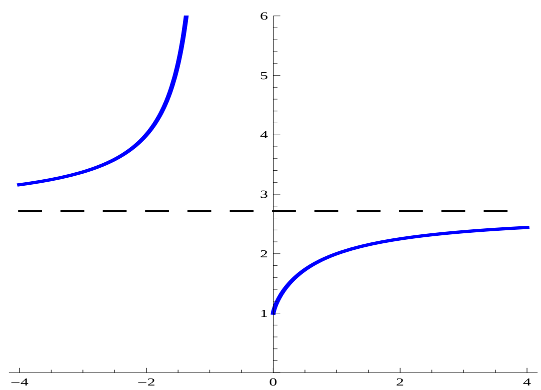


Figura 4.14: Gráfico de $f(x) = \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x$ para $x \neq 0$ e $y = e$.

É possível provar que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x = e,$$

onde $e \simeq 2.71828...$ é o número de Euler.

A prova direta desta propriedade poderá ser encontrada na bibliografia intermediária ou avançada.

[2] Segundo limite fundamental.

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, então:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \big(\frac{a^x - 1}{x}\big) = ln(a)}$$

Em particular, e é a única base da exponencial tal que:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \big(\frac{e^x - 1}{x}\big) = ln(e) = 1}$$

Exemplo 4.10.

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}$. Seja $x=\frac{1}{t}$; se $x\to 0$ então $t\to\pm\infty$; logo:

$$\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\pm\infty}\big(1+\frac{1}{t}\big)^{t}=e.$$

[2] Calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(1+\dfrac{b}{x}\big)^{x}$, onde b é um número real.

Seja $\dfrac{x}{b}=t$, então:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(1+\frac{b}{x}\big)^{x}=\left[\lim_{t\to\pm\infty}\big(1+\frac{1}{t}\big)^{t}\right]^{b}=e^{b}.$$

[3] Calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(1+\dfrac{1}{x+b}\big)^{x}$, onde b é um número real.

Seja $x+b=t$, então:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(1+\frac{1}{x+b}\big)^{x}=\lim_{t\to\pm\infty}\big(1+\frac{1}{t}\big)^{t-b}=e.$$

[4] Calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(\dfrac{x+2}{x-1}\big)^{x+b}$, onde b é um número real.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(\frac{x+2}{x-1}\big)^{x+b}=\lim_{x\to\pm\infty}\big(1+\frac{3}{x-1}\big)^{x}\lim_{x\to\pm\infty}\big(1+\frac{3}{x-1}\big)^{b}=e^{3}.$$

[5] Verifique que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=ln(a)$.

Seja $t=a^{x}-1$; então $ln(a^{x})=ln(t+1)$; logo $x\,ln(a)=ln(t+1)$ e $x=\dfrac{ln(t+1)}{ln(a)}$. Quando $x\to 0$ temos que $t\to 0$ e:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{ln(t+1)}{ln(a)}}=ln(a)\,\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{t}\,ln(t+1)}=ln(a)\,\lim_{t\to 0}\frac{1}{ln((1+t)^{\frac{1}{t}})}=ln(a).$$

[6] Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x}$, onde $a,\,b>0$ e $a,b\neq 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1+1-b^{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\big(\frac{a^{x}-1}{x}-\frac{b^{x}-1}{x}\big)=ln(a)-ln(b)=ln\big(\frac{a}{b}\big).$$

4.7 Assíntotas

Definição 4.5. *A reta $y=b$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $y=f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b\quad ou\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

Exemplo 4.11.

[1] Esboce o gráfico da função logística:

$$L(t) = \frac{A}{1 + B\,e^{-Ct}} \quad \text{onde} \quad A,\, B,\, C \in \mathbb{R}.$$

$Dom(L) = \mathbb{R}$ e a curva passa por $(0, \dfrac{A}{1+B})$. Por outro lado:

$$\lim_{t \to +\infty} L(t) = A;$$

Logo, $y = A$ é uma assíntota horizontal. $\lim\limits_{t \to -\infty} L(t) = 0$; logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

No caso em que $L = L(t)$ descreve o crescimento de uma população, o valor A é dito valor limite da população e corresponde ao número máximo de indivíduos que um ecossistema pode suportar.

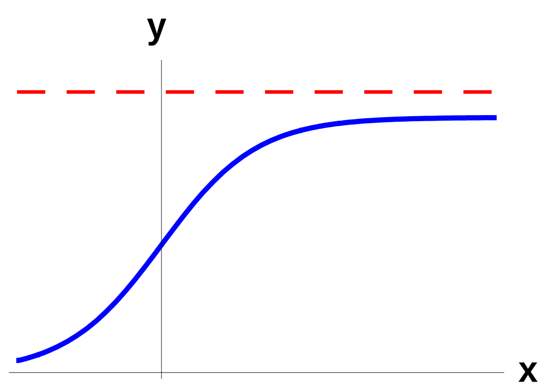


Figura 4.15: Gráfico da função logística.

[2] A função de Gompertz é dada por:

$$N(t) = c\,a^{R^t}, \quad 0 < R < 1.$$

Apliquemos logaritmo a ambos os lados da função de Gompertz: $ln(N(t)) = ln(c) + ln(a)\ R^t$; logo:

$$\lim_{t \to +\infty} R^t = 0 \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} N(t) = c,$$

isto é, $y = c$ é uma assíntota horizontal de $N(t)$

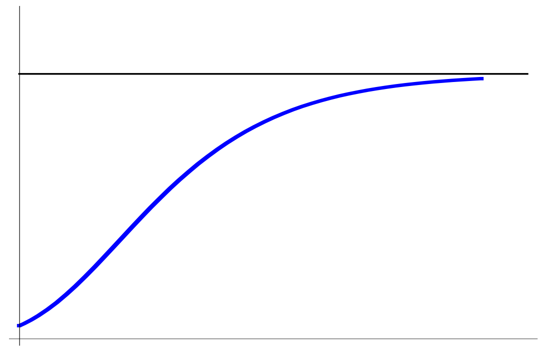


Figura 4.16: Curva de Gompertz.

Definição 4.6. *A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Em geral, se o $Dom(f) = \mathbb{R}$, então o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

4.7.1 Esboço Aproximado de Funções Racionais

Seja $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tal que $a \notin Dom(f)$, isto é, $Q(a) = 0$; então:

$$Q(x) = (x - a)^n \, Q_1(x), \quad n > 1$$

e $Q_1(a) \neq 0$; analogamente, se $P(a) = 0$, então $P(x) = (x - a)^m \, P_1(x)$, $m \geq 0$ e $P_1(a) \neq 0$. Se $m < n$, fazendo $k = n - m$, temos:

$$f(x) = \frac{1}{(x - a)^k} \, f_1(x),$$

onde $f_1(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ é uma função definida em a. Então $\lim\limits_{x \to a^\pm} |f(x)| = \infty$.

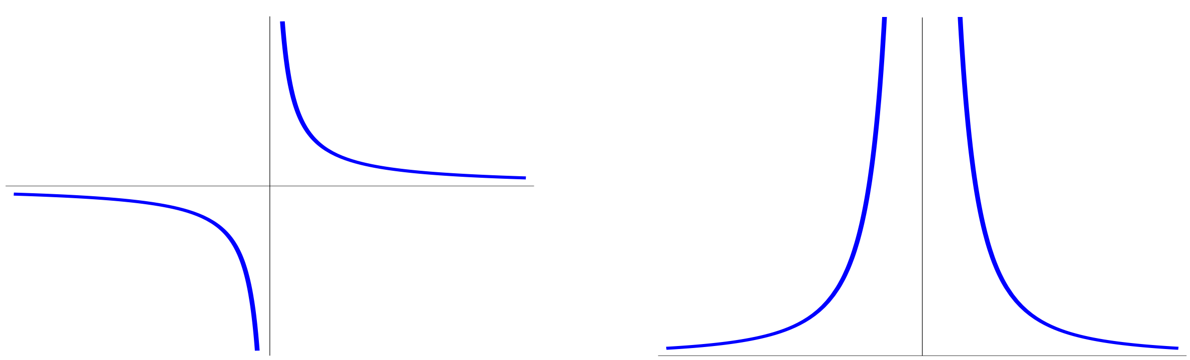


Figura 4.17: Gráficos de f ao redor do ponto a, para k ímpar e k par e $f_1(a) > 0$.

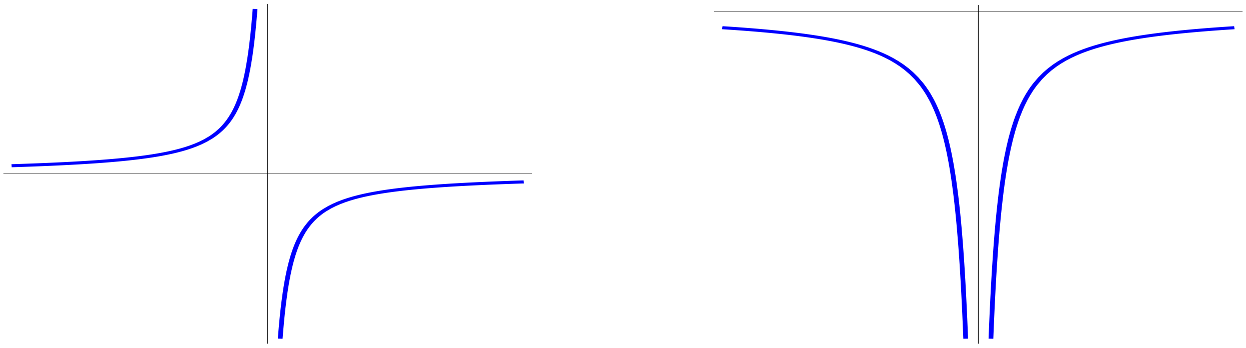


Figura 4.18: Gráficos de f ao redor do ponto a, para k ímpar e k par e $f_1(a) < 0$.

Logo, a função possui uma assíntota vertical em cada raiz do polinômio $Q(x)$.

Exemplo 4.12.

[1] Esboce o gráfico de $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e a curva passa por $(0, 0)$. Por outro lado:

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{x - 1},$$

onde $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $k = 1$ e $f_1(1) > 0$; então, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, Analogamente:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\, f_1(x),$$

onde $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $k = 1$ e $f_1(-1) > 0$, então:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

logo, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Por outro lado, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

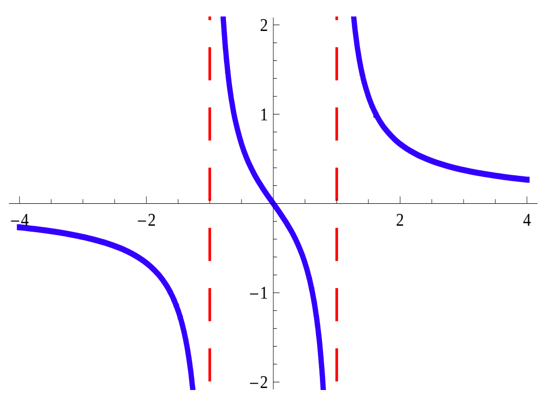


Figura 4.19: Gráfico de $y = \frac{x}{x^2-1}$.

[2] Esboce o gráfico de $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,\,1\}$ e a curva passa por $(0,0)$. Por outro lado:

$$f(x)=\frac{f_1(x)}{x-1},$$

onde $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$; $k=1$ e $f_1(1)>0$; então, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$. Analogamente:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\,f_1(x),$$

onde $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$; $k=1$ e $f_1(-1)<0$; então,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty;$$

logo $x=1$ e $x=-1$ são assíntotas verticais. Por outro lado, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$; logo, $y=1$ é uma assíntota horizontal.

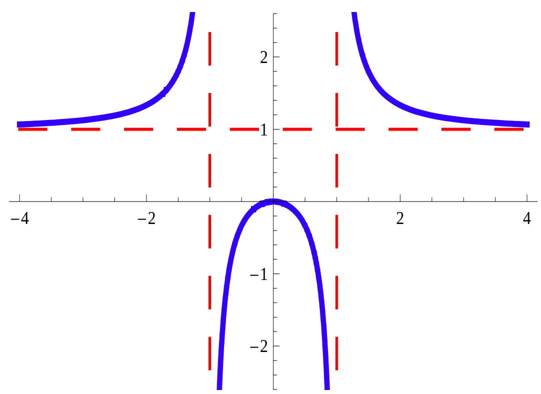


Figura 4.20: gráfico de $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

4.8 Continuidade

A noção de continuidade em Matemática é a que utilizamos no dia a dia, isto é, onde não há interrupção ou, então, onde não existem partes separadas umas das outras.

Nos parágrafos anteriores, estudamos o comportamento de uma função $y=f(x)$ para valores de x próximos de um ponto a. Pode acontecer que o limite de $f(x)$ quando x tende para a exista, mas que f não seja definida em a; ou ainda, pode acontecer que o limite seja diferente de $f(a)$.

Estudaremos, agora, uma classe especial de funções, onde se verifica que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Definição 4.7. *Seja f uma função e $a \in Dom(f)$, onde $Dom(f)$ é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos. f é dita* **contínua em** a*, se:*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe.*

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se f não verifica qualquer das condições da definição, f é dita **descontínua** em a.

Exemplo 4.13.

[1] Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$, mas f não é contínua em 1.

De fato, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \neq f(1)$. Veja o desenho:

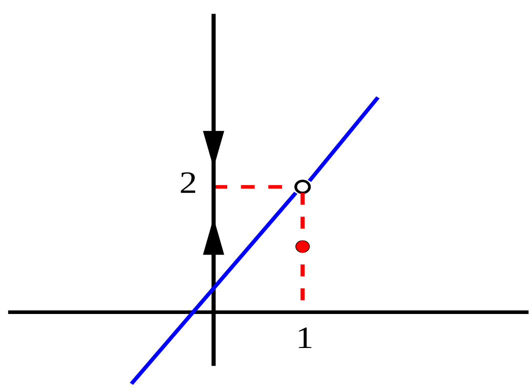


Figura 4.21: Exemplo [1].

Observe que se redefinirmos a função, fazendo $f(1) = 2$, a função será contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Verifique este fato.

[2] Seja:

$$u_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq c \\ 0 & \text{se} \quad x < c. \end{cases}$$

A função degrau unitário $y = u_c(x)$ não é contínua em c, pois não existe $\lim\limits_{x \to c} u_c(x)$.

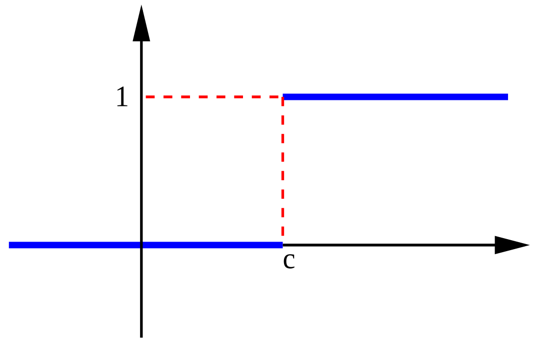


Figura 4.22: Função degrau unitário.

Intuitivamente, a continuidade de uma função em um ponto indica que o gráfico da função não apresenta saltos nesse ponto (veja o desenho anterior).

[3] $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ é uma função contínua em todo ponto de seu domínio.

De fato $f(x) = x + 1$ se $x \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0 + 1 = f(x_0)$.

[4] Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ A\,x + B & \text{se} \quad -1 < x < 3 \\ -2 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Determine A e B tais que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Os pontos problemáticos do domínio de f são $x = -1$ e $x = 3$. Utilizando a definição, f é contínua se:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x), \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} -A + B = 2 \\ 3\,A + B = -2; \end{cases}$$

logo, $A = -1$ e $B = 1$. Então:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 - x & \text{se} \quad -1 < x < 3 \\ -2 & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

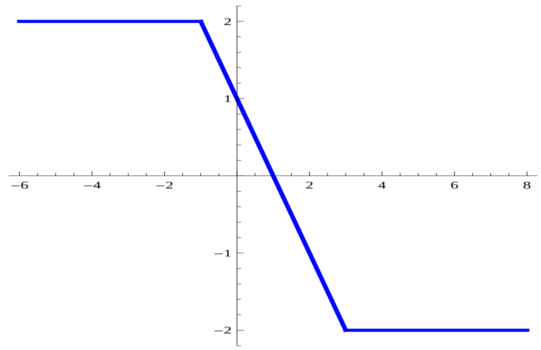


Figura 4.23: Gráfico de f do exemplo [4].

A continuidade também pode ser expressa em função de ε e δ.

De fato, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ significa que: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in Dom(f)$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Em outras palavras, f é contínua em a se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ desde que $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Dom(f)$.

Proposição 4.7. *Sejam f e g funções contínuas no ponto a. Então:*

1. *$\alpha\, f + \beta\, g$ são contínuas em a, para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.*
2. *$f\, g$ é contínua em a.*
3. *$\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, se $a \in Dom(\dfrac{f}{g})$.*

As provas destas propriedades decorrem imediatamente das definições.

Definição 4.8. *Uma função f é dita contínua em $A \subset \mathbb{R}$ se f é contínua em cada ponto de A. Se f é contínua em A e $B \subset A$, então, f é contínua em B.*

Exemplo 4.14.

[1] Os polinômios são funções contínuas em $\mathbb{R}$, pois são expressos por somas e produtos de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

[2] As funções racionais são funções contínuas no seu domínio.

[3] As funções exponenciais são funções contínuas em $\mathbb{R}$.

[4] As funções logarítmicas são funções contínuas em $(0, +\infty)$.

Proposição 4.8. *Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b. Então:*

$$\boxed{\lim_{x\to a} \big(g \circ f\big)(x) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big)}$$

A prova segue das definições.

Exemplo 4.15.

Como aplicação direta desta propriedade temos:

[1] A função $g(x)=e^x$ é contínua em $\mathbb{R}$; logo, se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, então:

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

[2] A função $g(x)=ln(x)$ é contínua em $(0,+\infty)$; logo, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)\in(0,+\infty)$, então:

$$\lim_{x\to a} ln\big(f(x)\big) = ln\big(\lim_{x\to a} f(x)\big).$$

[3] $\lim\limits_{x\to 1} ln\left[\dfrac{x^5+x^3+1}{x^2+1}\right] = ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+x^3+1}{x^2+1}\right] = ln\big(\dfrac{3}{2}\big).$

[4] $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x^2-1}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)} = e^0 = 1.$

Teorema 4.4. *Sejam f e g funções tais que $g\circ f$ esteja bem definida. Se f é contínua no ponto a e g é contínua em $f(a)$, então $g\circ f$ é contínua em a.*

Exemplo 4.16.

[1] A função $h(x)=|x^2+2x+1|$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, pois h é a composta das seguintes funções: $f(x)=x^2+2x+1$ e $g(x)=|x|$; ambas funções são contínuas em $\mathbb{R}$. (Verifique !).

[2] A função $h(x)=e^{x^2+5x+2}$ é contínua. (Verifique !).

O teorema seguinte estabelece que, com hipóteses adequadas, uma função f, definida num intervalo fechado $[a,b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$; em outras palavras, para que f passe de $f(a)$ a $f(b)$ tem que passar por todos os valores intermediários. A definição anterior de continuidade foi feita considerando como domínios intervalos abertos ou reunião de intervalos abertos; então necessitamos da seguinte definição:

Definição 4.9. *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; f é contínua em $[a,b]$ se:*

1. *f é contínua em (a,b).*
2. *$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.*
3. *$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.*

As condições 2 e 3, são chamadas continuidades laterais, à direita e à esquerda, respectivamente.

Teorema 4.5. (do Valor Intermediário) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e*

$$f(a) < d < f(b) \quad ou \quad f(b) < d < f(a),$$

então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Para a prova, veja **[TA]** ou **[?]**.

Exemplo 4.17.

Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - \sqrt{x^4+1} + 2$; então f assume o valor $\dfrac{3}{2}$.

De fato f é contínua e $1 - \sqrt{2} = f(-1) < \dfrac{3}{2} < f(1) = 3 - \sqrt{2}$; logo, do teorema, temos que existe $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = \dfrac{3}{2}$.

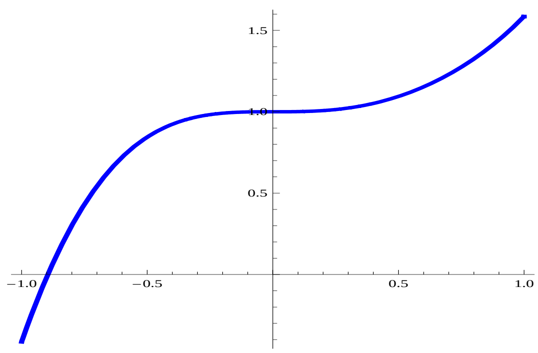


Figura 4.24:

Corolário 4.6. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, ou seja $f(a)\,f(b) < 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

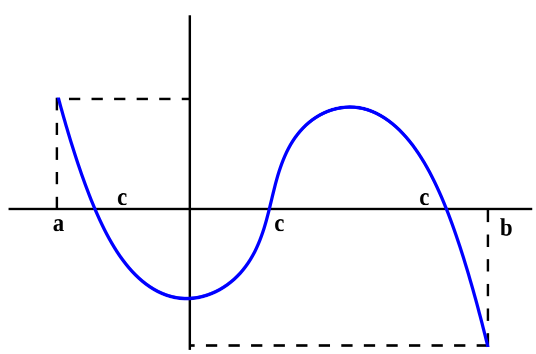


Figura 4.25:

Aplicações

Este resultado pode ser utilizado para localizar as raízes reais de um polinômio de grau ímpar. De fato, seja

$$f(x) = x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\,x + a_n$$

uma função polinomial de grau n ímpar, $a_i \in \mathbb{R}$. Para os $x \neq 0$, escrevemos:

$$f(x) = x^n \left[1 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right].$$

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right] = 1$; então,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

pois, n é ímpar. Logo, existem $x_1 < x_2$ tais que $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$. f é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$; pelo corolário, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = 0$.

Se n é par, a conclusão é falsa. O polinômio $f(x) = x^2 + 1$ não possui raízes reais.

Exemplo 4.18.

[1] A equação $x^3 - 4\,x + 2 = 0$ possui 3 raízes reais distintas.

De fato, a função $f(x) = x^3 - 4\,x + 2$ é contínua em $\mathbb{R}$; logo, é contínua em qualquer intervalo fechado.

Considere:

x_1	x_2	$f(x_1)\cdot f(x_2)$	Conclusão
-3	-2	-26	Existe $c_1 \in (-3,-2)$ tal que $f(c_1) = 0$.
1	0	-2	Existe $c_1 \in (0,1)$ tal que $f(c_2) = 0$.
1	2	-2	Existe $c_3 \in (1,2)$ tal que $f(c_3) = 0$.

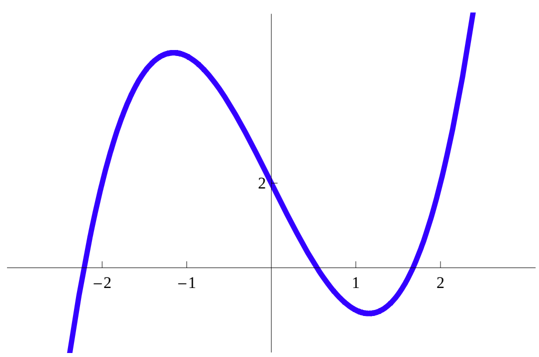


Figura 4.26: Exemplo [1]

[2] A equação $2^x\,ln(x^2+1) + x^3\,log_6(e^{-x}) - \dfrac{1}{20} = 0$ possui pelo menos 4 raízes reais distintas no intervalo $[-1, 2]$.

De fato, a função $f(x) = 2^x\,ln(x^2+1) + x^3\,log_6(e^{-x}) - \dfrac{1}{20}$ é contínua em $[-1,2]$ e

$$f(-1) \simeq -0.26,\ \ f(-0.5) \simeq 0.072,\ \ f(0) = -0.05,\ \ f(0.5) \simeq 0.23\ \text{ e }\ f(2) \simeq -2.542;$$

então:

x_1	x_2	$f(x_1)\cdot f(x_2)$	Conclusão
-1	-0.5	-0.019	Existe $c_1 \in (-1,-0.5)$ tal que $f(c_1)=0.$
-0.5	0	-0.003	Existe $c_1 \in (-0.5,0)$ tal que $f(c_2)=0.$
0	0.5	-0.011	Existe $c_3 \in (0,0.5)$ tal que $f(c_3)=0.$
0.5	2	-0.586	Existe $c_4 \in (0.5,2)$ tal que $f(c_4)=0.$

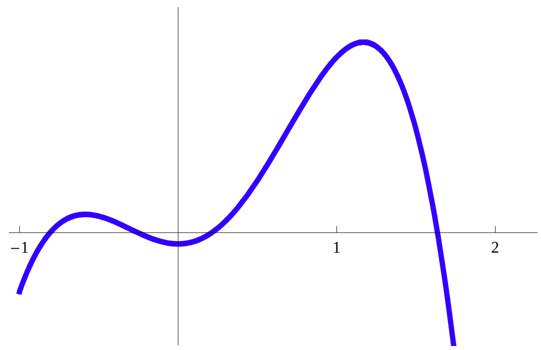


Figura 4.27: Exemplo [2]

O seguinte algoritmo serve para determinar aproximadamente as raízes de uma equação, utilizando o corolário:

Seja f contínua em $[a,b]$.

i) Se $f(a)\,f(b)<0$, então, existe pelo menos um $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

ii) Considere:

$$m_1=\frac{a+b}{2};$$

se $f(m_1)=0$, achamos a raiz. Caso contrário, $f(a)\,f(m_1)<0$ ou $f(m_1)\,f(b)<0$.

iii) Se $f(a)\,f(m_1)<0$, então, $f(x)=0$ tem solução em $[a,m_1]$. Considere:

$$m_2=\frac{a+m_1}{2};$$

se $f(m_2)=0$, achamos a raiz. Caso contrário $f(a)\,f(m_2)<0$ ou $f(m_2)\,f(m_1)<0$.

iv) Se $f(m_2)\,f(m_1)<0$, então, $f(x)=0$ tem solução em $[m_2,m_1]$. Considere:

$$m_3=\frac{m_1+m_2}{2};$$

se $f(m_3)=0$, achamos a raiz. Caso contrário $f(m_3)\,f(m_2)<0$ ou $f(m_3)\,f(m_1)<0$.

Continuando obtemos m_n tal que $|f(c)-f(m_n)|$ é menor que a metade do comprimento do último intervalo.

Exemplo 4.19.

No exemplo [1] temos $f(x) = x^3 - 4\,x + 2$.

i) $f(1)\,f(2) < 0$; seja $m_1 = \dfrac{3}{2}$, como $f(m_1) \neq 0$ e $f(m_1)\,f(2) < 0$, então, procuramos a solução no intervalo $[m_1, 2]$; seja:

$$m_2 = \frac{m_1 + 2}{2} = \frac{7}{4}.$$

ii) Como $f(m_2) \neq 0$ e $f(m_1)\,f(m_2) < 0$, então, procuramos a solução no intervalo $[m_1, m_2]$; seja:

$$m_3 = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{13}{8}.$$

Assim, continuando podemos, por exemplo, obter

$$m_{14} = \frac{27445}{16384} \cong 1.675109$$

no intervalo $[1.67504, 1.67517]$ e tal que $f(m_{14}) = -0.0000928$.

4.9 Exercícios

1. Calcule os seguintes limites usando tabelas:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+1}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2\,x^2+5\,x-4}{x-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\big(x^2-\dfrac{2^x}{1000}\big)$

(h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)^2}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x^2+x+2}$

(k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)}{x-1}$

2. Verifique se são corretas as seguintes afirmações:

(a) $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=x+3$

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)$

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$

(c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+2\,a\,x+a^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6+2}{10x^7-2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{2-\sqrt{2x}}$

(h) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{3x^2-4x+1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{x^2-2x}$

(k) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(o) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3-x-1}{x^2-1}$

(p) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+2}}$

(q) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(r) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(s) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{2\,x^2+5\,x-7}$

(t) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt{x+2}}$

4. Verifique se os seguintes limites existem:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} |x-3|$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-6\,x^2+6\,x-5}{x^2-5\,x}$

(e) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+3x-4}{x^3+4\,x^2-3\,x-12}$

(f) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{a}\left|\dfrac{b}{x}\right|$

5. Calcule os seguintes limites no infinito:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+5x+1}{x^4+5x^3+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+3x+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+1})$

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+3}}$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})$

(l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^5+1}{x^6+1}$

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x+1}{\sqrt[3]{x^9+1}}$

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2}}{x^3}$

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{x^3+5}}$

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\,x^2-x+3}{x^3+1}$

(r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^2+8}{x^2+x}}$

(s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4\,x}{x^2-4\,x+3}$

(t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\,x^4+x+1}{x^4-5}$

6. Calcule os seguintes limites infinitos:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+3x+1}{2x^2+x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (5-4x+x^2-x^5)$

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+1}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[m]{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{3-x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

(k) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

(l) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ln(x)}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} ln(|x|)$

(o) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^+} \dfrac{x^2}{4-9\,x^2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(q) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

(r) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}^-} \dfrac{1}{5\,x-3}$

7. Se $f(x)=3\,x-5$ e $g(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}$, calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}(g-f)(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(g\,f)(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}(f\,f)(x)$

(g) $\lim\limits_{x\to 2}(f\circ g)(x)$

(h) $\lim\limits_{x\to 2}(g\circ f)(x)$

(i) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}(f\circ g\circ f)(x)$

(j) $\lim\limits_{x\to 2} ln(|f(x)|)$

8. Calcule $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t+a)-f(a)}{t}$, se:

(a) $f(x)=x^2,\ a=2$

(b) $f(x)=x^2+1,\ a=2$

(c) $f(x)=3\,x^2-x,\ a=0$

(d) $f(x)=|x|^2,\ a=2$

(e) $f(x)=\sqrt{x},\ a=1$

(f) $f(x)=x\,(1-x),\ a=1$

(g) $f(x)=(x-3)^2,\ a=1$

(h) $f(x)=ln(x),\ a=1$

(i) $f(x)=e^{2x},\ a=0$

9. O custo em $u.m.$ (unidades monetárias) para remover $x\%$ dos detritos tóxicos despejados num aterro é dado por:

$$C(x)=\frac{0.8\,x}{100-x},$$

para $0<x<100$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to 100^-} S(x)$.

(b) Interprete o resultado obtido.

10. Durante uma epidemia de dengue, o número de pessoas que adoeceram, num certo bairro, após t dias é dado por:

$$L(t) = \frac{100000}{1 + 19900\, e^{-0.8t}}.$$

(a) Determine a quantidade máxima de indivíduos atingidos pela doença.

(b) Esboce o gráfico de L.

11. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \dfrac{1}{(x+1)\,(x^3-1)}$

(b) $y = \dfrac{x}{(x+1)\,(x^3-1)}$

(c) $y = \dfrac{1}{(x-1)\,(x^3+1)}$

(d) $y = \dfrac{x}{(x-1)\,(x^3+1)}$

(e) $y = \dfrac{1}{(x-3)\,(x+2)\,(x^2+1)}$

(f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)\,(x+2)\,(x^2-1)}$

12. Use a continuidade da função para calcular o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

13. Determine o valor de L para que as seguintes funções sejam contínuas nos pontos dados:

$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ L & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$.

$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ L & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$, no ponto $x = 3$.

$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x + 2L & \text{se} \quad x \geq -1 \\ L^2 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$, no ponto $x = -1$.

$(d) \quad f(x) = \begin{cases} 4 \times 3^x & \text{se} \quad x < 0 \\ 2\,L + x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$.

$(e) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ L & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$.

$(f) \quad f(x) = \begin{cases} 4 - x + x^3 & \text{se} \quad \leq 1 \\ 9 - L\,x^2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$, no ponto $x = 1$.

14. Verifique se as seguintes funções são contínuas.

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-5x+6} & x \neq 2,\, 3 \\ 1 & x = 2 \\ 9 & x = 3 \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < -1 \\ ln(2-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} & x > 1 \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-x^3} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\,(2x^2+3) & x \leq 1 \\ 6-5x & 1 < x < 3 \\ x-3 & x \geq 3 \end{cases}$$

15. Verifique se as seguintes equações admitem, pelo menos, uma raiz real:

(a) $x^3 + x^2 - 4x - 15 = 0$

(b) $2^x + x^2 = 0$

(c) $x^5 - x^3 + x^2 = 0$

(d) $x^7 + x^5 + 1 = 0$

Capítulo 5

APLICAÇÕES DE LIMITES E CONTINUIDADE

Neste capítulo apresentaremos diversos exemplos e algumas aplicações que envolvem os conceitos de limite e de continuidade, estudados anteriormente.

Exemplo 5.1.

[1] Uma montadora de computadores determina que um empregado após x dias de treinamento, monta m computadores por dia, onde:

$$m(x) = \frac{20\,x^2}{x^2 + x + 5}.$$

Qual é o comportamento de $m = m(x)$ para treinamentos longos?

Observe que:

$$\lim_{x \to +\infty} m(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{20\,x^2}{x^2 + x + 5} = 20.$$

Logo, após um longo treinamento, um empregado pode montar 20 computadores por dia.

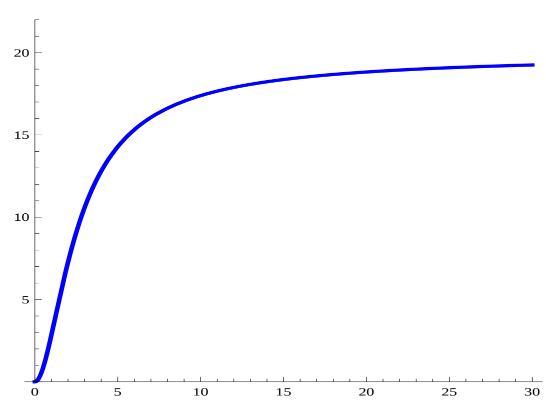


Figura 5.1: Gráfico do exemplo [1].

[2] O custo para produzir x unidades de um certo produto é dado por $C(x) = 0.25\,x + 3600$ em reais.

(a) Determine o custo médio quando x cresce.

(b) Interprete o resultado.

(a) Primeiramente, $CM_e(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 0.25 + \dfrac{3600}{x}$; então:

$$\lim_{x\to+\infty} CM_e(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[0.25 + \frac{3600}{x}\right] = 0.25.$$

(b) Isto é, quando o bem em questão é produzido em grande escala o custo médio tende a estabilizar-se em 0.25 reais.

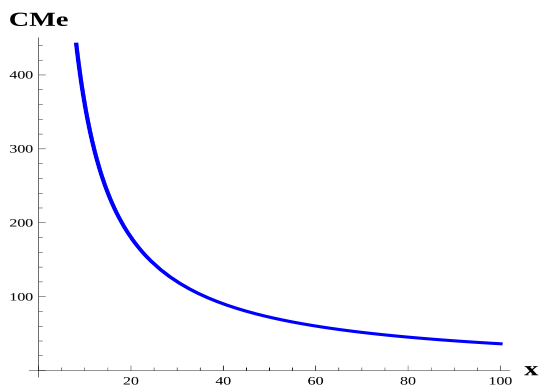


Figura 5.2: Gráfico do exemplo [2].

[3] Um governo determina que o custo para despoluir $x\%$ de metais pesados que contaminam uma reserva de água doce é dado por:

$$C(x) = \frac{120000\,x}{100 - x},$$

medido em dólares.

(a) Qual é o custo para eliminar a metade dos metais pesados?

(b) Com 1000000 dólares, que percentual da reserva fica despoluida? É economicamente viável despoluir totalmente a reserva?

(a) Calculamos $C(50) = US\$\,120000$.

(b) Agora, devemos resolver a equação:

$$1000000 = \frac{120000\,x}{100 - x} \Longrightarrow x = \frac{625}{7} \simeq 89.2\,\%.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 100^-} C(x) = +\infty, ;$$

isto implica em que à medida que nos aproximamos para despoluir toda a reserva, os custos crescem arbitrariamente, isto é, é economicamente inviável, despoluir toda a reserva.

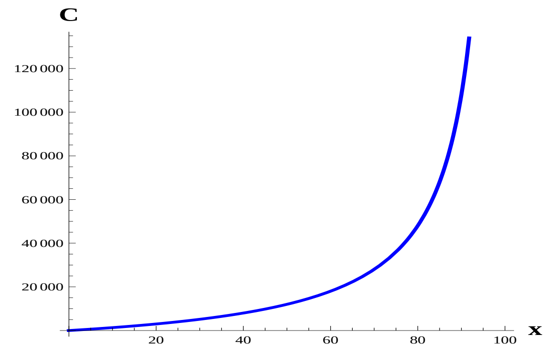


Figura 5.3: Gráfico do custo para despoluir.

[4] A função de produção de um certo bem em relação à quantidade de matéria prima, em quilogramas, é dada por:

$$P(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Determine e interprete a produção quando se tem 2 quilogramas de matéria prima.

Como $P = P(x)$ não está definida para $x = 2$, devemos calcular:

$$\lim_{x \to 2} P(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4,$$

isto é, são produzidas 4 unidades.

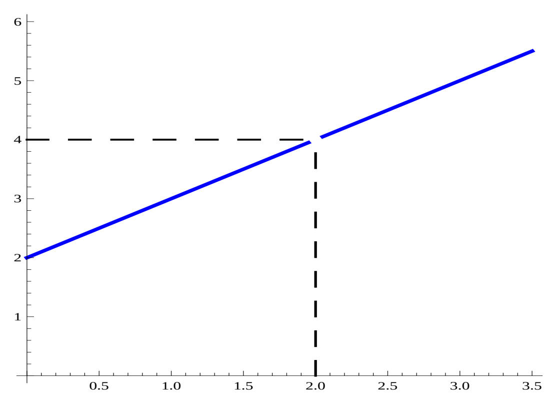


Figura 5.4: Comportamento de $P = P(x)$.

[5] Modelou-se a evolução da população de uma certa cidade, após t anos, a partir de 2009 por:

$$E(t) = 20000 + \frac{15000\,t}{t^2 + 2\,t + 10}.$$

Determine o comportamento da população após $t = 3$, $t = 5$, $t = 15$ anos. Qual é o comportamento a longo prazo?

Como a função é contínua, primeiramente calculamos:

t	$E(t)$
3	21800
5	21666.7
15	20849.1

A longo prazo, temos que:

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = \lim_{t\to+\infty} \left[20000 + \frac{15000\,t}{t^2+2\,t+10}\right] = 20000.$$

Isto é, a longo prazo a população fica estável.

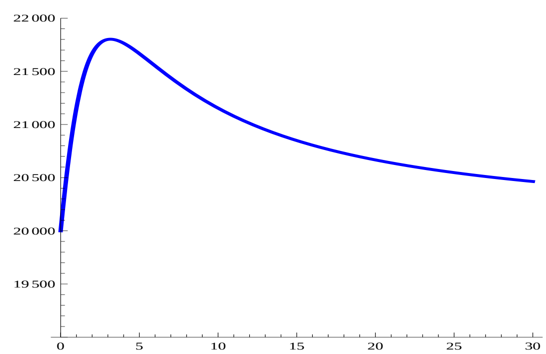


Figura 5.5: Comportamento da população.

5.1 Juros Compostos

Sabemos que se uma quantia A_0 é investida a uma taxa r de juros compostos, capitalizados m vezes ao ano, o saldo $A(t)$, após t anos é dado por:

$$A = A_0\,[1+\frac{r}{m}]^{mt}.$$

Se os juros forem capitalizados continuamente, o saldo deverá ser:

$$A = \lim_{m\to+\infty} A_0\,\left[1+\frac{r}{m}\right]^{mt} = A_0 \lim_{m\to+\infty} \left[\left[1+\frac{r}{m}\right]^{m}\right]^{t} = A_0\;e^{rt}.$$

Analogamente, com a taxa efetiva:

$$\lim_{m\to+\infty} r_{ef} = e^r - 1.$$

e o valor atual da quantia (desconto):

$$A_0 = \lim_{m\to+\infty} A\,\left[1+\frac{r}{m}\right]^{-mt} = A\,e^{-rt}.$$

Exemplo 5.2.

[1] Os juros de uma aplicação de renda fixa é de 6% ao ano, compostos diariamente. São aplicados R$100,00 neste fundo. Determine o ganho após 10 anos, considerando a taxa de 6% de juros compostos continuamente.

Calculando diretamente $A(t) = 100 \times e^{0.06t}$, logo $A(10) \simeq 182.21$ reais.

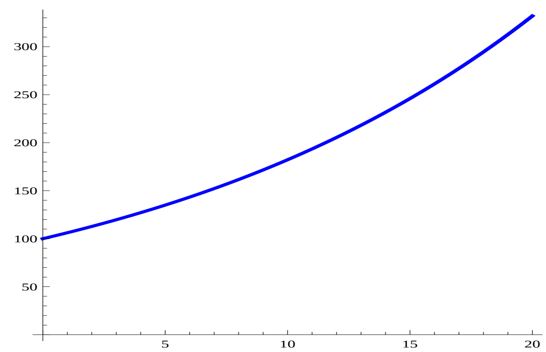


Figura 5.6: Comportamento da aplicação.

[2] Considere um certo investimento que paga 14% de juros anuais sobre um depósito inicial de R$ 3000. Os ganhos da aplicação após 5 anos foram estimados por:

$$A = 3000\,(1 + 0.14)^{5t},$$

onde t é medido em anos. Calcule os ganhos trimestrais e diários da aplicação. Que acontece no caso de os juros serem aplicados continuamente?

Devemos calcular $A_1 = A|_{t=1/4}$ (trimestral), $A_2 = A|_{t=1/365}$ (diária) e o limite de A, respectivamente:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3533.88 \text{ reais} \\ A_2 &= 3005.35 \text{ reais e} \\ A &= 6041.25 \text{ reais.} \end{aligned}$$

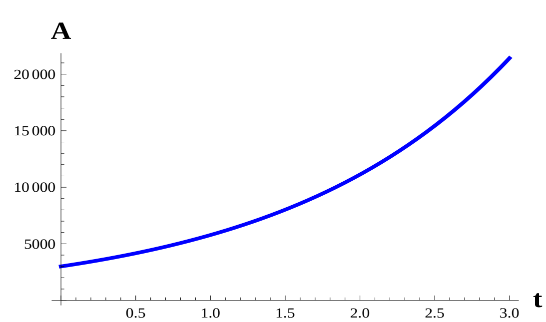


Figura 5.7: Gráfico de $A = A(t)$.

Muitas funções utilizadas em Economia e em Administração não são contínuas e apresentam uma quantidade finita de pontos de descontinuidade. Por exemplo, a função de custo é frequentemente discreta devido à natureza dos bens que ela representa.

Exemplo 5.3.

[1] Um distribuidor de refrigerantes vende um certo tipo de refrigerante segundo a seguinte lista de preço: R$ 10 por caixa, na compra de até 30 caixas. R$ 8 por caixa, na compra de mais de 30 caixas e menos de 70 caixas. R$ 5 por caixa, na compra de mais de 70 caixas e menos que 150 caixas e R$ 4 por caixa , na compra acima de 150 caixas. Ache a função que representa esta lista e esboce seu gráfico.

Se x é a quantidade de caixas e p o preço total, a função preço é:

$$p(x) = \begin{cases} 10\,x & \text{se} \quad 0 \le x \le 30 \\ 8\,x & \text{se} \quad 30 < x \le 70 \\ 5\,x & \text{se} \quad 70 < x \le 150 \\ 4\,x & \text{se} \quad 150 < x. \end{cases}$$

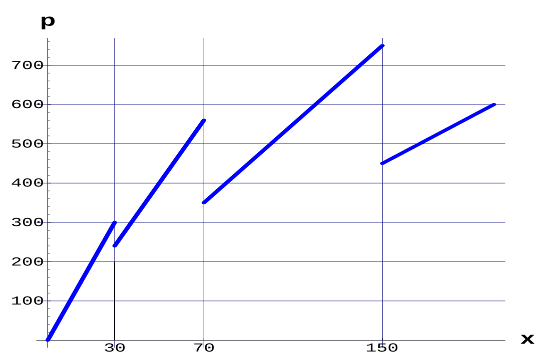


Figura 5.8: Gráfico da função preço.

[2] Em geral os custos de produção diminuem quando aumenta a produção. Suponha que uma empresa tem a seguinte função de custo, para certo produto x:

$$C(x) = \begin{cases} 1.2\,x & \text{se} \quad 0 < x \le 100 \\ 0.9\,x & \text{se} \quad 100 < x \le 300 \\ 0.75\,x & \text{se} \quad 300 < x \le 600 \\ 0.6\,x & \text{se} \quad 600 < x. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

(b) Determine $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x)$, $\lim\limits_{x \to 100^+} C(x)$, $\lim\limits_{x \to 600^-} C(x)$ e $\lim\limits_{x \to 600^+} C(x)$.

(a) Esboço de $C = C(x)$:

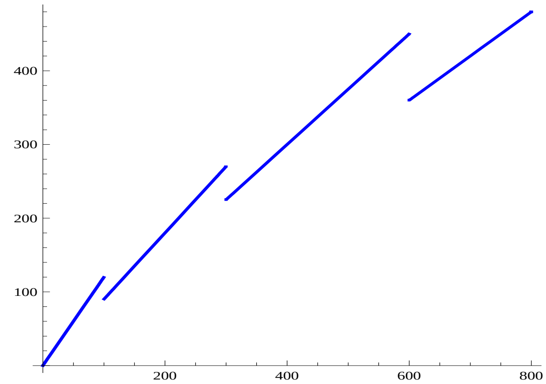


Figura 5.9: Gráfico de $C(x)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 100} 1.2\,x = 120$, $\lim\limits_{x\to 100^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 100} 0.9\,x = 90$ e

$\lim\limits_{x\to 600^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 600} 0.75\,x = 450$, $\lim\limits_{x\to 600^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 600} 0.6\,x = 360$

[3] Uma empresa tem como função de custo, para certo produto x:

$$C(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se} \quad 0 < x \le 10 \\ 0.6\,x + 14 & \text{se} \quad 10 < x. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

(b) Determine $\lim\limits_{x\to 10^-} C(x)$ e $\lim\limits_{x\to 10^+} C(x)$.

(c) $C = C(x)$ é contínua?

(a) Esboço de $C = C(x)$:

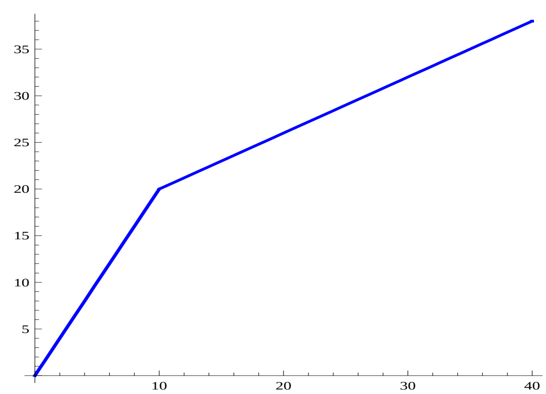


Figura 5.10: Gráfico de $C(x)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 10} 2\,x = 20$ e $\lim\limits_{x\to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 10} 0.6\,x + 14 = 20$.

(c) É contínua, pois $C(10) = 20$.

[4] Numa cidade se observa que a despesa de uma família com TV a cabo depende do tempo t, mensal, que os habitantes assistem TV e esta quantidade, em centenas de reais, é modelada por:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le t < 20 \\ 0.1\,t & \text{se} \quad 20 \le t \le 100 \\ \dfrac{40\,t - 1000}{2\,t + 100} & \text{se} \quad 100 < t. \end{cases}$$

Estude a continuidade da despesa $P = P(t)$. A despesa de uma família é sensivelmente diferente se o tempo que assiste TV é ligeiramente inferior ou superior a 20 horas? E para 100 horas?

Primeiramente calculamos:

$$\lim_{t \to 20^-} P(t)) = \lim_{t \to 20} 0 = 0$$
$$\lim_{t \to 20^+} P(t) = \lim_{t \to 20} 0.1\,t = 2$$

Logo, a função é descontínua em $t_0 = 20$. Note que a mudança de gasto de uma família varia sensivelmente se as horas que assiste TV é ligeiramente inferior ou superior a 20 horas. Por outro lado, calculamos

$$\lim_{t \to 100^-} P(t)) = \lim_{t \to 100} 0.1\,t = 10$$
$$\lim_{t \to 100^+} P(t) = \lim_{t \to 100} \frac{40\,t - 1000}{2\,t + 100} = 10$$

Logo, a função é contínua em $t_0 = 100$. Note que não existem mudanças de gasto quando a tempo em que assiste TV muda ligeiramente inferior a 100 horas ou superior a 100 horas.

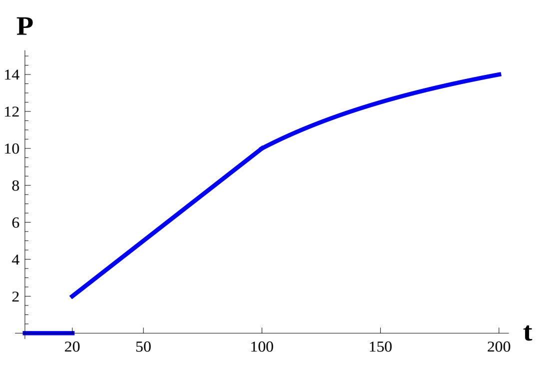


Figura 5.11: Gráfico de $P = P(t)$.

[5] A despesa em artigos de limpeza, de certa família, depende de sua receita x, em centenas de reais. A despesa destes artigos é modelada por:

$$G(x) = \begin{cases} 0.025\,x - 2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 200 \\ \dfrac{40\,x}{2\,x + 2000} & \text{se} \quad 200 < x. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade da despesa $G = G(x)$. A despesa de uma família é sensivelmente diferente se sua receita é levemente inferior ou superior a 200 reais?

(b) Pode uma família gastar mais do que 20 reais?

(a) Note que o único ponto problemático é $x_0 = 200$, então devemos estudar:

$$\lim_{x \to 200^-} G(x) = \lim_{x \to 200} 0.025\,x - 2 = 3$$
$$\lim_{x \to 200^+} G(x) = \lim_{x \to 200} \frac{40\,x}{2\,x + 2000} = 3.33.$$

Logo, a função é descontínua em $x_0 = 200$. A mudança da despesa de uma família varia sensivelmente se sua receita é levemente inferior ou superior a 200 reais.

(b) Por outro lado:

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{40\,x}{2\,x + 2000} = 20.$$

A função apresenta uma assíntota em $y = 20$; logo, nenhuma família pode gastar mais do que 20 reais em artigos de limpeza.

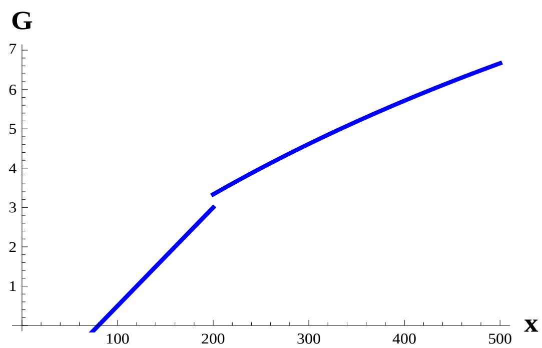


Figura 5.12: Gráfico de $G = G(x)$.

[6] A administração de um hospital vai implementar um novo sistema que pretende reduzir o tempo de espera para cirurgias. O seguinte modelo foi experimentalmente determinado para prever que em t meses o percentual de pacientes que podem ser operados sem entrar em lista de espera é:

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 8\,t + 50 & \text{se} \quad 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38\,t - 100}{0.4\,t} & \text{se} \quad 10 < t. \end{cases}$$

Estude a continuidade da função h. Qual é o percentual que não poderá nunca ser atingido?

Note que o único ponto problemático é $t_0 = 10$; então, devemos estudar:

$$\lim_{t \to 10^-} h(t) = \lim_{t \to 10} t^2 - 8\,t + 50 = 70$$
$$\lim_{t \to 10^+} h(t) = \lim_{t \to 10} \frac{38\,t - 100}{0.4\,t} = 70.$$

$h(10) = 70$. Logo, a função é contínua em $t_0 = 10$. Por outro lado:

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{38\,t - 100}{0.4\,t} = 95.$$

A função apresenta uma assíntota em $y = 95$; logo, o percentual nunca poderá ultrapassar 95 %.

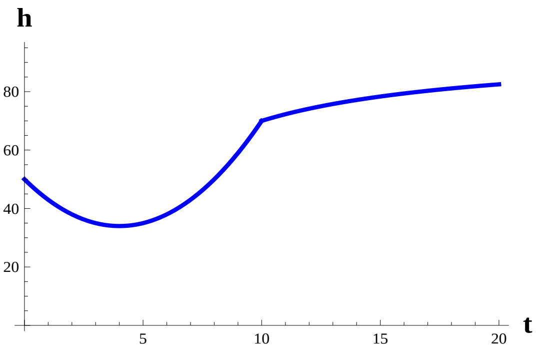


Figura 5.13: Gráfico de $h = h(t)$.

[7] Num certo país, o montante de impostos de renda $T(x)$ devido por uma pessoa física que recebe x u. m. é modelado por:

$$T(x) = \begin{cases} 0.15\,x & \text{se} \quad 0 \le x < 25000 \\ 3750 + 0.25\,(x - 25000) & \text{se} \quad 25000 \le x < 60000 \\ 12550 + 0.35\,(x - 60000) & \text{se} \quad 60000 \le x. \end{cases}$$

Estude a continuidade do imposto de renda $T = T(x)$. A renda de um contribuinte é sensivelmente diferente se sua receita é ligeiramente inferior ou superior a 600000 reais?

Note que os pontos problemáticos são $x_0 = 25000$ e $x_1 = 60000$; então devemos estudar:

$$\lim_{x \to 25000^-} T(x) = \lim_{x \to 25000} 0.15\,x = 3750$$
$$\lim_{x \to 25000^+} T(x) = \lim_{x \to 25000} \big[3750 + 0.25\,(x - 25000)\big] = 3750$$

e

$$\lim_{x \to 60000^-} T(x) = \lim_{x \to 60000} \big[3750 + 0.25\,(x - 25000)\big] = 12500$$
$$\lim_{x \to 60000^+} T(x) = \lim_{x \to 60000} \big[12550 + 0.35\,(x - 60000)\big] = 12500.$$

Logo, a função é contínua . As mudanças da renda do contribuinte não tem variação sensível se sua renda é levemente inferior ou superior a 60000 u.m.

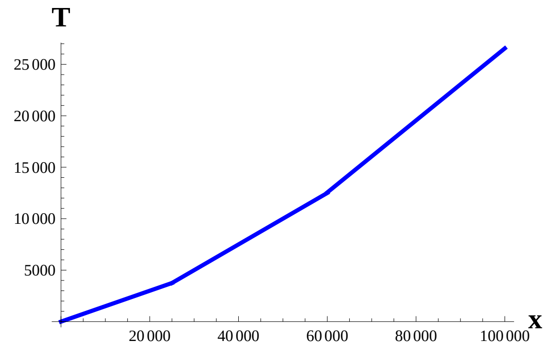


Figura 5.14: Gráfico de $T = T(x)$.

5.2 Função Parte Inteira

Como vimos nos exemplos anteriores, muitas vezes é necessário representar uma situação que não é possível modelar através de funçãos contínuas. Neste sentido, a seguinte função é utilizada para modelar situações onde a variável independente é escalonada.

Definamos a seguinte funcão: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$f(x) = maior\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x < n+1\}.$$

Denotamos $f(x) = [[x]]$. Isto é, $[[x]]$ denota o maior número inteiro n tal que $n \leq x < n+1$. Claramente esta função é descontínua. Note que $[[x]] = -1$ se $-1 \leq x < 0$, $[[x]] = 0$ se $0 \leq x < 1$, $[[x]] = 1$ se $1 \leq x < 2$, etc.

Exemplo 5.4.

[1] A função $f(x) = [[x]]$ é descontínua para cada $k \in \mathbb{Z}$.

De fato, se $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to k^-} [[x]] = k-1$ e $\lim\limits_{x \to k^+} [[x]] = k$; logo, $\lim\limits_{x \to k} [[x]]$ não existe. Se $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, então $\lim\limits_{x \to k} [[x]]$ existe.

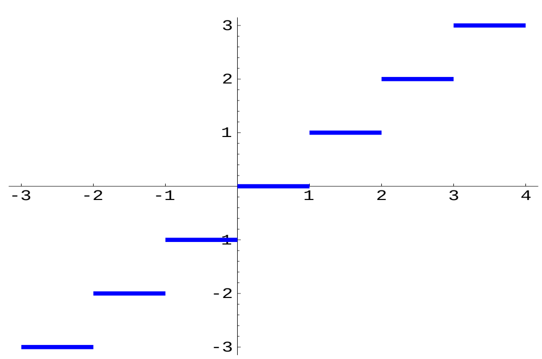


Figura 5.15: Gráfico de $f(x) = [[x]]$.

[2] Suponha que a função custo para produzir, em reais, certo tipo de produto é dada por:

$$C(x) = 0.34\,([[x]] + 2), \quad \text{em milhões de reais.}$$

Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

Como $[[x]] = 0$ se $0 \leq x < 1$, $[[x]] = 1$ se $1 \leq x < 2$, etc. Temos:

x	$C(x)$
0	0.68
1	1.02
2	1.36
3	1.7
4	2.04
5	2.38

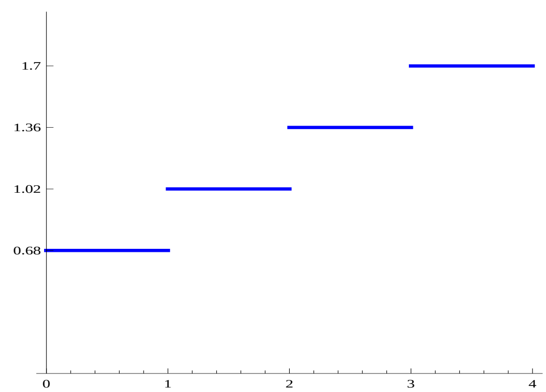


Figura 5.16: Gráfico de $C = C(x)$.

[3] Serão aplicados R$ 5000 numa aplicação financeira que rende 15% ao ano com juros capitalizados trimestralmente. O montante após t anos pode ser calculado utilizando uma das seguintes fórmulas:

$$A_1 = 5000\,(1 + 0.15)^{4t} \quad \text{ou} \quad A_2 = 5000\,(1 + 0.15)^{[[4t]]}.$$

Que fórmula é mais conveniente utilizar após 210 dias de aplicação?

As fórmulas são iguais se $[[4t]]$ é inteiro. Em geral, $A_2 \leq A_1$ para todo $t \geq 0$. Logo, é mais vantajoso utilizar A_1. De fato, calculando para $t = 210/365$:

$$A_1 = 6896.96 \quad \text{e} \quad A_2 = 6612.50 \text{ reais.}$$

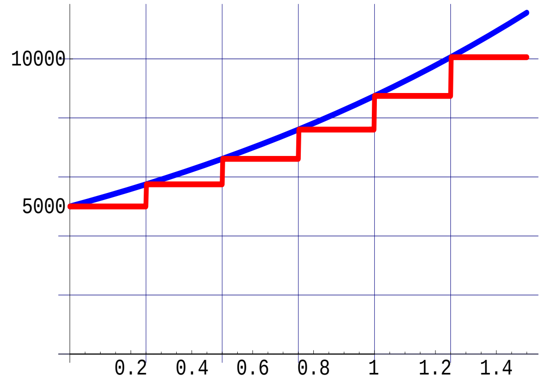


Figura 5.17: Gráficos de A_1 e A_2, respectivamente.

[4] Uma refinaria de petróleo possui 10 torres de destilação. O custo para operar cada torre é de US$ 140 por semana e o custo da matéria prima é de US$0.9 por barril de petróleo refinado. Cada torre pode processar matéria prima de modo a produzir 15000 barris por semana. Se as torres só são ativadas quando houver matéria prima, e se x é a quantidade de matéria prima, em barris, o custo de produção é:

$$C(x) = 140\,\Big([[\frac{x}{15000}]] + 1\Big) + 0.9\,x.$$

Esboce o gráfico de $C = C(x)$.

Note que a quantidade $[[\dfrac{x}{15000}]]$ foi aumentada de 1, pois $[[\dfrac{x}{15000}]]$ torres de destilação produzem no máximo $15000\,x$ barris e que para qualquer produção adicional será necessário começar a operar com outra torre.

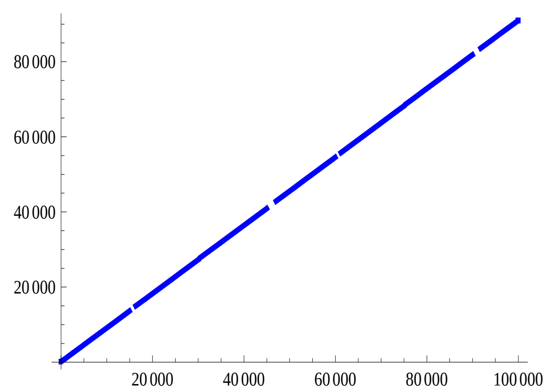


Figura 5.18: Gráfico de $C = C(x)$.

[5] A tarifa de uma ligação telefônica a longa distância noturna do Rio de Janeiro para New York é 70 centavos de real pelo primeiro minuto e de 50 centavos de real por minuto ou fração de minuto adicional. A tarifa é modelada por:

$$T(t) = \begin{cases} 0.7 & \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0.7 + 0.5\,[[t+1]] & \text{se} \quad 1 < t. \end{cases}$$

Determine quanto se deve pagar por uma ligação de 2 minutos e 43 segundos?

Calculemos $T(2.43)$; como $t > 1$ utilizamos a parte da função $T(t) = 0.7 + 0.5\,[[t+1]]$; logo $T(2.43) = 0.7 + 0.5\,[[3.43]] = 0.7 + 0.5 \times 3 = 2.2$. Deve pagar 2 reais e 20 centavos.

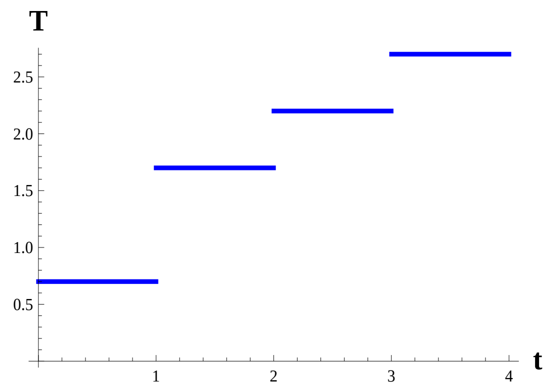


Figura 5.19: Gráficos de $T = T(t)$.

[6] A quantidade de matéria prima de uma certa empresa é modelada por:

$$m(t) = 20\,\big[2\,[[\frac{t+2}{2}]] - t\big].$$

Esboce o gráfico de $m = m(t)$ no intervalo $[0, 6)$ e determine quando a empresa deve repor o estoque.

Note que:

$$[[\frac{t+2}{2}]] = 1 + [[\frac{t}{2}]].$$

Então, $[[\frac{t+2}{2}]] = 1$ se, e somente se $0 \le t < 2$; $[[\frac{t+2}{2}]] = 2$ se, e somente se $2 \le t < 4$; $[[\frac{t+2}{2}]] = 3$ se, e somente se $4 \le t < 6$; logo:

$$m(t) = \begin{cases} 20\,(2-t) & \text{se} \quad 0 \le t < 2 \\ 20\,(4-t) & \text{se} \quad 2 \le t < 4 \\ 20\,(6-t) & \text{se} \quad 4 \le t < 6 \end{cases}$$

O gráfico de $m = m(t)$ é:

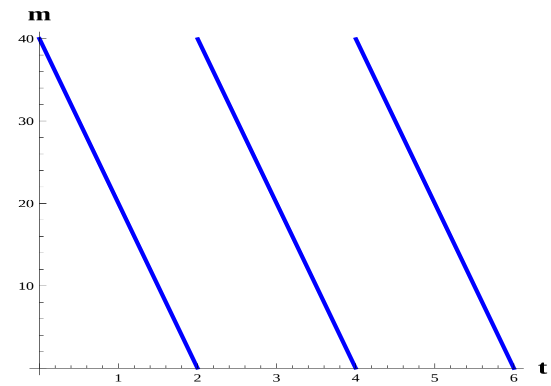


Figura 5.20: Gráfico de $T = T(t)$.

Por outro lado:

$$\lim_{t \to 2^-} m(t) = \lim_{t \to 4^-} m(t) = \lim_{t \to 6^-} m(t) = 0;$$

logo, deve repor o estoque a cada 2 anos.

5.3 Exercícios

1. A evolução no tempo t da capacidade de produção de uma fábrica é dada por:

$$P(t) = \frac{40000}{10000 - (t-100)^2}.$$

(a) Calcule $P(10)$, $P(20)$, $P(50)$, $P(100)$ e $P(150)$. Explique o que está acontecendo com a produção.

(b) Calcule $\lim\limits_{t \to 100} P(t)$

(c) Calcule $\lim\limits_{t \to 200} P(t)$; explique o resultado.

(d) Esboce o gráfico de P.

2. A população (em milhares) de uma colônia de bactérias, t minutos após a introdução de uma toxina, é dada pela função:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{se} \quad t < 5 \\ -8t + 72 & \text{se} \quad 5 \le t. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim\limits_{t \to 10} f(t)$.

(b) Calcule $\lim\limits_{t \to 5^-} f(t)$ e $\lim\limits_{t \to 5^+} f(t)$.

(c) A função f é contínua em $t = 5$?

(d) Explique por que a população deve ser de 10000 bactérias em algum momento entre $t = 1$ e $t = 7$.

(e) Esboce o gráfico de f.

3. A pontuação num vestibular obtida por um estudante depende do tempo t, em horas, que dedicou ao estudo. Esta pontuação é modelada por:

$$V(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{3} & \text{se} \quad 0 \le t \le 15 \\ \dfrac{2\,t}{0.2\,t + 3} & \text{se} \quad 15 < t. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade da função.

(b) Justifique por que a pontuação não pode ultrapassar 15 pontos.

4. O preço atingido por certos artigos num leilão depende do número de pessoas interessadas na sua aquisição. O preço é dado por:

$$P(x) = \begin{cases} 5\,x + 5 & \text{se} \quad 0 \le x \le 10 \\ \dfrac{38\,x + 700}{9} & \text{se} \quad 10 < x. \end{cases}$$

Verifique se existe alguma variação importante quando o número de pessoas interessadas é ligeiramente superior a 10.

5. Numa cidade o consumo de água é modelado em função do consumo de x metros cúbicos mensais por:

$$A(x) = \begin{cases} 8 & \text{se} \quad x < 10 \\ 8 + 2\,(x - 10) & \text{se} \quad 10 \le x < 20 \\ 28 + 2.8\,(x - 20) & \text{se} \quad 20 \le x. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade do consumo da água $A = A(x)$.

(b) Analise se o consumo de água é sensivelmente diferente se são gastos em torno de 20 metros cúbicos de água.

(c) Esboce o gráfico de $A = A(x)$.

6. O número de unidades de um certo produto mantido em estoque é dado por:

$$E(t) = 25\big(2\left[\left[\frac{t+2}{2}\right]\right] - t\big), \quad 0 \le t \le 12.$$

(a) Esboce o gráfico de $E = E(t)$.

(b) Com que frequência a empresa deve repor o estoque?

(c) Calcule $\lim\limits_{t \to 12^-} E(t)$.

7. O preço de um certo produto é

$$p(x) = \left[\left[\frac{x}{16}\right]\right] + 0.23\left[x - 16\left[\left[\frac{x}{16}\right]\right]\right]$$

onde x o número de produtos vendidos. Determine $\lim\limits_{x \to 16^-} p(x)$ e $\lim\limits_{x \to 16^+} p(x)$; o que podemos concluir?

8. Um acordo coletivo dos empregados de uma empresa garante um aumento anual de 11% durante os próximos 10 anos. Se o salário anual dos empregados é 12000 dólares e se tal situação é modelada por:

$$s(t) = 12000 \times 1.11^{[[t]]},$$

(a) esboce o gráfico do salário.

(b) determine o salário após 8 anos.

9. O número de pessoas infectadas por uma epidemia de dengue é modelada por:

$$d(t) = \frac{30\,t}{t^2 - 2\,t + 4}.$$

(a) Esboce o gráfico de $d = d(t)$.

(b) A epidemia de dengue passará a longo prazo? Justifique sua resposta.

10. Definamos e denotemos o lucro médio por:

$$LMe(x) = \frac{L(x)}{x} = \frac{R(x) - C(x)}{x}.$$

(a) Uma empresa fabrica um produto a um custo unitário de 0.15 u. m. e o vende a 0.9 u. m. a unidade;. Se a empresa invistiu 50000 u. m. para fabricar o produto., determine o lucro médio, para 10000 e 20000 unidades. Qual é o lucro médio a longo prazo?

(b) Se o custo de uma empresa é dado por $C(x) = 1.5\sqrt{x} + 1.5\,x + 10$ e a receita é dada por $R(x) = 2.7\,x$, esboce o gráfico do lucro médio.

Capítulo 6

DERIVADA

6.1 Introdução

Neste capítulo estabeleceremos a noção de derivada de uma função. A derivada envolve a variação ou a mudança no comportamento de vários fenômenos. Inicialmente apresentaremos a definição de reta tangente ao gráfico de uma função. Posteriormente, definiremos funções deriváveis e derivada de uma função num ponto, dando ênfase ao seu significado geométrico. Iniciemos o capítulo com um exemplo.

Suponha que em x unidades de trabalho é produzida uma quantidade $y = f(x)$ de um certo produto. Em geral, se a quantidade de trabalho varia, a produção também varia. Se o trabalho para produzir o produto é aumentado, isto é de x passa para $x+h$, ($h > 0$ pequeno) a produção se modificará passando a ser $f(x+h)$.

Por exemplo, se a cada aumento na unidade de trabalho a produção aumenta quadraticamente, então $y = x^2$:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2\,x\,h + h^2.$$

Logo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2\,x + h;$$

se h é pequeno ($h \to 0$), temos que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2\,x + h \longrightarrow 2\,x.$$

Isto é, para um pequeno incremento do trabalho a produção foi aumentada em $2\,x$ unidades, aproximadamente.

6.2 Reta Tangente

Seja:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0, se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \varnothing$.

Considere $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q_i = (x_i, f(x_i))$ $(i = 1, 2, 3......)$ pontos no gráfico de f, $P \neq Q_i$; seja r_1 a reta secante que passa por P e Q_1; seu coeficiente angular é:

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Fixemos o ponto P e movamos Q_1 sobre o gráfico de f em direção a P, até um novo ponto $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ tal que $Q_2 \neq P$; seja r_2 a reta secante que passa por P e Q_2; seu coeficiente angular é:

$$m_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Suponha que os pontos Q_i $(i = 1, 2, 3......)$ vão se aproximando sucessivamente do ponto P (mas sem atingir P), ao longo do gráfico de f; repetindo o processo obtemos r_1, r_2, $r_3, ...$, retas secantes de coeficientes angulares m_1, m_2, $m_3, ...$, respectivamente. É possível provar, rigorosamente, que quando os pontos Q_i vão se aproximando cada vez mais de P, os m_i respectivos, variam cada vez menos, tendendo a um valor limite constante, que denotaremos por m_{x_0}.

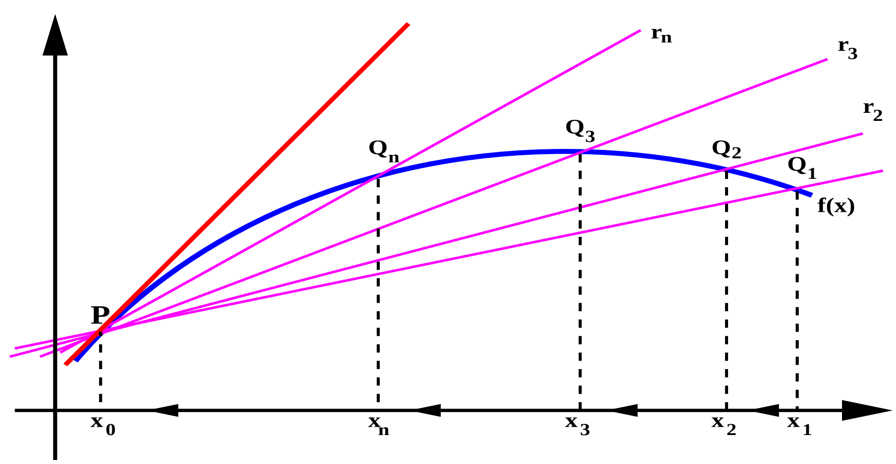


Figura 6.1:

Definição 6.1. *A reta passando pelo ponto P e tendo coeficiente angular m_{x_0}, é chamada reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.*

Se

$$\boxed{m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existe, fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$m_{x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f para qualquer ponto $(x, f(x))$:

$$\boxed{m_x = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}}$$

Assim, m_x só depende x.

Definição 6.2. *Se f for contínua em x_0, então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:*

$$\boxed{y - f(x_0) = m_{x_0}\,(x - x_0)}$$

se o limite existe,

Exemplo 6.1.

[1] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 4 - x^2$, no ponto $(1, 3)$.

Denotemos por m_1 o coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = 4 - x^2$ passando pelo ponto $(1, f(1)) = (1, 3)$. Seja $P = (1, 3)$ e $Q = (x_0, 4 - x_0^2)$ pontos da parábola; o coeficiente angular da reta secante à parábola passando por P e Q é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = -(x_0 + 1).$$

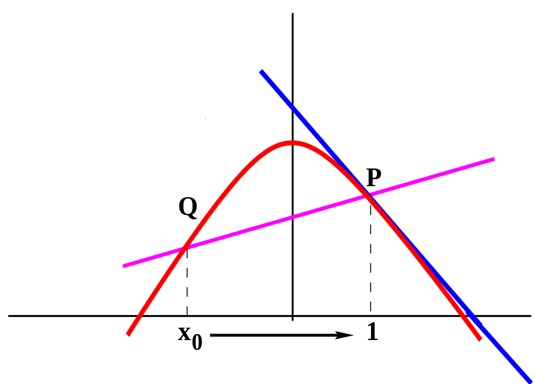


Figura 6.2:

Do desenho, é intuitivo que se Q aproxima-se de P (x_0 aproxima-se de 1), os coeficientes angulares de ambas as retas ficarão iguais; logo:

$$m_1 = \lim_{x_0 \to 1} m_{PQ} = -2.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 3)$ é $y - 3 = -2\,(x - 1)$ ou, equivalentemente, $y + 2\,x = 5$.

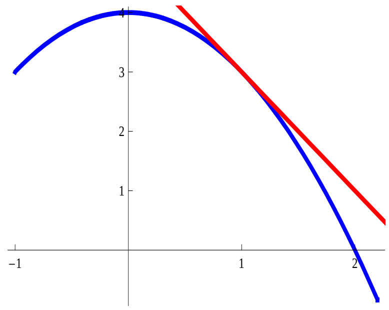


Figura 6.3: Reta tangente a $y = 4 - x^2$, no ponto $(1, 3)$.

[2] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - x$, no ponto $(1, 0)$. Utilizemos agora diretamente a definição:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t\,(t+1)\,(t+2)}{t} = \lim_{t \to 0} t+1)\,(t+2) = 2.$$

Logo $m_1 = 2$. A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 0)$ é $y = 2\,x - 2$.

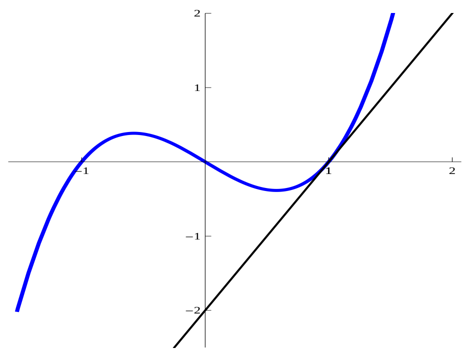


Figura 6.4: Exemplo [2].

Da definição segue que a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{m_{x_0}}\,\big(x - x_0\big), \quad \text{se} \qquad m_{x_0} \neq 0}$$

6.3 Funções Deriváveis

Definição 6.3. *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0, se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \varnothing$. f é* **derivável ou diferenciável** *no ponto x_0 quando existe o seguinte limite:*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

$f'(x_0)$ é chamada a derivada de f no ponto x_0. Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada de f para qualquer ponto $x \in Dom(f)$;

$$\boxed{f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}}$$

Assim f' é função de x e $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Definição 6.4. *Uma função f é derivável (ou diferenciável) em $A \subset \mathbb{R}$, se é derivável ou diferenciável em cada ponto $x \in A$.*

Outras notações para a derivada de $y = y(x)$ são: $\dfrac{dy}{dx}$ ou $D_x f$.

Exemplo 6.2.

[1] Calcule $f'(\frac{1}{4})$ e $f'(2)$, se $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x + t)^2 - x^2}{t} = \lim_{t \to 0} (2x + t) = 2\,x.$$

Logo, $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ e $f'(2) = 4$.

[2] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 - (x + t)^2} - \sqrt{1 - x^2}}{t} = \lim_{t \to 0} -\frac{2x + t}{\sqrt{1 - (x + t)^2} + \sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[3] Calcule $f'(1)$ se $f(x) = 4 - x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} -\frac{t\,(t + 2\,x)}{t} = \lim_{t \to 0} -(t + 2\,x) = -2\,x.$$

Logo, $f'(1) = -2$.

[4] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{x + t} - \frac{1}{x}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\,t} = -\frac{1}{x^2}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

Interpretação Geométrica

A função $F : (D - \{x_0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

representa, geometricamente, o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Logo, quando f é derivável no ponto x_0, a reta de coeficiente angular $f'(x_0)$ e passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Se f admite derivada no ponto x_0, então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0), \quad \text{se} \quad f'(x_0) \neq 0}$$

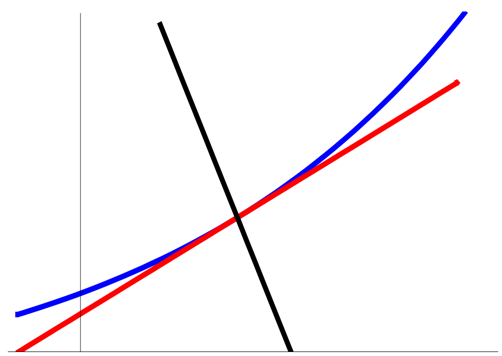


Figura 6.5: As retas tangente e normal ao gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 6.3.

[1] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta $2\,x - y - 1 = 0$.

Para determinar a equação de uma reta, necessitamos de um ponto (x_0, y_0) e do coeficiente angular $f'(x_0)$. Neste problema, temos que determinar um ponto.

Sejam r_t a reta tangente, r a reta dada, m_t e m os correspondentes coeficientes angulares; como r_t e r são paralelas, então $m_t = m$; mas $m = 2$ e $m_t = f'(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto procurado; como:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

resolvendo a equação $f'(x_0) = 2$, obtemos $x_0 = \dfrac{1}{16}$ e $f(\dfrac{1}{16}) = \dfrac{1}{4}$; a equação é:

$$16\,x - 8\,y + 1 = 0.$$

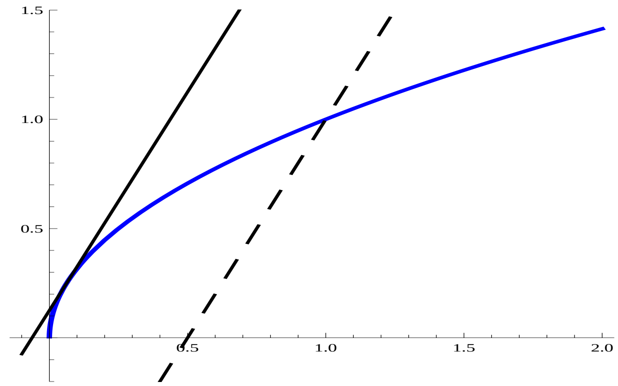


Figura 6.6: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ paralela à reta $2x - y - 1 = 0$.

[2] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$ que sejam perpendiculares à reta $y + x = 0$.

Sejam r_t a reta tangente, r a reta dada, m_t e m os correspondentes coeficientes angulares; como r_t e r são perpendiculares, então $m_t m = -1$; mas $m = -1$ e $m_t = f'(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto procurado; resolvendo a equação $f'(x_0) = 1$, temos $f'(x_0) = x_0^2$ e $x_0 = \pm 1$; as equações são: $3\,y - 3\,x + 5 = 0$ e $3\,y - 3\,x + 1 = 0$.

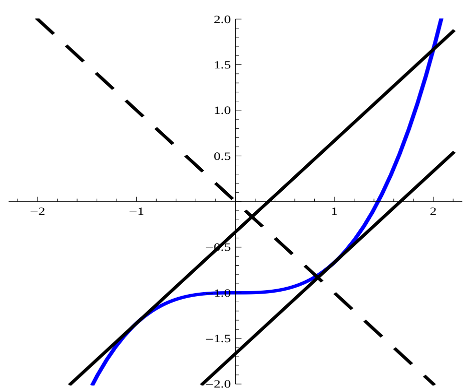


Figura 6.7:

Teorema 6.1. *Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0.*

A recíproca do teorema é falsa. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 6.4.

[1] Seja $f(x) = |x|$. f é contínua em todo $\mathbb{R}$; em particular em $x_0 = 0$. Mas a derivada de f em 0 não existe; de fato:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Calculemos os limites laterais:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x}\right) = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{x}{x}\right) = -1. \end{cases}$$

Logo, $f'(0)$ não existe. Para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x)$ existe e:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Do teorema segue que não existe a derivada de f no ponto x_0 se f é descontínua no ponto x_0.

Também não existe a derivada de f no ponto x_0 nos eguintes casos:

i) Se existe "quina"no gráfico da função contínua no ponto de abscissa x_0, como no ponto $x_0 = 0$ do exemplo anterior.

ii) Se f é contínua em x_0 e se possui reta tangente vertical passando pelo ponto de abscissa x_0. Neste caso, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} |f'(x)| = \infty$.

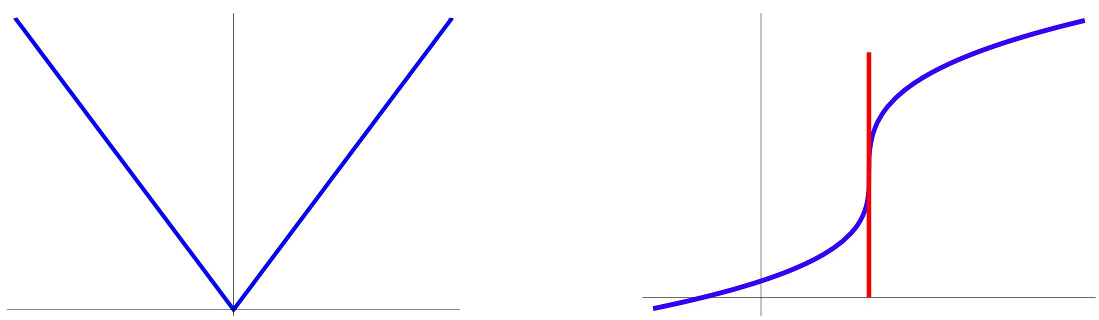


Figura 6.8: Funções não deriváveis.

[2] A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em todo $\mathbb{R}$ e não é diferenciável em $x = 0$. De fato:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

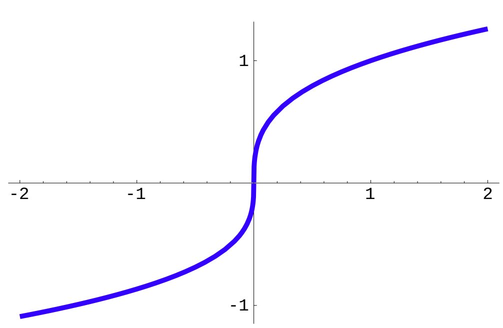


Figura 6.9: Gráfico do exemplo [2].

[3] Determine as constantes a e b tais que:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^3 & \text{se} \quad x < 2 \\ x^2 + b & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

seja derivável.

(i) f deve ser contínua em $x_0 = 2$, isto é:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Longleftrightarrow 8\,a = 4 + b \Longleftrightarrow 8\,a - 4 - b = 0.$$

(ii) Para f ser derivável , devemos calcular:

$$f'(2) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+2) - f(2)}{x}.$$

Logo, devemos determinar os limites laterais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(12\,a\,x + 6\,a\,x^2 + a\,x^3 + 8\,a) - (4 - b)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \big(12\,a + 6\,a\,x + a\,x^2\big) = 12\,a \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(4\,x + x^2) - (4 + b)}{x} = \lim_{x \to 0} \big(4 + x\big) = 4.$$

Logo, devemos ter $12\,a = 4$, então $a = \dfrac{1}{3}$ e $b = \dfrac{4}{3}$. A função deve ser definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & \text{se} \quad x < 2 \\ x^2 - \dfrac{4}{3} & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Note que $f(2) = \dfrac{8}{3}$.

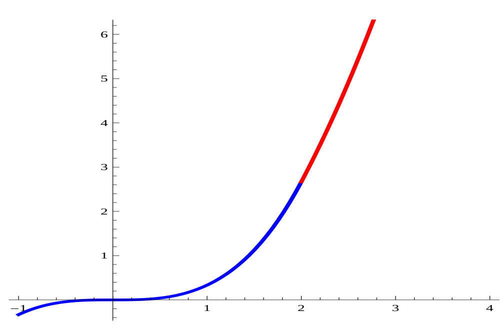


Figura 6.10: Gráfico do exemplo [3].

6.4 Regras de Derivação

[1] Se $u(x) = c$, então $u'(x) = 0$.

[2] Se $u(x) = m\,x + b$; $m,\ b \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, então $u'(x) = m$.

De fato, a função é contínua e seu gráfico coincide com sua reta tangente em qualquer ponto; logo, tem o mesmo coeficiente angular. Equivalentemente,

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{m\,t}{t} = m.$$

[3] Se $u(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, então $u'(x) = n\,x^{n-1}$.

De fato: $u(x+t) - u(x) = x^n + t\left[n\,x^{n-1} + t\left[\dfrac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,t\ldots.. + t^{n-2}\right]\right] - x^n$ e:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^n - x^n}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\left[n\,x^{n-1} + t\left[\frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,t + \ldots.. + t^{n-1}\right]\right]}{t} \\ &= n\,x^{n-1}. \end{aligned}$$

Proposição 6.1. *Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis; então:*

1. **Regra da soma:** *As funções $u \pm v$ são deriváveis e*

$$\boxed{(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$$

2. **Regra do produto:** *A função $u \cdot v$ é derivável e*

$$\boxed{(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

3. **Regra do quociente:** *A função $\dfrac{u}{v}$ é derivável, e*

$$\boxed{\left[\frac{u}{v}\right]'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \quad \textit{se} \quad v(x) \neq 0}$$

Da regra do produto temos: $(k\,u(x))' = k\,u'(x)$, para toda constante k. Da regra do quociente, temos: se $u(x) = x^n$, $x \neq 0$, com $n < 0$, então $u'(x) = n\,x^{n-1}$.

Exemplo 6.5.

[1] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \dfrac{x^4 + 3x + 1}{x^5}$; $x \neq 0$.

Note que: $u(x) = x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5}$, temos:

$$u'(x) = (x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5})' = -x^{-2} - 12x^{-5} - 5x^{-6}.$$

[2] Calcule $u'(x)$ sendo $u(x) = (x^3 + 2x + 1)\,(2x^2 + 3)$.

Aplicando diretamente as regras:

$$u'(x) = [(x^3 + 2\,x + 1)]'\,(2\,x^2 + 3) + (x^3 + 2\,x + 1)\,[(2\,x^2 + 3)]'$$

e $u'(x) = 10\,x^4 + 21\,x^2 + 4\,x + 6$.

[3] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 1}$.

$$u'(x) = \left[\frac{x^2 + x}{x^3 + 1}\right]' = \frac{(x^2 + x)'(x^3 + 1) - (x^2 + x)(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2};$$

logo:

$$u'(x) = \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 2x + 1}{(x^3 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

6.5 Percentual da Variação de uma Função

Se $y = f(x)$ é uma função derivável, definimos o percentual da variação de y em relação a x por:

$$pv(x) = \frac{100\,f'(x)}{f(x)}.$$

Exemplo 6.6.

[1] Se o PIB de um certo país, t anos após 2000 é dado por $PIB(t) = t^3 + 10\,t + 250$, determine o percentual da variação em relação ao tempo do PIB, no ano de 2005 e de 2009.

Como $PIB(t) = t^3 + 10\,t + 250$, então:

$$pv(t) = \frac{100\,PIB'(t)}{PIB(t)} = \frac{100\,(3\,t^2 + 10)}{t^3 + 10\,t + 250}.$$

Logo, $pv(5) = 20\%$ e $pv(9) \cong 23.7\%$.

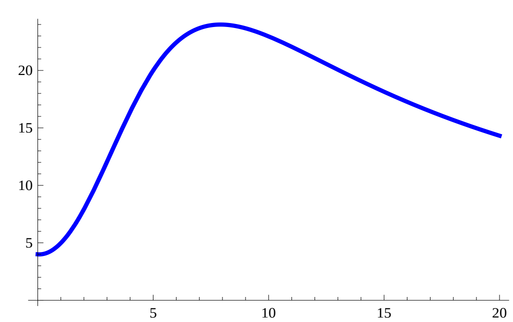


Figura 6.11: Gráfico do percentual da variação do PIB.

[2] O salário de uma empresa é inicialmente de 24000 reais por ano. Sabendo que anualmente terá um aumento de 200 reais, determine o percentual da variação. Após 5 anos qual será o percentual de variação do salário?

Note que a função que modela o salário é $S(t) = 200\,t + 24000$, logo:

$$pv(t) = \frac{100\,S'(t)}{S(t)} = \frac{100}{t+120}.$$

Por outro lado, $pv(5) = 0.8\%$.

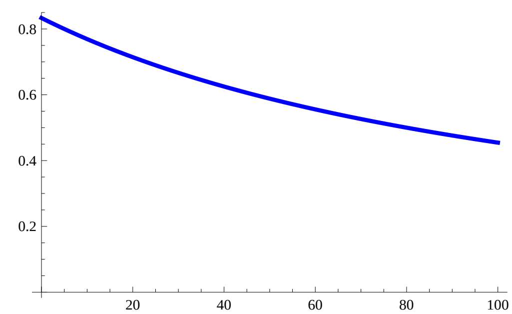


Figura 6.12: Gráfico do percentual de variação do salário.

6.6 Derivada da Função Composta

Suponha que desejamos derivar a seguinte expressão: $u(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$ com as regras dadas. Só temos a possibilidade de desenvolver o trinômio e aplicar sucessivamente a regra da soma ou escrever como produto de 1000 polinômios e usar a regra do produto. Como ambas as possibilidades são tediosas, vamos tentar reescrever esta função. Seja $g(x) = x^{1000}$ e $f(x) = x^9 + x^6 + 1$; é claro que $u(x) = (g \circ f)(x)$. Logo, se soubermos derivar a composta de funções o problema estará resolvido. O seguinte teorema nos ensina a derivar uma função composta $g \circ f$ em termos das derivadas de f e g, que são mais simples.

Teorema 6.2. Regra da Cadeia
Sejam f e g funções, tais que $g \circ f$ esteja bem definida. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x e:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Outra maneira de escrever o último parágrafo é: se $y = g(x)$ e $x = f(t)$, nas hipóteses do teorema, temos que:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

Para a prova, veja o apêndice.

Aplicação: Seja $v(x) = (u(x))^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Então: $v'(x) = n\,(u(x))^{n-1}\,u'(x)$.

Exemplo 6.7.

[1] Calcule $v'(x)$ se $v(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$.

Neste caso $u(x) = x^9 + x^6 + 1$; logo, $u'(x) = 9\,x^8 + 6\,x^5$ e $n = 1000$; então:

$$v'(x) = ((u(x))^{1000})' = 1000\,(u(x))^{999}\,u'(x) = 1000\,(x^9 + x^6 + 1)^{999}\,(9\,x^8 + 6\,x^5).$$

[2] Calcule $\dfrac{dy}{dt}$ se $y = g(x) = x^3 + x + 1$ e $x = x(t) = t^2 + 1$.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = 2\,t\,(3x^2 + 1) = 6\,t\,(t^2 + 1)^2 + 2\,t.$$

[3] Seja g uma função derivável e $h(x) = g(x^2 + 1)$. Calcule $h'(1)$ se $g'(2) = 5$.

Observemos que $h(x) = (g \circ f)(x)$, onde $f(x) = x^2 + 1$; pela regra da cadeia:

$$h'(x) = g'(f(x))\,f'(x),$$

e $f'(x) = 2\,x$. Logo, $h'(x) = g'(x^2 + 1)\,2\,x$. Calculando a última expressão em $x = 1$, temos que: $h'(1) = 2\,g'(2) = 10$.

[4] Se $y = u^3 + u^2 + 3$ e $u = 2\,x^2 - 1$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} &= 4\,x\,(3\,u^2 + 2\,u) = 4\,x\,\big((3\,(2\,x^2 - 1)^2 + 2\,(2\,x^2 - 1)\big)\\ &= 4\,(12\,x^5 - 8\,x^3 + x);\end{aligned}$$

ou, fazemos a composta das funções:

$$y = u^3 + u^2 + 3 = (2\,x^2 - 1)^3 + (2\,x^2 - 1)^2 + 3 \;\text{ e }\; y' = 4\,(12\,x^5 - 8\,x^3 + x).$$

6.6.1 Teorema da Função Inversa

A seguir apresentamos um dos teoremas fundamentais em Matemática, o qual garante a existência da inversa derivável de uma função derivável. A prova deste teorema fica fora dos objetivos deste livro.

Teorema 6.3. (Função Inversa)
Seja f uma função definida num intervalo aberto I. Se f é derivável em I e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então f possui inversa f^{-1} derivável e:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

A fórmula pode ser obtida diretamente da regra da cadeia. De fato, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo $x \in I$. Derivando ambos os lados, temos que:

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

Exemplo 6.8.

[1] Seja $f(x) = x^2$, $x \geq 0$; sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = 2x \neq 0$ se $x \neq 0$; logo, $f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}$. Aplicando o teorema:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \neq 0.$$

[2] Seja $f(x) = x^3$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f'(x) = 3\,x^2 \neq 0$ se $x \neq 0$;

$$f'(f^{-1}(x)) = 3\,\sqrt[3]{x^2}.$$

Aplicando o teorema:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}},\ x \neq 0.$$

[3] Se $n \in \mathbb{N}$, então: $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}$, para todos os valores de x tais que $\sqrt[n]{x}$ seja definida.

De fato, seja $u(x) = x^n$; para n par, $x > 0$ e para n ímpar, x não tem restrições; a inversa de u é $u^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ e $u'(x) = n\,x^{n-1}$; $u'(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. Aplicando o teorema, temos:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = (u^{-1}(x))' = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Em geral, pela regra da cadeia, se $u = u(x)$ é uma função derivável e:

$$v(x) = (u(x))^{\alpha},\ \ \alpha \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = \alpha\,(u(x))^{\alpha-1}\,u'(x),\ \ \alpha \in \mathbb{Q}.$$

[4] Calcule $f'(x)$, se $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Escrevemos $f = g \circ h$, onde $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^2 + 1$; logo, $g'(x) = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}$ e $h'(x) = 2\,x$; então:

$$f'(x) = g'(h(x))\,h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

[5] Determine $f'(0)$, se $f(x) = h(x)\,\sqrt[4]{h(x)+1}$, $h(0) = 0$ e $h'(0) = 1$. Pela regra da cadeia:

$$f'(x) = \frac{h'(x)\,(4 + 5\,h(x))}{4\,\sqrt[4]{(1+h(x))^3}};$$

logo, $f'(0) = 1$.

6.7 Derivadas das Funções Elementares

6.7.1 Função Exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $\boxed{u(x) = a^x}$ Então,

$$\boxed{u'(x) = ln(a)\, a^x}$$

De fato,

$$u'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{a^{x+t} - a^x}{t} = a^x \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = ln(a)\, a^x.$$

Em particular, se $a = e$, temos :

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Seja $v = v(x)$ uma função derivável e considere a função: $\boxed{u(x) = a^{v(x)}}$ Então:

$$\boxed{u'(x) = ln(a)\; a^{v(x)}\, v'(x)}$$

De fato, $a^{v(x)} = e^{v(x)ln(a)}$; usando a regra da cadeia para $g(x) = e^x$ e $f(x) = v(x)\, ln(a)$, temos que $u(x) = (g \circ f)(x)$; então $g'(x) = e^x$ e $g'(f(x)) = e^{v(x)ln(a)} = a^{v(x)}$ e $f'(x) = v'(x)\, ln(a)$; logo, em particular,

$$\boxed{(e^{v(x)})' = e^{v(x)}\, v'(x)}$$

O crescimento ou decrescimento exponencial, expresso pela função

$$Q(t) = Q_0\, e^{kt}, \ (k \neq 0)$$

tem a propriedade $Q'(t) = k\, Q(t)$, isto é, a sua derivada é proporcional à função. Aliás, isto é o que caracteriza a função exponencial.

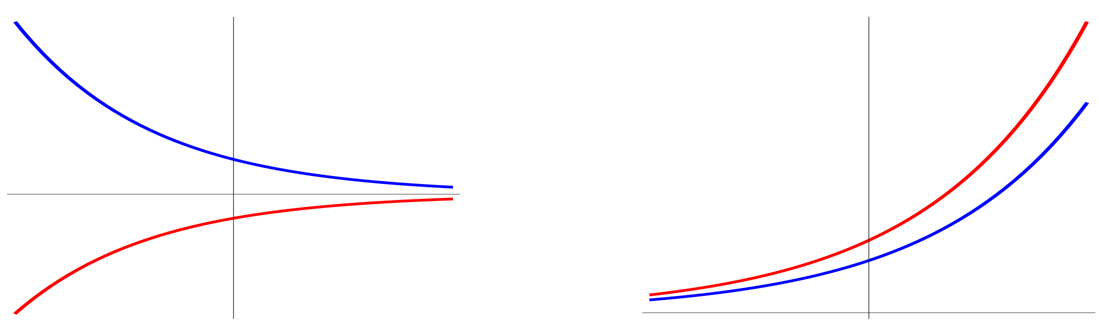


Figura 6.13: Nos desenhos, a função exponencial em azul e sua derivada em vermelho; para $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente.

Exemplo 6.9.

[1] Seja $y = e^{\sqrt{x}}$.

Fazendo $v(x) = \sqrt{x}$, temos:

$$y' = (e^{v(x)})' = e^{v(x)}\, v'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

[2] Seja $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Fazendo $v(x) = \dfrac{1}{x}$, temos:

$$y' = -ln(2)\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{x}} v'(x) = \frac{ln(2)}{x^2\, 2^{1/x}}.$$

[3] Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = e^{-x^2}$ no ponto de abscissa 1.

Derivando $y' = -2\,x\,e^{-x^2}$; $y'(1) = -2\,e^{-1}$ e $y(1) = e^{-1}$; logo, a equação da reta tangente passando pelo ponto $(1, y(1))$, é:

$$y + 2\,x\,e^{-1} - 3\,e^{-1} = 0.$$

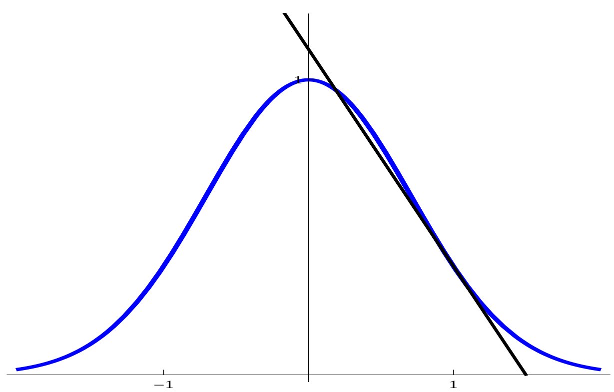


Figura 6.14: A reta tangente a $y = e^{-x^2}$, no ponto de abscissa 1.

6.7.2 Função Logarítmica

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $\boxed{u(x) = log_a(x)}$. Usando o teorema da função inversa para $f^{-1} = u$ e $f(x) = a^x$, temos que:

$$\boxed{u'(x) = \frac{log_a(e)}{x}}$$

De fato,

$$u'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x\,ln(a)} = \frac{log_a(e)}{x}.$$

Em particular, se $a = e$:

$$\boxed{(ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Usemos a regra da cadeia para calcular a derivada de $\boxed{u(x) = log_a(v(x))}$ onde $v(x) > 0$ é uma função derivável. Em tal caso:

$$\boxed{u'(x) = \frac{log_a(e)\, v'(x)}{v(x)}}$$

Em particular, se $a = e$:

$$\boxed{(ln(v(x)))' = \frac{v'(x)}{v(x)}}$$

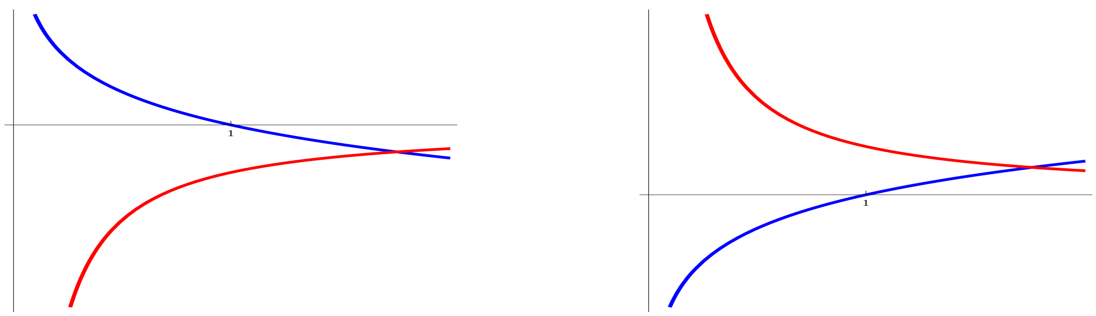


Figura 6.15: Função logarítmica em azul e sua derivada em vermelho; para $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente.

6.7.3 Algumas Propriedades

(a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se $u(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$; então:

$$u'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

De fato, aplicando logaritmo à expressão $y = u(x) = x^{\alpha}$: temos, $ln(y) = ln(u(x)) = \alpha\, ln(x)$; derivando:

$$[ln(y)]' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{y'}{y};$$

ou seja, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\alpha}{x}$; logo,

$$y' = y\left[\frac{\alpha}{x}\right] = \frac{\alpha\, x^{\alpha}}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Em geral, se $\boxed{u(x) = [v(x)]^{\alpha}}$, onde $v(x) > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\boxed{u'(x) = \alpha\, (v(x))^{\alpha-1}\, v'(x)}$$

(b) Seja $\boxed{y = [u(x)]^{v(x)}}$, onde $u(x) > 0$. Aplicando logaritmo à expressão:

$$y = [u(x)]^{v(x)};$$

temos que, $ln(y) = v(x)\,ln(u(x))$. Derivando, temos:

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\,ln(u(x)) + \frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)} \quad \text{e} \quad y'(x) = y(x)\left[v'(x)\,ln(u(x)) + \frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)}\right].$$

Então, se $y = (u(x))^{v(x)}$:

$$\boxed{y' = [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\,ln(u(x)) + \frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)}\right]}$$

Exemplo 6.10.

[1] Calcule a derivada de $y = 3\sqrt{x} + x^{-5} + 2\sqrt[4]{x^3}$, $x > 0$.

Aqui $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -5$ e $\alpha = \frac{3}{4}$, respectivamente; logo: $y' = \dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-6} + \dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}}$.

[2] Calcule a derivada de $y = \dfrac{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^4}$.

Aplicando logaritmo à função e usando as propriedades da função logarítmica, temos:

$$ln(y) = ln(\sqrt{x}) + ln(e^{\sqrt{x}}) - 4\,ln(x^2+x+1) = \frac{ln(x)}{2} + \sqrt{x} - 4\,ln(x^2+x+1).$$

Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2\,x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{8\,x+4}{x^2+x+1}$,logo:

$$y' = y(x)\left[\frac{1}{2\,x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8\,x+4}{x^2+x+1}\right] = \frac{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^4}\left[\frac{1}{2\,x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8\,x+4}{x^2+x+1}\right].$$

[3] Calcule a derivada de $y = x^x$, $x > 0$.

Aplicando logaritmo à expressão e usando as propriedades da função logarítmica, temos: $ln(y) = x\,ln(x)$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = ln(x) + 1$, logo:

$$y' = y(x)\,(ln(x)+1) = (ln(x)+1)\;x^x.$$

[4] Calcule a derivada de $y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Aplicando logaritmo à expressão e usando as propriedades da função logarítmica, temos: $ln(y) = ln(x)\sqrt{x}$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{ln(x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, logo:

$$y' = y(x)\left[\frac{ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \left[\frac{ln(x)+2}{2\sqrt{x}}\right] x^{\sqrt{x}}.$$

[5] Seja $f(x) = ln(x)$. Sabendo que $f'(1) = 1$, verifique que: $\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e$.

$$f'(1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t+1)-f(1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{ln(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0} ln((t+1)^{\frac{1}{t}}) = ln\big(\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\big);$$

então, $1 = ln\big(\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\big)$; logo: $\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e$.

Tabela

Sejam $u(x)$, $v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[1] $y = k$, então $y' = 0$.

[2] $y = x$, então $y' = 1$.

[3] $y = k\,v(x)$, então $y' = k\,v'(x)$.

[4] $y = u(x) \pm v(x)$, então $y' = u'(x) \pm v'(x)$.

[5] $y = u(x) \cdot v(x)$, então $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

[6] $y = \dfrac{u(x)}{v(x)},\ v(x) \neq 0$, então $y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$.

[7] $y = a^{u(x)}$, então $y' = a^{u(x)} \cdot ln(a) \cdot u'(x)$.

[8] $y = e^{u(x)}$, então $y' = u'(x)\, e^{u(x)}$

[9] $y = log_a(u(x))$, então $y' = log_a(e)\, \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

[10] $y = ln(u(x))$, então $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

[11] $y = (u(x))^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $y' = \alpha\,(u(x))^{\alpha-1}\,u'(x)$.

[12] Seja $y = (u(x))^{v(x)}$, onde $u(x) > 0$, então $y' = (u(x))^{v(x)} \left[v'(x)\, ln(u(x)) + \dfrac{u'(x)\, v(x)}{u(x)} \right]$.

6.8 Aproximação Linear

É intuitivo pensar que uma função derivável restrita a um pequeno intervalo contido em seu domínio "comporta-se"como uma função polinomial do primeiro grau.

Por exemplo, consideremos $y = f(x) = x^2$. Estudando f num pequeno intervalo contendo $x = 1$, por exemplo $I = [0.99, 1.01]$, obtemos:

x	$f(x)$
0.99	0.9801
0.999	0.998001
1	1
1.001	1.0002001
1.01	1.0201

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$ é dada por $y = 2\,x - 1$; seu coeficiente angular é 2. Determinemos os coeficientes angulares das retas passando pelos pontos $(0.999, f(0.999))$, $(1, f(1))$ e $(1.001, f(1.001))$, $(1, f(1))$, respectivamente:

$$m_1 = \frac{f(1) - f(0.999)}{1 - 0.999} = 1.9990 \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{f(1.001) - f(1)}{1.001 - 1} = 2.0010.$$

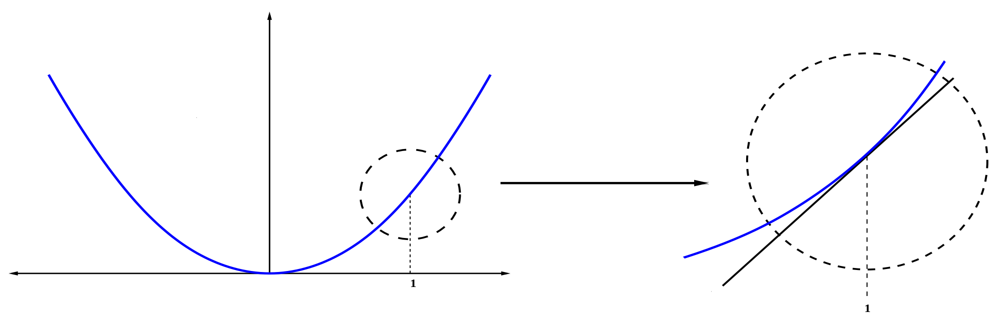


Figura 6.16:

m_1 e m_2 são valores bastante próximos de 2. Observe que se $|x - 1| \to 0$ (x perto de 1), então $f(x) = x^2$ fica próxima de $y = 2\,x - 1$. De fato:

$$\lim_{x \to 1} |f(x) - y| = \lim_{x \to 1} |x^2 - 2\,x + 1| = 0.$$

Isto nos leva a estabelecer a seguinte definição:

Definição 6.5. *Seja $y = f(x)$ uma função derivável em x_0. A aproximação linear de f em torno de x_0 é denotada por $l(x)$ e definida por:*

$$\boxed{l(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

A função $l(x)$ também é chamada linearização de f ao redor do ponto x_0. A proximidade de $f(x)$ e $l(x)$ nos permitirá fazer algumas aplicações. A notação para $f(x)$ próxima a $l(x)$ é

$$f(x) \simeq l(x).$$

O erro da aproximação é $E(x) = |f(x) - l(x)|$ e satisfaz à seguinte condição:

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{E(x)}{x - x_0} \right| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = 0.$$

Exemplo 6.11.

[1] A proporção de lâmpadas de sódio que falham após t horas de uso é dada por:

$$P(t) = 1 - \frac{10000}{(t + 100)^2}.$$

Determine a proporção de lâmpadas que falham após 99 horas de uso.

Calculemos a aproximação linear de $P = P(t)$, ao redor do ponto $t = 100$:

$$l(t) = P(100) + P'(100)\,(t-100) = P(100) + \frac{20000}{(t+100)^3}\bigg|_{t=100} (t-100) = \frac{1}{400}\,(t+200).$$

Logo, $l(99) = \dfrac{299}{400} \cong 0.747$. Isto é, 74%.

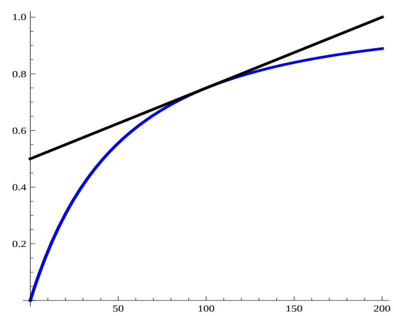


Figura 6.17: Gráficos de $P(t)$ (azul) e $l(t)$.

[2] Uma empresa de alimentos tem custo total para produzir uma linha de biscoitos dado por $C(x) = 0.1\,x^3 - 0.24\,x^2 + 300\,x + 100$, onde x é o nível de produção. ($C = C(x)$ é dado em US$). Determine o custo total para 6.1 unidades.

Calculemos a aproximação linear de $C = C(x)$, ao redor do ponto $x = 6$:

$$l(x) = C(6) + C'(6)\,(x-6) = C(6) + (0.3\,x^2 - 0.48\,x + 300)\bigg|_{x=6} (x-6) = 65.44 + 307.92\,x.$$

Logo, $l(6.1) = 1943.75$. Note que $C(6.1) = 1943.77$ dólares e que o erro é $E = 0.0157$.

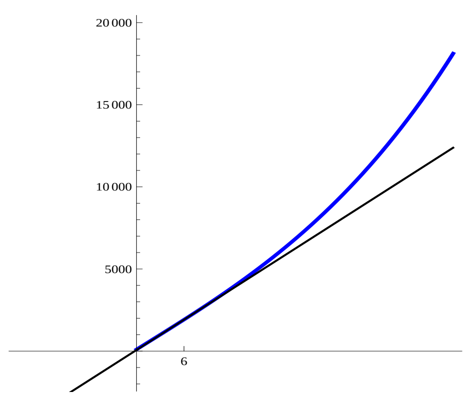


Figura 6.18: Gráfico de $C(x)$ (azul) e $l(x)$.

Suponha que não dispomos de calculadora ou de outro instrumento de cálculo e precisamos resolver os seguintes problemas:

[3] Se $f(x)=\dfrac{1}{(1+2\,x)^4}$ representa a temperatura num arame, calcule a temperatura $f(0.01)$.

Vamos determinar $l(x)=f(0)+f'(0)\,x$. Derivando: $f'(x)=-\dfrac{8}{(1+2\,x)^5}$; então:

$$\frac{1}{(1+2\,x)^4}\simeq l(x)=1-8\,x,\qquad \text{no intervalo}\quad (-\varepsilon,\varepsilon),$$

tal que $\varepsilon>0$ (pequeno). Como $0.01\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, temos, $f(0.01)\simeq l(0.01)=0.92$ graus.

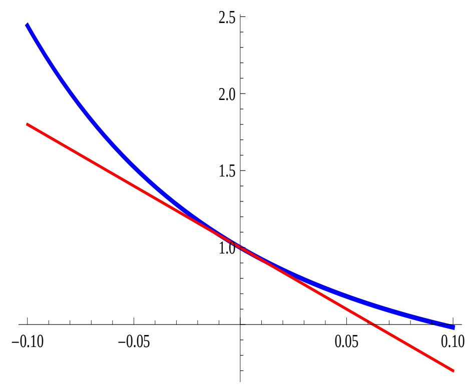


Figura 6.19: Exemplo [3].

[4] Se $f(t)=e^{0.3t}$ representa o crescimento de uma população de bactérias, calcule a população de bactérias para $t=20.012$.

Vamos determinar $l(t)=f(20)+f'(20)\,(t-20)$, com $f(20)\simeq 403.42$. Derivando, obtemos: $f'(t)=0.3\,e^{0.3t}$; então:

$$e^{0.3t}\simeq 403.42+121.02\,(t-20),\qquad \text{no intervalo}\quad (20-\varepsilon,20+\varepsilon),$$

tal que $\varepsilon>0$ (pequeno). Como $20.012\in(20-\varepsilon,20+\varepsilon)$, se $t=20.012$, então,

$$e^{0.3\times 20.012}\simeq 403.42+121.02\times 0.012=404.87.$$

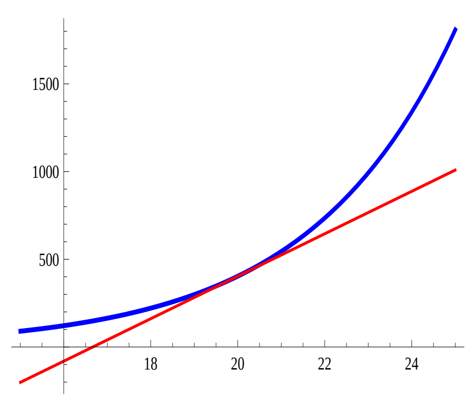


Figura 6.20: Exemplo [4].

[5] Calcule, aproximadamente $(1.001)^7 - 2\sqrt[3]{(1.001)^4} + 3$.

Considere a função $f(x) = x^7 - 2\sqrt[3]{x^4} + 3$ e $x = 1.001$. Então, para $x_0 = 1$, temos $f(1) = 2$, $f'(x) = 7x^6 - \dfrac{8}{3}\sqrt[3]{x}$ e $f'(1) = \dfrac{13}{3}$; logo,

$$l(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{3}(13x - 7),$$

para todo x próximo de 1. Em particular, para $x = 1.001$,

$$(1.001)^7 - 2\sqrt[3]{(1.001)^4} + 3 \simeq \frac{1}{3}(13 \times (1.001) - 7) \simeq 2.00433.$$

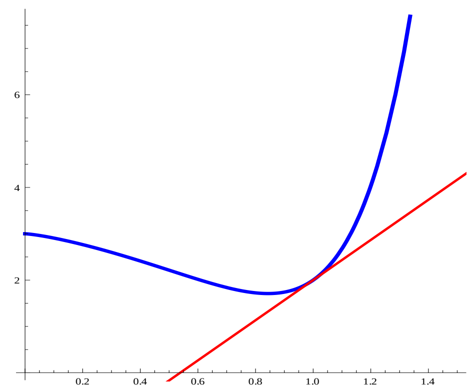


Figura 6.21: Exemplo [5]

6.9 A Derivada como Taxa de Variação

Se $y = f(x)$ é função derivável, então $f'(x)$ é a taxa de variação de y em relação a x.

A interpretação da derivada como taxa de variação se aplica em diversas áreas da ciência. Por exemplo, se $y = f(t)$ mede a concentração de glóbulos vermelhos no sangue no instante t,

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{t}$$

mede a taxa de variação média da concentração de glóbulos vermelhos durante o intervalo de tempo $[t, t+h]$ e $f'(a)$ mede a taxa de variação instantânea de glóbulos vermelhos no instante $t = a$.

Exemplo 6.12.

[1] O lucro, em reais, de uma empresa com a venda de x unidades de um certo produto é $L(x) = 200\sqrt{x} + 390x - \dfrac{x}{2}$. Se as vendas estão aumentando a uma taxa de 30 unidades por dia, determine a taxa de variação do lucro no instante que a empresa acabou de vender 10000 unidades.

Seja $x = x(t)$ a quantidade de unidades no instante t. Devemos calcular $\frac{dL}{dt}$ para $x = 10000$; derivando pela regra da cadeia:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \left[\frac{100}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + 390\right]\frac{dx}{dt}.$$

Como $\frac{dx}{dt} = 30$ e $x = 10000$, temos que;

$$\frac{dL}{dt} = 11715.$$

A empresa teve lucro de 11715 reais.

[2] Os executivos de uma importadora de arroz determina que a demanda dos consumidores é aproximadamente igual a:

$$A(x) = \frac{5000}{x^2}$$

toneladas por semana, quando o preço for x reais. Estima-se que daqui a t semanas o preço do arroz será modelado por $x(t) = 0.02\,t^2 + 0.1\,t + 2$ reais por tonelada. Qual será a taxa de variação da demanda semanal daqui a 10 semanas.

Devemos calcular $\frac{dA}{dt}$ para $t = 10$; derivando pela regrada cadeia:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{10000}{x^3}\big[0.1 + 0.04\,t\big].$$

Como $t = 10$, temos que $x = 5$

$$\frac{dA}{dt} = -40.$$

A demanda decresce à razão de 40 toneladas semanais.

6.10 Derivação Implícita

Seja $F(x, y) = 0$ uma equação nas variáveis x e y.

Definição 6.6. *A função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, quando*

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Em outras palavras, quando $y = f(x)$ satisfaz à equação $F(x, y) = 0$.

Exemplo 6.13.

[1] Seja a equação $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=x^3+y-1$; a função $y=f(x)=1-x^3$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, pois:

$$F(x,f(x))=x^3+(1-x^3)-1=0.$$

[2] Seja a equação $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=y^4+x-1$; a função $y=f(x)=\sqrt[4]{1-x}$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, pois:

$$F(x,f(x))=(\sqrt[4]{1-x})^4+x-1=0.$$

[3] Seja a equação $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=x^2+y^2-25$; esta equação define implicitamente uma família de funções; por exemplo:

$$f(x)=\sqrt{25-x^2} \quad \text{e} \quad f(x)=-\sqrt{25-x^2}.$$

Em geral,

$$y=f_c(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2} & \text{se} \quad -5\le x\le c\\ \\ -\sqrt{25-x^2} & \text{se} \quad 5\ge x>c,\end{cases}$$

para cada $c\in(-5,5)$.

[4] Seja $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=y^2-3\,y-x-7$; então, as funções $f(x)=\dfrac{3\pm\sqrt{4\,x+37}}{2}$ são definidas implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, pois:

$$F(x,f(x))=F(x,\frac{3\pm\sqrt{4\,x+37}}{2})=0.$$

Observemos que nada garante que uma função definida implicitamente seja contínua, derivável, etc. Na verdade, nem sempre uma equação $F(x,y)=0$ define implicitamente alguma função. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$x^3\,y^6+x^3\,tg(x\,y^2)+ln(x+y)+sen(x)=0.$$

6.10.1 Cálculo da Derivada de uma Função Implícita

Podemos calcular a derivada de uma função definida implicitamente sem necessidade de explicitá-la. Para isto usaremos novamente a regra da cadeia. Suponha que $F(x,y)=0$ define implicitamente uma função derivável $y=f(x)$. Através de exemplos mostraremos que podemos calcular y' sem conhecer y.

Exemplo 6.14.

[1] Seja $y=f(x)$ uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2+y^2=1$.

i) Calcule y'.

ii) Verifique que a função $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ é definida implicitamente por $x^2+y^2=1$ e calcule f'.

i) Como $y = f(x)$, temos $x^2 + ((f(x))^2 = 1$. Derivando em relação a x ambos os lados da igualdade e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$(x^2)' + (((f(x))^2)' = (1)' \Longrightarrow 2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0 \Longrightarrow x + f(x)\,f'(x) = 0.$$

Então, $f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)} = -\dfrac{x}{y}$. Logo,

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

ii) É imediato que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$.

Método de Cálculo

Dada uma equação que define y implicitamente como uma função derivável de x, calcula-se y' do seguinte modo:

Deriva-se ambos os lados da equação em relação a x, termo a termo. Ao fazê -lo, tenha em mente que y é uma função de x e use a regra da cadeia, quando necessário, para derivar as expressões nas quais figure y.

O resultado será uma equação onde figura não somente x e y, mas também y'. Expresse y' em função de x e y. Tal processo é chamado explicitar y'.

Exemplo 6.15.

[1] Uma fábrica de equipamentos eletrônicos vende uma quantidade x de artigos (em milhões) quando o preço é de p reais, por unidade. A relação entre preço e demanda é dada por:

$$x^3 - 3\,x^2\,p^4 + p^3 = 6\,x + 1.$$

Calcule p' se $p = f(x)$ é uma função derivável, definida implicitamente.

Note que $x^3 - 3\,x^2\,p^4 + p^3 = 6\,x + 1$ é igual a $x^3 - 3\,x^2\,(f(x))^4 + (f(x))^3 = 6\,x + 1$; derivando ambos os lados da equação, obtemos: $(x^3)' - (3\,x^2\,(f(x))^4)' + ((f(x))^3)' = (6\,x + 1)'$; então,

$$3\,x^2 - 6\,x\,(f(x))^4 - 12\,x^2\,f'(x)\,(f(x))^3 + 3\,f'(x)\,(f(x))^2 = 6.$$

Logo, $3\,x^2 - 6\,x\,p^4 - 12\,x^2\,p'\,p^3 + 3\,p'\,p^2 = 6$. Expressando p' em função de x e p:

$$p' = \frac{2 - x^2 + 2\,x\,p^4}{p^2\,(1 - 4\,x^2\,p)}.$$

[2] Numa empresa, a venda de certo produto tem a seguinte função de demanda:

$$x = f(p) = 3.25 \times e^{-0.31p},$$

onde p é dado em milhões de reais e x em unidades/mes. Calcule p' se $p = f(x)$ é uma função derivável, definida implicitamente.

Derivando ambos os lados da equação, obtemos:

$$x' = \left(3.25 \times e^{-0.31p}\right)' \Longrightarrow 1 = -1.0075\,p'\,e^{-0.31p} \Longrightarrow p' = -0.992556 \times e^{0.31p}.$$

[3] A função de oferta de um certo produto é $p\,x^2 - 20\,p\,x - 3\,x + 2\,p + 422 = 0$, x é em milhares. Se a oferta está crescendo a uma taxa de 250 produtos por dia, qual é a taxa de variação do preço quando a oferta diária é de 10000 produtos?

Denotemos por $x = x(t)$ a quantidade do produto no instante t e $p = p(t)$ o preço do produto no instante t. Devemos calcular $\dfrac{dp}{dt}$.

Derivando implicitamente $p\,x^2 - 20\,p\,x - 3\,x + 2\,p + 422 = 0$, temos:

$$2\,x\,p\,\frac{dx}{dt} + x^2\,\frac{dp}{dt} - 20\,p\,\frac{dx}{dt} - 20\,x\,\frac{dp}{dt} - 3\,\frac{dx}{dt} + 2\,\frac{dp}{dt} = 0.$$

Colocando $\dfrac{dp}{dt}$ e $\dfrac{dx}{dt}$ em evidência:

$$\frac{dp}{dt}\left[x^2 - 20\,x + 2\right] + \frac{dx}{dt}\left[2\,x\,p - 20\,p - 3\right] = 0;$$

logo:

$$\frac{dp}{dt} = -\left[\frac{2\,x\,p - 20\,p - 3}{x^2 - 20\,x + 2}\right]\frac{dx}{dt}.$$

Note que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{4}$ e se $x = 10$, então $p = 4$ e:

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{p=4,x=4} = -\left[\frac{3}{98}\right]\frac{1}{4} = -\frac{3}{392}.$$

[4] Seja x o número de unidades de mão de obra e y o capital investido num processo de fabricação. Quando 150000 unidades são produzidas, a relação entre mão de obra e capital é modelada por:

$$300\,x^{0.75}\,y^{0.25} = 150000,$$

chamada função de produção de Cobb-Douglas. Determine a taxa de variação de y em relação a x, quando $x = 40000$ e $y = 1000000$.

Derivando ambos os lados da equação, obtemos:

$$\left.225\,y^{0.25}\,x^{-0.25} + 75\,x^{0.75}\,y^{-0.75}\,y'\right|_{x_0,y_0} = 0 \Longrightarrow 503.115 + 6.7082\,y' = 0,$$

onde $x_0 = 40000$ e $y_0 = 1000000$, logo $y' = -75$. Isto é, diminui à razão de 75 unidades.

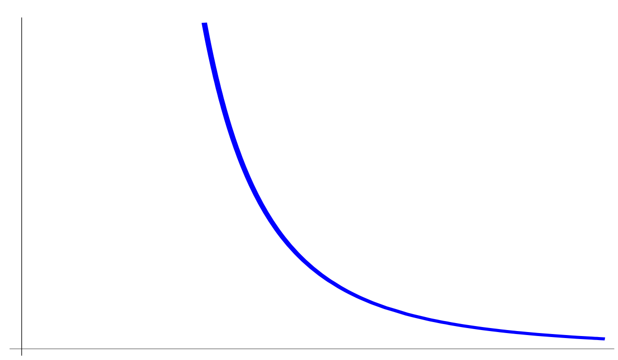


Figura 6.22: Gráfico da função de Cobb-Douglas.

[5] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em qualquer ponto; (a e b constantes não nulas).

Derivando a equação implicitamente:

$$\frac{2\,x}{a^2} + \frac{2\,y\,y'}{b^2} = 0.$$

Expressando y' em função de x e y: $y' = -\dfrac{b^2\,x}{a^2\,y}$; lembrando que $x = x_0$, $y' = f'(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, se $y_0 \neq 0$, temos: $f'(x_0) = -\dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto (x_0, y_0) e a equação desta reta é: $y - y_0 = -(\dfrac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0})\;(x - x_0)$. Ou, equivalentemente,

$$\boxed{\left[\frac{y_0}{b^2}\right] y + \left[\frac{x_0}{a^2}\right] x = 1}$$

A equação da reta normal é:

$$\boxed{y - y_0 = \left[\frac{a^2\,y_0}{b^2\,x_0}\right](x - x_0)}$$

se $x_0 \neq 0$.

Estas são as equações da reta tangente e da reta normal num ponto qualquer (x_0, y_0) da elipse. Em particular se $a = b = r$, temos todas as retas tangentes e normais num ponto qualquer (x_0, y_0) de um círculo de raio r.

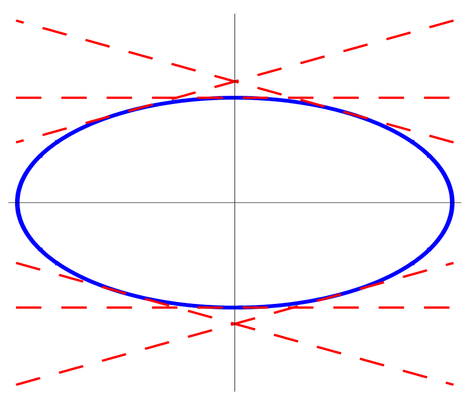


Figura 6.23: A elipse e suas tangentes.

6.11 Derivadas de Ordem Superior

Definição 6.7. *Seja f uma função derivável. Se a derivada f' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada segunda de f e é denotada por $(f')' = f''$. Se f'' é uma função derivável, então sua* *derivada é chamada derivada terceira de f e é denotada por $(f'')' = f'''$. Em geral, se a derivada de ordem $(n-1)$ de f é uma função derivável, sua derivada é chamada derivada n-ésima de f e é denotada por $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$.*

Notações: $f^{(0)} = f$, $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$, etc.

Exemplo 6.16.

[1] Sendo $f(x) = x^4 + 2x^3 + x - 1$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$4\,x^3 + 6\,x^2 + 1$	$12\,x^2 + 12\,x$	$24\,x + 12$	24	0	0	0

Logo, $f^{(n)}(x) = 0$, se $n \geq 5$.

Figura 6.24: Gráficos de $y = f(x)$ (verde) e suas derivadas.

Em geral, se f é uma função polinomial de grau n, então, $f^{(n)}(x) = n!\,a_n$ e $f^{(p)}(x) = 0$ para $p > n$.

[2] Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$-x^{-2}$	$2\,x^{-3}$	$-6\,x^{-4}$	$24\,x^{-5}$	$-120\,x^{-6}$	$720\,x^{-7}$	$-5040\,x^{-8}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \,\frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

[3] Sendo $f(x) = \sqrt{e^x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{16}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{32}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{64}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{128}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2^n}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

[4] Se $y = e^x\,(A\,x + B)$ satisfaz à equação $3\,y^{(3)} - 6\,y'' - 2\,y' + 4\,y = x\,e^x$, determine o valor das constantes A e B.

Calculando as derivadas:

$$y' = e^x\,(A\,x + A + B), \quad y'' = e^x\,(A\,x + 2\,A + B) \quad \text{e} \quad y^{(3)} = e^x\,(A\,x + 3\,A + B);$$

logo a equação fica:

$$-e^x\,(A\,x + 5\,A + B) = x\,e^x$$

da qual obtemos $A = -1$ e $B = 5$.

[5] Calcule $f^{(3)}(9)$, se $f(x) = x\,g(\sqrt{x})$, $g'(3) = 6$, $g''(3) = 1$ e $g^{(3)}(3) = 2$.

$$f'(x) = g(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2}\,g'(\sqrt{x}), \quad f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}\,(3\,g'(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\,g''(\sqrt{x}))$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{8\sqrt{x^3}}\,(-3\,g'(\sqrt{x}) + 3\sqrt{x}\,g''(\sqrt{x}) + x\,g^{(3)}(\sqrt{x}));$$

logo, $f^{(3)}(9) = \dfrac{1}{24}$.

Em geral, nada garante que quando calculamos sucessivamente as derivadas de uma função, estas sejam funções deriváveis.

[6] Seja $f(x) = x^2|x|$. Então,

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -3\,x^2 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Logo $f'(x) = 3\,x\,|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$; analogamente temos que $f''(x) = 6\,|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$; mas f'' não é derivável no ponto $x_0 = 0$. Verifique.

A função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de **de classe $\mathbf{C}^k$** ($0 \leq k < +\infty$) em A, se f possui as derivadas até a ordem k e $f^{(k)}$ é contínua em A. A função f é de classe C^∞ quando $f \in C^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $f^{(0)} = f$, se f é de classe C^0, então f é contínua.

Exemplo 6.17.

[1] As funções polinomiais são de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

[2] As funções exponenciais são de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

[3] As função logarítmicas são de classe C^∞ em $(0, +\infty)$.

[4] A função $f(x) = x^2|x|$ do exemplo [6] é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e não é de classe C^2.

6.12 Aproximação de Ordem Superior

De forma análoga a aproximação linear podemos definir aproximação quadrática, aproximação cúbica, etc. É possível verificar que o erro destas aproximações é cada vez menor ao redor de um pequeno intervalo.

Definição 6.8. *Seja $f \in C^3$. A aproximação quadrática e a aproximação cúbica de f em torno de x_0 são denotadas e definidas por:*

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2$$
$$c(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

Exemplo 6.18.

[1] A proporção de lâmpadas de sódio que falham após t horas de uso é dada por:

$$P(t) = 1 - \frac{10000}{(t + 100)^2}.$$

Determine a proporção de lâmpadas que falham após 99 horas de uso.

Vimos que a aproximação linear de $P = P(t)$ ao redor de 100 é

$$l(t) = \frac{1}{400}\,(t + 200).$$

Determinemos a outras aproximações, ao redor de 100. Calculemos :

$$P''(t) = -\frac{60000}{(t + 100)^4} \quad \text{e}$$
$$P^{(3)}(t) = \frac{240000}{(t + 100)^5},$$

logo:

$$q(t) = \frac{5}{16} + \frac{t}{160} - \frac{3\,t^2}{160000}$$

$$c(t) = \frac{3}{16} + \frac{t}{100} - \frac{9\,t^2}{160000} + \frac{t^3}{8000000}.$$

Logo, $q(99) = 0.74748125$ e $c(99) = 0.7474811250$.

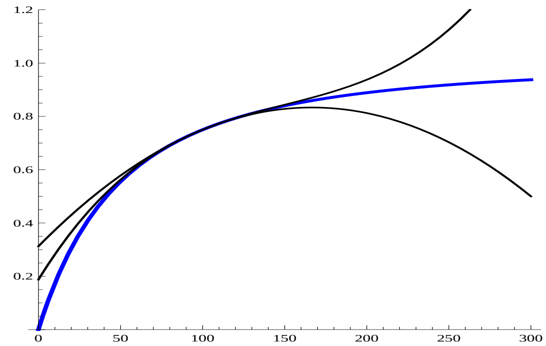


Figura 6.25: Gráficos de $P(t)$ (azul), $q(t)$ e $c(t)$.

[2] Calcule, aproximadamente $(1.1)^2 \times \sqrt{10 - 1.1^2}$.

Considere a função $f(x) = x^2\,\sqrt{10 - x^2}$ e $x = 1.1$. Então, para $x_0 = 1$, temos $f(1) = 3$, logo:

$$q(x) = -\frac{14}{27} + \frac{37\,x}{27} + \frac{58\,x^2}{27}$$

$$c(x) = \frac{50}{243} - \frac{65\,x}{81} + \frac{350\,x^2}{81} - \frac{176\,x^3}{243}.$$

e $q(1.1) = 3.58815$ e $c(1.1) = 3.58741$.

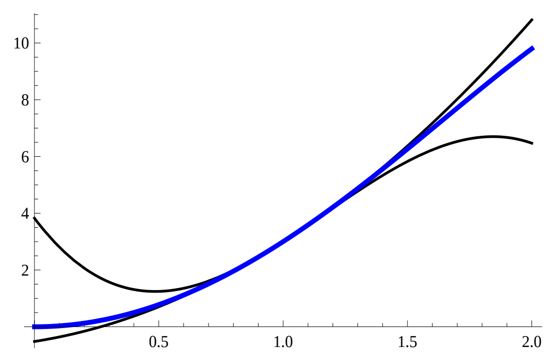


Figura 6.26: Gráficos de $f(x)$ (azul), $q(x)$ e $c(t)$.

Para outras aproximações, veja o último exercício do capítulo.

6.13 Exercícios

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico das seguintes funções, no ponto de abscissa dada:

   (a) $y = 1 - x^2, \quad x = 3$

   (b) $y = x^3 - 5\,x + 1, \quad x = 1$

   (c) $y = x + 4\,ln(x), \quad x = 1$

   (d) $y = x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6, \quad x = 3$

   (e) $y = x^4 + x^3 - x, \quad x = 0$

   (f) $y = x^{-2}, \quad x = -2$

   (g) $y = \sqrt{x} + x^{-1}, \quad x = 1$

   (h) $y = \sqrt{x^2 + 2\,x}, \quad x = 1$

   (i) $y = ln(x^2), \quad x = 1$

   (j) $y = \sqrt[3]{e^x}, \quad x = 0$

   (k) $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}, \quad x = 1$

2. Determine as equações das retas tangentes e das retas normais às curvas, nos pontos de abscissas dadas:

   (a) $y = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x = -1$

   (b) $y = \dfrac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x = 1$

   (c) $y = \ln(x^2 + 1), \quad x = 1$

   (d) $y = (4\,x^3 + 3\,x + 1)\,ln(x), \quad x = 1$

3. Determine os pontos da curva $y = 3\,x^3 + 14\,x^2 + 3\,x + 8$ onde as retas tangentes passando por esses pontos intersectam a origem.

4. Determine $f'(x)$ se $u(x)$, $v(x)$ e $w(x)$ são funções deriváveis e:

   (a) $f(x) = u(x)\,v(x)\,w(x)$

   (b) $f(x) = \dfrac{u(x)\,w(x)}{v(x)}$

   (c) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)\,w(x)}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{u(x)\,v(x)\,w(x)}$

5. Use o item anterior para calcular $f'(x)$ se:

   (a) $f(x) = (x^2 + x + 1)\,(x^3 + x)\,(x + 1)^2$

   (b) $f(x) = (x^5 + x^3 + 1)^3$

   (c) $f(x) = \big(\dfrac{x + 2}{3\,x + 1}\big)\,(x^2 + 2)$

   (d) $f(x) = \big(\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3}\big)\,(x^4 - 2\,x^3 + 1)$

6. Usando a regra da cadeia, determine y', sendo:

   (a) $y = (3\,x + 5)^{50}$

   (b) $y = (4\,x^3 + 3\,x - 1)^7$

   (c) $y = (6 - 3\,x)^8$

   (d) $y = (3\,x^2 + 4)^5$

   (e) $y = \dfrac{1}{x^3 + 3\,x^2 - 6\,x + 4}$

   (f) $y = (x^2 + 1)^2(x^3 - 2\,x)^2$

(g) $y = \dfrac{(3\,x-6)^{-1}}{(x+3)^{-2}}$

(h) $y = (\dfrac{3\,x-2}{2\,x+1})^{8}$

(i) $y = \dfrac{1}{x\,(x+1)}$

(j) $y = \dfrac{(x^{-2}+3\,x^{-4}+7\,x^{-5})^{-8}}{(x^2+x^{-2})^{-4}(x^{-1})}$

7. Calcule as derivadas das funções:

(a) $y = 5^{x-1}$

(b) $y = (10^x + 10^{-x})^2$

(c) $y = log_5(x^2)$

(d) $y = x\,log_4(x) - x$

(e) $y = ln(\dfrac{x}{x+1})$

(f) $y = ln(10^x)$

(g) $y = ln(log_{10}(x))$

8. Usando a derivada do logaritmo, calcule y':

(a) $y = \sqrt{x^3+2}$

(b) $y = (\dfrac{x+4}{x+7})^6$

(c) $y = x^{x-1}$

(d) $y = 3^{ln(x)}$

(e) $y = \dfrac{e^x\,(x^3-1)}{\sqrt{2x+1}}$

(f) $y = (x^2)^x$

(g) $y = x^{x^2}$

(h) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(i) $y = x^{e^x}$

(j) $y = \big(ln(x)\big)^{ln(x)}$

9. Usando derivação implícita, calcule y':

(a) $x^3 + y^3 = 5$

(b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$

(d) $e^y = x + y$

(e) $ln(y^2 + x) = y^3 - x^2$

(f) $(x+y)^2 = (x-y)^2$

(g) $(x^2 - y^2)^2 = y^2 + x^2$

(h) $ln(y-x) = ln(y+x)$

(i) $e^{-2x-y} = 5 + ln(x)$

10. Determine a segunda derivada de:

(a) $y = \sqrt[6]{x}$

(b) $y = x^{-5}$

(c) $y = \dfrac{x}{2\,(x+1)}$

(d) $y = \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^2$

(e) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(f) $y = \dfrac{e^x}{x}$

(g) $y = ln(ln(x))$

11. Calcule as derivadas sucessivas, até a ordem n dada:

(a) $y = 3\,x^4 - 2\,x$, $n = 5$

(b) $y = 3\,x^4 - 2\,x$, $n = 4$

(c) $y = \sqrt{3 - x^2}$, $n = 3$

(d) $y = \dfrac{1}{x-1}$, $n = 4$

(e) $y = e^{2x+1}$, $n = 3$

(f) $y = ln(2\,x)$, $n = 4$

(g) $y = x\,e^x$, $n = 7$

12. Calcule $y''(x)$ se:

(a) $x^4 + y^4 = 16$

(b) $x^2 + 6\,x\,y + y^2 = 8$

(c) $x^2\,y^2 = (y+1)^2(y - y^2)$

(d) $y^2 = x^3\,(2 - x)$

13. Determine a linearização no ponto $x_0 = 0$, das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(b) $f(x) = e^{-2x}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(e) $f(x) = ln(x^3 + 5\,x + 5)$

(f) $f(x) = (4\,x^3 + 3\,x - 1)^7$

14. Calcule aproximadamente:

(a) $\sqrt[3]{0.126}$

(b) $\sqrt[4]{17}$

(c) $\sqrt[3]{(8.01)^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$

(d) $2^{2.002}$

15. Mostre que a função logística $L = L(t)$ satisfaz à equação:

$$\frac{dL}{dt} = C\,L\,\big(1 - \frac{L}{A}\big).$$

Se $L = L(t)$ representa o crescimento populacional, quando a população se estabiliza?

16. A redução de oxigênio na água de uma lagoa, devido ao despejo de esgoto, só volta a níveis normais t dias após o despejo do esgoto. Sabendo que a quantidade de oxigênio que permanece, após t dias é dada por:

$$P(t) = \frac{500\,(t^2 + 10\,t + 100)}{t^3 + 20\,t^2 + 200},$$

medido em $\%$ do nível normal de oxigênio, determine a velocidade com que a quantidade de oxigênio está sendo reduzida, após 1, 10, 20 e 50 dias após o despejo.

17. O custo total, em reais, de uma empresa para a produção de x unidades de um certo produto é de $C(x) = 5\,x^2 + 3\,x + 10$. Sabendo que o nível atual de produção é de 30 unidades, utilize a aproximação linear para determinar o custo total se 30,5 unidades forem produzidas.

18. A receita gerada pela venda de x unidades de um produto, em uma empresa, é dada por $R(x) = -2\,x^2 1500\,x$ u. m. Utilize a aproximação linear para calcular $R(255)$.

19. O lucro de uma empresa (em reais) com a venda de x unidades de um certo produto é dado por $L(x) = 200\,x - \dfrac{x^2}{8}$. Sabendo que as vendas estão aumentando a uma taxa de 20 unidades por dia. Calcule a taxa de variação do lucro quando a empresa acabou de vender 200 unidades.

20. Numa fábrica, o custo total para a fabricação de x unidades de um certo produto durante um dia é $C(x) = 0.2\,x^3 - 0.1\,x^2 + 0.5\,x + 600$ reais. Após um dia de trabalho, depois de t horas foram produzidas $x(t) = 10\,\sqrt{t^2+4}$ unidades, calcule a taxa de variação do custo total em relação ao tempo, 3 horas após iniciada a produção.

21. A função da demanda de certo artigo produzido por uma empresa é dada, implicitamente, por $0.002\,x + p - 200 = 0$, sendo p o preço unitário e x o número de unidades produzidas em uma semana. Sabendo que a empresa aumenta a produção de um artigo à taxa de 100 unidades por semana, calcule a taxa de variação da receita em relação ao tempo, quando a produção semanal é de 3000 unidades.

22. Um empresário verificou que quando vendia liquidificadores a p reais cada um, os clientes compravam um total de $x\,p = 8000$ liquidificadores por mês. Sabendo que em t meses o preço dos liquidificadores será de $p(t) = 0.05\,t^{3/2} + 16.8$ reais, calcule a taxa de variação da demanda mensal de liquidificadores com relação ao tempo, daqui a 16 meses.

23. Determine as aproximações quadrática e cúbica no ponto $x_0 = 0$, das seguintes funções:

    (a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

    (b) $f(x) = e^{-2x}$

    (c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

    (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

    (e) $f(x) = ln(x^3 + 5\,x + 5)$

    (f) $f(x) = (4\,x^3 + 3\,x - 1)^7$

24. **Polinômio de Taylor de ordem n no ponto $\mathbf{x_0}$:** Seja f uma função n vezes derivável no ponto x_0. O polinômio de Taylor de ordem n, ($n = 0,\ 1,\ 2,\ ....$), no ponto x_0 é denotado por $P_n(x)$ e definido por:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

    Verifique que o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto $x_0 = 0$, das funções:

    (a) $f(x) = e^x$ é $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, k! \, (x-1)^k$.

(d) Esboce o gráfico de f, $P_1(x)$, $P_3(x)$ e $P_5(x)$ no mesmo sistema de coordenadas.

(e) Compare $P_n(x)$ e $l(x)$. Que conclusões pode tirar? É possível utilizar P_n para fazer aproximações de f?

Capítulo 7

APLICAÇÕES DA DERIVADA

7.1 Variação de Funções

Definição 7.1. *Seja f uma função e $x_0 \in Dom(f)$.*

1. *f possui um ponto de* **máximo relativo** *ou de* **máximo local** *no ponto x_0, se existe um pequeno intervalo aberto I que contem x_0 tal que:*

$$\boxed{f(x_0) \geq f(x), \quad \textit{para todo} \quad x \in I \cap Dom(f)}$$

   A imagem de x_0, $f(x_0)$, é chamada valor máximo local de f.

2. *f possui um ponto de* **mínimo relativo** *ou de* **mínimo local** *no ponto x_0, se existe um pequeno intervalo aberto I que contem x_0 tal que:*

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0), \quad \textit{para todo} \quad x \in I \cap Dom(f)}$$

   A imagem de x_0, $f(x_0)$, é chamada valor mínimo local de f.

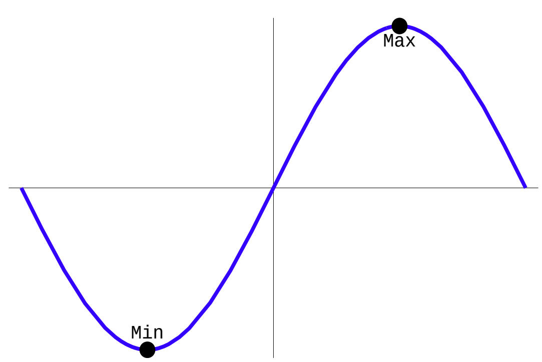


Figura 7.1: Pontos de mínimo e máximo.

Em geral, um ponto de máximo ou de mínimo é chamado ponto extremo.

Exemplo 7.1.

[1] Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Na verdade $x_0 = 0$ é o único ponto extremo de f.

[2] Seja $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Como no exemplo anterior, $x_0 = 0$ é o único ponto extremo de f.

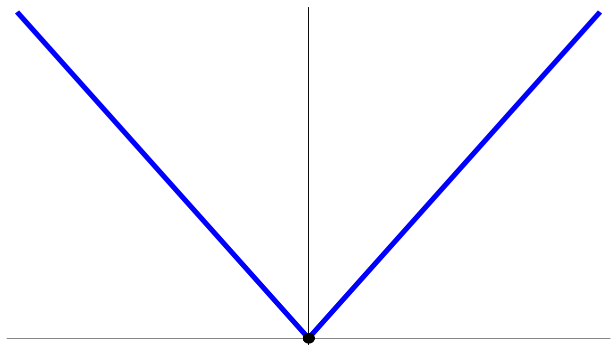


Figura 7.2: Gráfico de $f(x) = |x|$.

[3] Seja $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. f não possui pontos de máximo ou mínimo relativos em $\mathbb{R}$. Se f é restrita ao intervalo $\big(-1, 1\big]$, então f possui o ponto $x_0 = 1$ de máximo relativo. Se f é restrita ao intervalo $[0, 2]$, então f possui o ponto $x_0 = 2$ de máximo relativo e o ponto $x_0 = 0$ de mínimo relativo. Se f é restrita ao intervalo $(0, 1)$, então f não possui pontos de máximo relativo ou de mínimo relativo.

Estes exemplos nos indicam a importância dos domínios das funções quando queremos determinar pontos extremos.

Proposição 7.1. *Se f é uma função derivável no intervalo (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é um extremo relativo de f, então $f'(x_0) = 0$.*

A proposição nos indica que num ponto de máximo ou de mínimo relativo de uma função f, a reta tangente ao gráfico de f nesses pontos é paralela ao eixo dos x. Para a prova veja o apêndice.

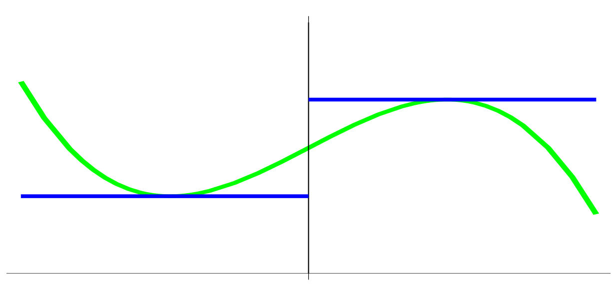


Figura 7.3:

A proposição não garante a existência de pontos extremos.

Exemplo 7.2.

$f(x) = x^3$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2$; logo $f'(0) = 0$, mas $x_0 = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo de f; de fato, $f(-1) < f(0) < f(1)$.

A proposição nos dá uma condição necessária para que um ponto seja extremo.

Definição 7.2. *Seja f uma função derivável no ponto $x_0 \in Dom(f)$. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 é chamado* **ponto crítico de** f.

Pela proposição anterior, todo ponto extremo é ponto crítico. A recíproca é falsa. (Veja exemplo anterior).

Exemplo 7.3.

[1] Seja $f(x) = x^3$; resolvemos $f'(x) = 3\,x^2 = 0$; então $x = 0$ é o único ponto crítico de f.

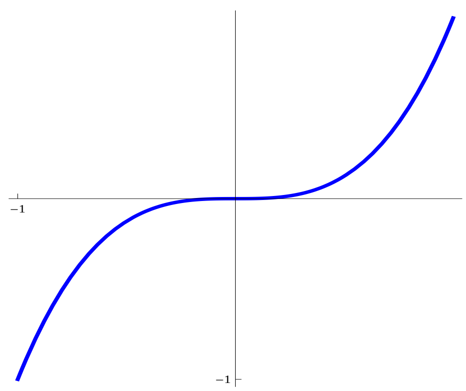


Figura 7.4: Ponto crítico de $f(x) = x^3$.

[2] Seja $f(x) = x^3 - 3\,x$; resolvemos $f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 0$; então, $x = 1$ e $x = -1$ são os pontos críticos de f.

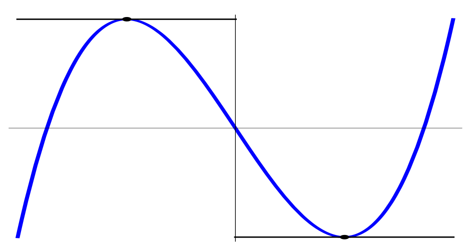


Figura 7.5: Pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3\,x$.

Na verdade um ponto "candidato"a máximo ou mínimo relativo de uma função derivável f sempre deve satisfazer à equação:

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Mais adiante saberemos descartar dos pontos críticos, aqueles que não são extremais.

Definição 7.3.

1. *O ponto onde uma função atinge o maior valor (se existe) é chamado máximo absoluto da função. O ponto x_0 é de* **máximo absoluto de** f *quando para todo $x \in Dom(f)$, tem-se $f(x_0) \geq f(x)$.*

2. *O ponto onde uma função atinge o menor valor (se existe) é chamado mínimo absoluto da função. O ponto x_0 é de* **mínimo absoluto de** f *quando para todo $x \in Dom(f)$, tem-se $f(x_0) \leq f(x)$.*

Um ponto de máximo absoluto é um ponto de máximo local. A recíproca é falsa; analogamente para mínimo absoluto.

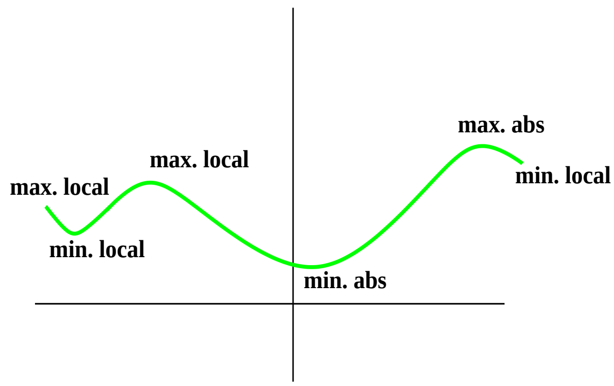


Figura 7.6: Pontos de máximos e mínimos

Exemplo 7.4.

[1] Seja $f(x) = 2\,x$ tal que $x \in [0,2]$. O ponto $x_0 = 2$ é um ponto de máximo absoluto de f.

De fato: $f(x) \leq f(2) = 4$, para todo $x \in [0,2]$ e $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo absoluto de f, pois $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in [0,2]$. Se f é definida em $(0,2)$, f não possui máximos nem mínimos.

[2] Seja $f(x) = x^2$ tal que $x \in [-1,2]$.

$x_0 = -1$ e $x_0 = 2$ são pontos de máximos locais, mas $x_0 = 2$ é máximo absoluto de f, pois $f(x) \leq f(2) = 4$, para todo $x \in [-1,2]$ e $x_0 = 0$ é um mínimo absoluto de f, pois $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in [0,2]$.

O teorema seguinte, devido a Weierstrass, garante a existência de pontos extremos de uma função, sem a hipótese de que a função seja derivável. A prova deste teorema será omitida. Para mais detalhes veja a bibliografia avançada.

Teorema 7.1. (Weierstrass)
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então existem x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \ \textit{para todo } x \in [a,b].$$

No teorema as hipóteses de que o domínio seja um intervalo do tipo $[a,b]$ e de que a função seja contínua são condições essenciais.

De fato, a função contínua $f(x) = x$ não possui pontos de máximo nem de mínimo em qualquer intervalo aberto. A função descontínua $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, não possui ponto de máximo nem de mínimo no intervalo $[-1, 1]$.

Teorema 7.2. (Rolle)
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) e é tal que $f(a) = f(b)$, então, existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 7.5.

O custo pela compra de uma quantidade x de um certo produto é modelado por:

$$C(x) = 0.75\,(x-1)\,(x-20)^2 + 400$$

em milhares de u.m. Note que, $C(1) = C(20)$; logo, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (1, 20)$ tal que $C'(c) = 0$. Por outro lado:

$$C'(x) = \frac{(x-20)\,(3\,x-22)}{4}.$$

Logo, $C'(c) = 0$ se, e somente se $c \cong 7.33$. Isto é a taxa de variação do custo é zero quando são comprados aproximadamante 8 produtos.

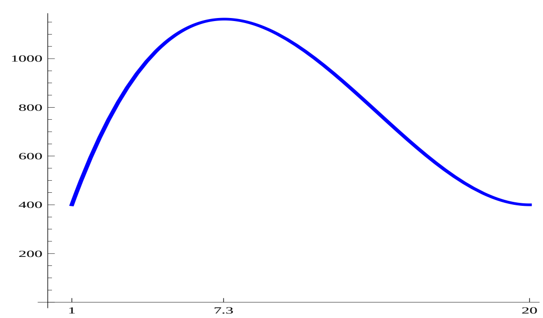


Figura 7.7: Gráfico do custo.

Teorema 7.3. (do Valor Médio)
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(x_0)\,(b-a)}.$$

Em outras palavras, existe um ponto no gráfico de f, onde a reta tangente nesse ponto é paralela à reta secante que liga $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Sabemos que uma função constante tem derivada nula. O Teorema do Valor Médio nos fornece a recíproca desta propriedade, como veremos a seguir.

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então $f(x) = g(x) + k$, onde k é uma constante.

7.2 Funções Monótonas

Seja $y = f(x)$ uma função definida num domínio D.

Definição 7.4.

1. *f é* **crescente** *em D se para todo $x_0,\ x_1 \in D$ com $x_0 < x_1$, tem-se $f(x_0) < f(x_1)$.*
2. *f é* **decrescente** *em D, se para todo $x_0,\ x_1 \in D$ com $x_0 < x_1$, tem-se $f(x_0) > f(x_1)$.*
3. *Em ambos os casos, f é dita monótona.*

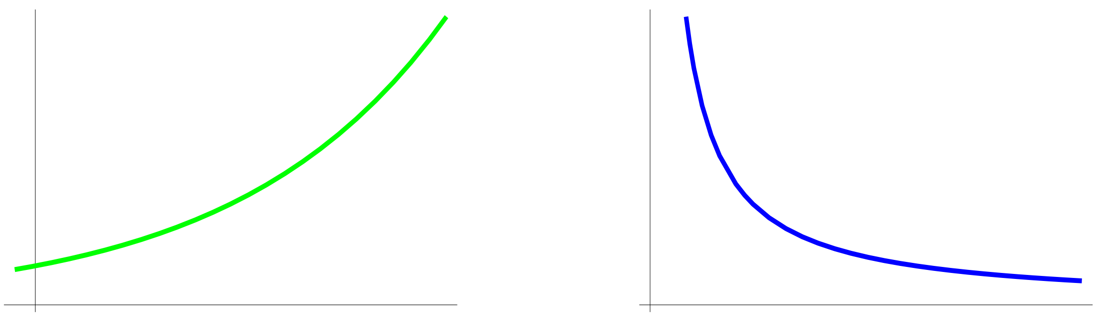


Figura 7.8: Funções crescente e decrescente, respectivamente.

Exemplo 7.6.

[1] Seja $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$; $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Sejam $x_0,\ x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $\dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_0}$. Logo, $f(x_1) < f(x_0)$ e f é monótona decrescente.

[2] Seja $y = f(x) = \sqrt{x}$; $D = [0, +\infty)$.

Sejam $x_0,\ x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $\sqrt{x_0} < \sqrt{x_1}$. Logo, $f(x_0) < f(x_1)$ e f é monótona crescente.

[3] Seja $y = f(x) = x^2$; $D = \mathbb{R}$.

Sejam $x_0,\ x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $x_0^2 < x_1^2$, se $0 \leq x_0$ e $0 < x_1$ e $x_1^2 < x_0^2$, se $x_0 < 0$ e $x_1 \leq 0$. Logo, $f(x_0) < f(x_1)$ em $[0 + \infty)$ e $f(x_1) < f(x_0)$ em $(-\infty, 0)$; f é monótona crescente em $(0, +\infty)$ e monótona decrescente em $(-\infty, 0)$.

O exemplo anterior nos mostra que, em geral, uma função pode ter partes do domínio onde é crescente e partes onde é decrescente.

Proposição 7.2. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é decrescente em $[a,b]$.*

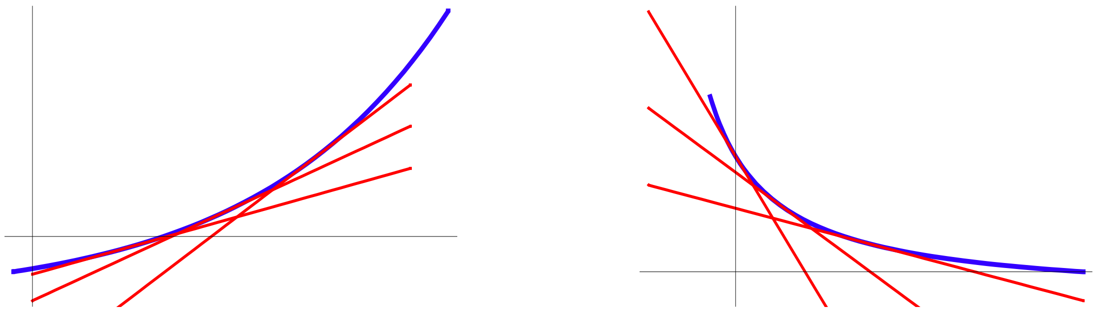


Figura 7.9:

Exemplo 7.7.

[1] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.

Derivando f temos $f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3\,(x+1)\,(x-1)$; logo, $f'(x) < 0$ se, e somente se $-1 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ se, e somente se $x < -1$ ou $x > 1$. Logo, f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 1)$.

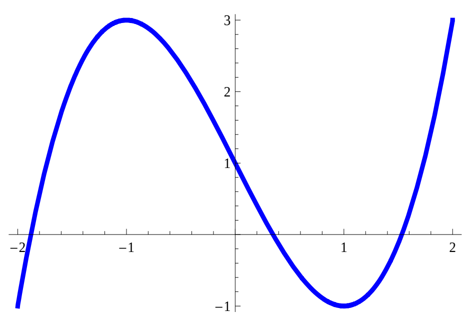


Figura 7.10: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.

[2] Uma empresa agrícola determinou que a relação entre a produção P, em toneladas, de certo tipo de soja e a quantidade x, de um certo fertilizante é dada por:

$$P(x) = 15\,x + x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento da produção.

Derivando P temos $P'(x) = 15 + 2\,x - x^2$; logo, $P'(x) > 0$ se, e somente se $-3 < x < 5$ e $P'(x) < 0$ se, e somente se $x < -3$ ou $x > 5$. Como $x \geq 0$ temos:

Intervalos	$P'(x)$	$P(x)$
$0 < x < 5$	> 0	crescente
$5 < x$	< 0	decrescente

f é crescente em $(0,5)$ e decrescente em $(5,+\infty)$.

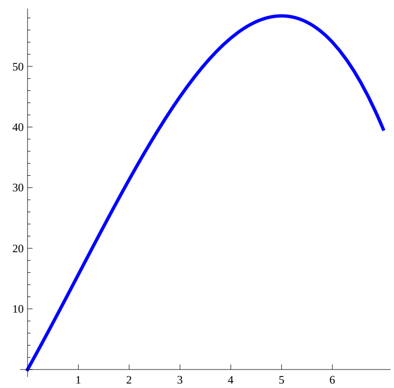


Figura 7.11: Gráfico de $P = P(x)$

[3] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5$.

Derivando f temos $f'(x) = x^3 - x^2 - 2\,x = x\,(x-2)\,(x+1)$; logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = 0$, $x = 2$ e $x = -1$.

Intervalos	$x\,(x-2)\,(x+1)$	$f(x)$
$-1 < x < 0$	> 0	crescente
$0 < x < 2$	< 0	decrescente
$x > 2$	> 0	crescente
$x < -1$	< 0	decrescente

f é crescente em $(-1,0) \cup (2,+\infty)$ e decrescente em $(0,2) \cup (-\infty,-1)$.

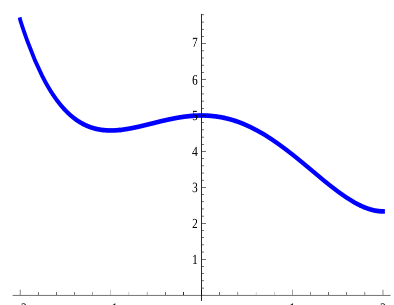


Figura 7.12: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5$

[4] Uma pequena empresa pode vender todos os artigos que produz semanalmente a um preço de 6 reais por unidade. O custo para produzir x artigos por semana, em reais, é dado por $C(x) = 1000 + 6\,x - 0.003\,x^2 + 0.000001\,x^3$. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento do lucro.

Primeiramente observamos que a função da receita é $R(x) = 6\,x$, então:

$$L(x) = R(x) - C(x) = -1000 + 0.003\,x^2 - 0.000001\,x^3.$$

Derivando, $L'(x) = 0.006\,x - 0.000003\,x^2$, logo, $L'(x) < 0$ se, e somente se $x > 2000$ e $L'(x) > 0$ se, e somente se $0 < x < 2000$.

Intervalos	$L'(x)$	$L(x)$
$0 < x < 2000$	> 0	crescente
$2000 < x$	< 0	decrescente

O lucro decresce em $(2000, +\infty)$ e cresce em $(0, 2000)$

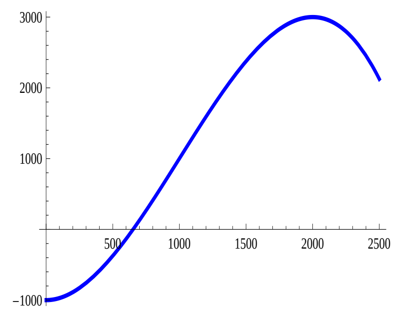


Figura 7.13: Gráfico de $L = L(x)$

[5] A função $Q(t) = Q_0\,e^{kt}$ $(k \neq 0)$ é crescente se $k > 0$ e decrescente se $k < 0$, o que justifica seu nome.

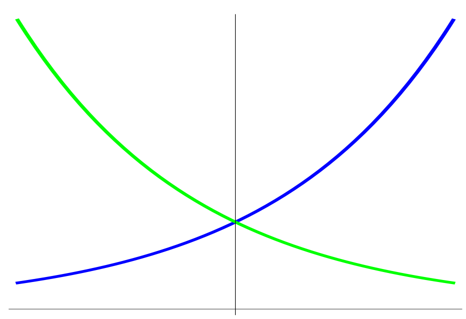


Figura 7.14: Gráficos de $Q(t) = Q_0\,e^{kt}$, para $k > 0$ e $k < 0$.

[6] **Crescimento populacional inibido:** Considere uma colônia de coelhos com população inicial P_0 numa ilha sem predadores. Seja $P = P(t)$ a população no instante t. Estudos ecológicos mostram que a ilha pode suportar uma quantidade máxima de P_1 indivíduos. Sabemos que este fenômeno é modelado pela função logística que satisfaz à equação:

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\,(P_1 - P), \quad (k > 0).$$

Se $P_1 > P$, então $\dfrac{dP}{dt} > 0$, de modo que a população $P = P(t)$ cresce.

Se $P_1 < P$, então $\dfrac{dP}{dt} < 0$, de modo que a população $P = P(t)$ decresce.

Se $P_1 = P$, então $\dfrac{dP}{dt} = 0$, de modo que a população $P = P(t)$ fica estável.

7.3 Determinação de Máximos e Mínimos

Teorema 7.4. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), exceto possivelmente num ponto x_0.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de máximo de f.*

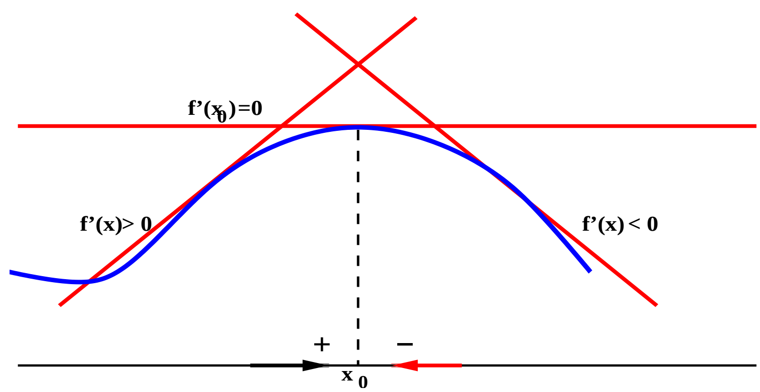


Figura 7.15: Máximo local.

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de mínimo de f.*

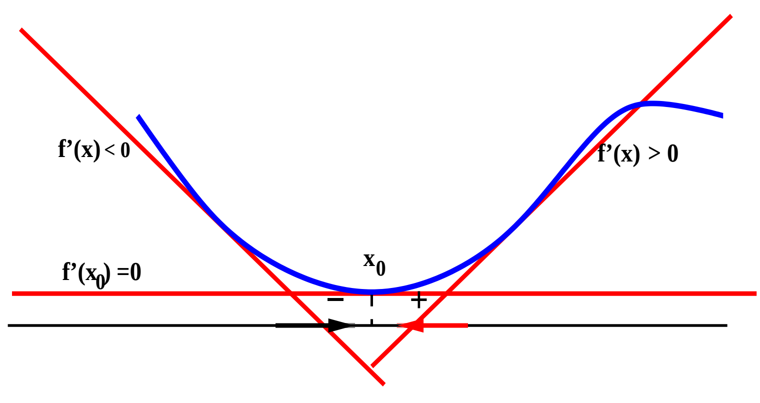


Figura 7.16: Mínimo local.

Do teorema 7.4 segue que num ponto de máximo ou de mínimo de uma função contínua nem sempre existe derivada.

Exemplo 7.8.

[1] Seja $f(x) = |x|$, definida em $\mathbb{R}$; claramente $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo de f, mas $f'(0)$ não existe. De fato. Para todo $x \neq 0$, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

[2] $f(x) = x^3$. O ponto crítico é a solução da equação $f'(x_0) = 0$ ou, equivalentemente, $3\,x_0^2 = 0$; então, $x_0 = 0$. Por outro lado, $f'(x) = 3\,x^2 > 0$, se $x \neq 0$; logo, $x_0 = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo de f.

[3] $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$. As soluções da equação $f'(x_0) = 0$ são $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$. Do exemplo 2 do parágrafo anterior, $f'(x) > 0$, se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$, se $x \in (-1, 1)$:

Figura 7.17: Esquematicamente

Então, $x_0 = -1$ é ponto de máximo e $x_0 = 1$ é ponto de mínimo de f.

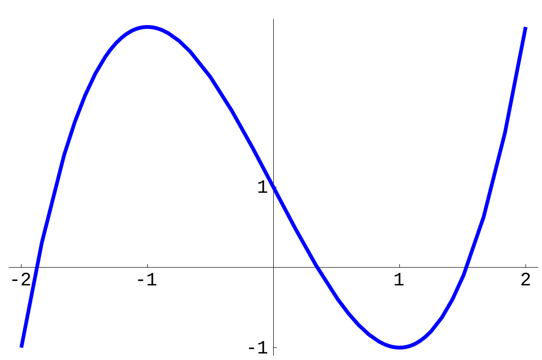


Figura 7.18: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.

[4] $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. f não é derivável em 0.

De fato, $f'(x) = -\frac{2}{3\,\sqrt[3]{x}}$ se $x \neq 0$. Por outro lado, $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0$. Então, $x = 0$ é ponto de máximo e $f(0) = 1$ é o valor máximo.

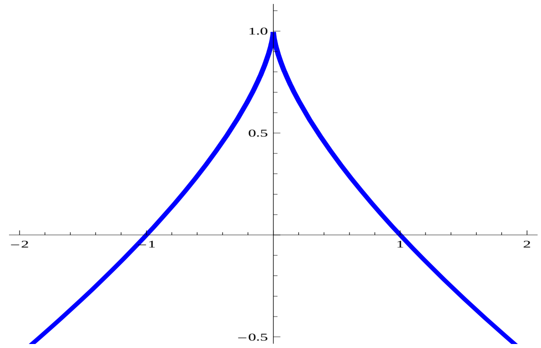


Figura 7.19: Gráfico de $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

Teorema 7.5. *Seja f uma função duas vezes derivável e x_0 um ponto crítico de f. Se:*

1. $f''(x_0) > 0$, *então x_0 é um ponto de mínimo relativo de f.*
2. $f''(x_0) < 0$, *então x_0 é um ponto de máximo relativo de f.*

Dos teoremas 7.4 e 7.5 temos que os candidatos a pontos de máximos e mínimos são não só **os pontos críticos, mas também, podem ser os pontos do domínio onde a função não é derivável.**

No caso em que o domínio de f é um intervalo do tipo $[a, b]$, após determinar os pontos de máximo e de mínimo no intervalo (a, b), devemos calcular os valores da função nos extremos do intervalo e comparar estes valores com os valores máximos e mínimos obtidos anteriormente nos pontos críticos; o maior valor corresponderá ao máximo absoluto e o menor valor ao mínimo absoluto da função e os pontos correspondentes serão, respectivamente, os pontos de máximo e de mínimo absolutos.

No caso em que $f''(x_0) = 0$**, o teorema 7.5 não afirma nada**; quando acontecer isto, recomendamos usar o teorema 7.4.

Exemplo 7.9.

[1] Calcule os pontos extremos de :

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c; \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Como f é diferenciável em todo ponto, calculemos os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 2\,a\,x + b \quad \text{e} \quad f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

que é o ponto crítico de f. A segunda derivada $f''(x) = 2\,a$; então,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\quad \text{se} \quad a > 0 \\ f''(x) < 0 &\quad \text{se} \quad a < 0. \end{aligned}$$

Logo, o vértice $x = -\dfrac{b}{2a}$ é um ponto de máximo absoluto de f se $a < 0$ e um ponto de mínimo absoluto se $a > 0$.

[2] Um banco oferece juros anual $I(t)$, em %, dependendo do tempo t, em anos, que o investidor esteja disposto a manter o investimento. $I(t)$ é dado por:

$$I(t) = \frac{160\,t}{t^2 + 16}.$$

Determine quantos anos deve manter o investimento para ter lucro máximo. Se o investimento é aplicado indeterminadamente, os juros podem ser negativos?

Como $I(t)$ é diferenciável em todo ponto, calculemos os pontos críticos de T:

$$I'(t) = -\frac{160\,(t^2 - 16)}{(t^2 + 16)^2}.$$

$I'(t) = 0$ se, e somente, se: $t = 4$ ou $t = -4$, que são os pontos críticos de I. Como $t \geq 0$, $t = 4$ é o único ponto crítico. A segunda derivada:

$$I''(t) = \frac{320\,t\,(t^2 - 48)}{(t^2 + 16)^3} \Longrightarrow I''(4) = -\frac{5}{4} < 0;$$

logo, $t = 4$ é ponto de máximo relativo de I e $I(4) = 20$. O Investimento recebe lucro máximo de 20 % em 4 anos. Por outro lado:

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{160\,t}{t^2 + 16} = 0.$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota. Os lucros diminuem ao longo do tempo, mas nunca são negativos. Veja o desenho:

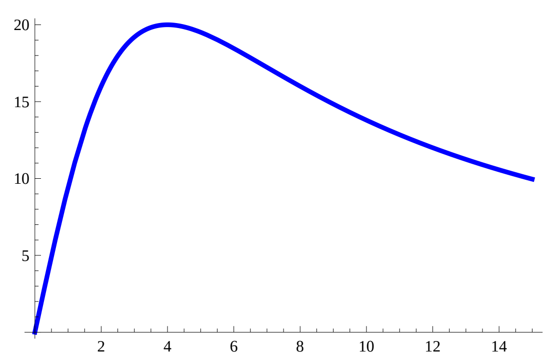


Figura 7.20: Gráfico de $I = I(t)$.

[3] A cotação, em reais, de certa moeda, nos últimos 8 anos foi modelada com êxito por:

$$C(t) = 91 - 15\,t + 9\,t^2 - t^3.$$

Determine os intervalos de tempo em que as cotações crescem e em que decrescem. Qual foi a maior e a menor cotação?

Calculemos a derivada de C:

$$C'(t) = -15 + 18\,t - 3\,t^2.$$

Intervalos	$C'(t)$	$C(t)$
$1 < t < 5$	> 0	crescente
$t < 1$	< 0	decrescente
$5 < t$	< 0	decrescente

Os pontos críticos de C: $C'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 1$ ou $t = 5$, logo, 1 e 5 são os pontos críticos de C. Calculando a segunda derivada de C:

$$C''(x) = 18 - 6\,t = 6\,(3 - t).$$

Então $C''(1) = 12$ e $C''(5) = -12$; portanto $t = 5$ é ponto de máximo e $t = 1$ é ponto de mínimo relativo de C. Por outro lado, $C(1) = 84$ e $C(5) = 116$. Veja o desenho:

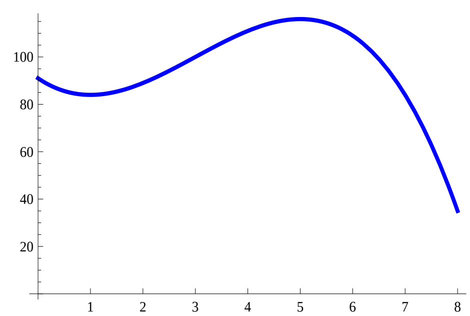


Figura 7.21: Gráfico de $C = C(t)$.

[4] Se o custo total de um fabricante é dado por $C(x) = \dfrac{5\,x^2}{x^3+4} + 2$, em reais, calcule os pontos extremos de $C = C(x)$.

Calculemos os pontos críticos de C:

$$C'(x) = -\frac{5\,x\,(x^3 - 8)}{(x^3+4)^2}.$$

Logo, $C'(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 2$. Calculando a segunda derivada de C:

$$C''(x) = \frac{10\,(16 - 28\,x^3 + x^6)}{(4 + x^3)^3}.$$

Então $C''(0) > 0$; logo, $x = 0$ é ponto de mínimo relativo de C. $C''(2) < 0$; logo, $x = 2$ é ponto de máximo relativo. Note que $C(0) = 2$ é o custo fixo é $C(2) = 3.67$ reais.

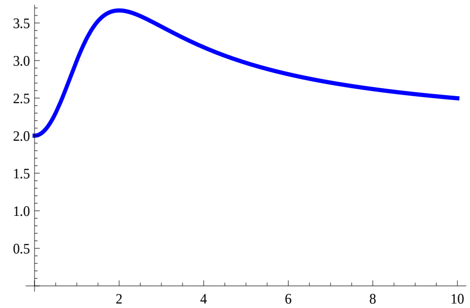


Figura 7.22: Gráfico de $C = C(x)$.

[5] Calcule os pontos extremos de $f(x) = x^4 - \dfrac{16\,x^3}{3}$.

Calculemos os pontos críticos de f; então, $f'(x) = 4\,x^2\,(x-4)$. Logo, $f'(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 4$. Calculando a segunda derivada de f:

$$f''(x) = 12\,x^2 - 32\,x = 4\,x\,(3\,x - 8).$$

Então, $f''(4) > 0$; logo, $x = 4$ é ponto de mínimo relativo de f. $f''(0) = 0$ e o teorema não pode ser aplicado; mas usamos o teorema 7.4 para analisar a mudança do sinal de f'. Como $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [0,4]$ ou $(-\infty, 4]$, então $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo. Veja o desenho:

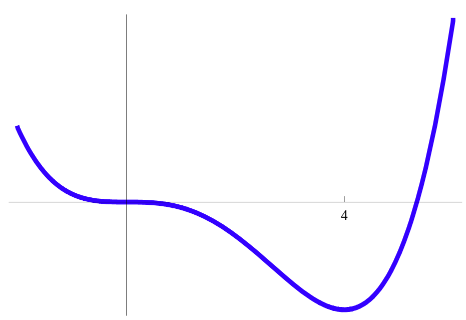


Figura 7.23: Gráfico de $f(x) = x^4 - \frac{16\,x^3}{3}$.

7.4 Concavidade e Pontos de Inflexão de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em D, onde D é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos.

Definição 7.5.

1. *f é dita* **côncava para cima** *em D se $f'(x)$ é crescente em D.*

2. *f é dita* **côncava para baixo** *em D se $f'(x)$ é decrescente em D.*

Intuitivamente, quando um ponto se desloca ao longo do gráfico de uma função f, da esquerda para a direita e a reta tangente nesse ponto vai girando no sentido anti-horário, isto significa que o coeficiente angular dessa reta tangente cresce à medida que x aumenta. Neste caso a função tem a concavidade voltada para cima.

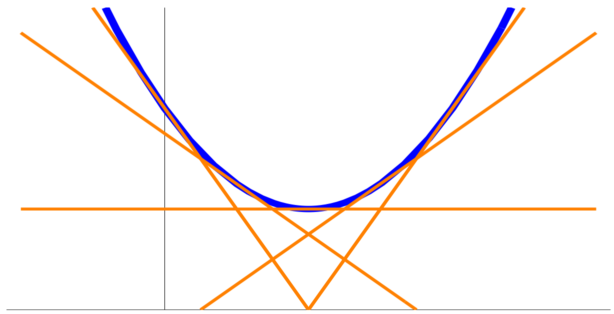


Figura 7.24: Função côncava para cima.

Analogamente, quando um ponto se desloca ao longo do gráfico de uma função f, da esquerda para a direita e a reta tangente nesse ponto vai girando no sentido horário, isto significa que o coeficiente angular dessa reta tangente decresce à medida que x aumenta. Neste caso a função tem a concavidade voltada para baixo.

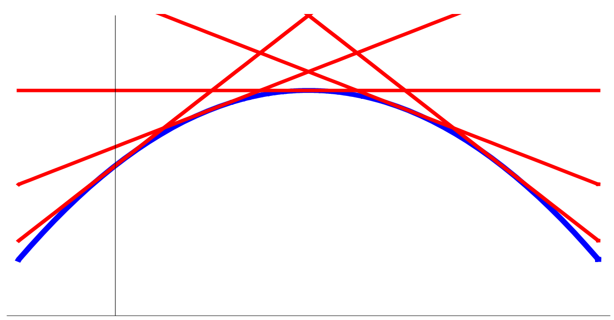


Figura 7.25: Função côncava para baixo.

Não confundir concavidade com crescimento ou decrescimento de uma função. No desenho a seguir, o gráfico de uma função crescente e côncava para cima e o de uma função decrescente e côncava para cima, respectivamente.

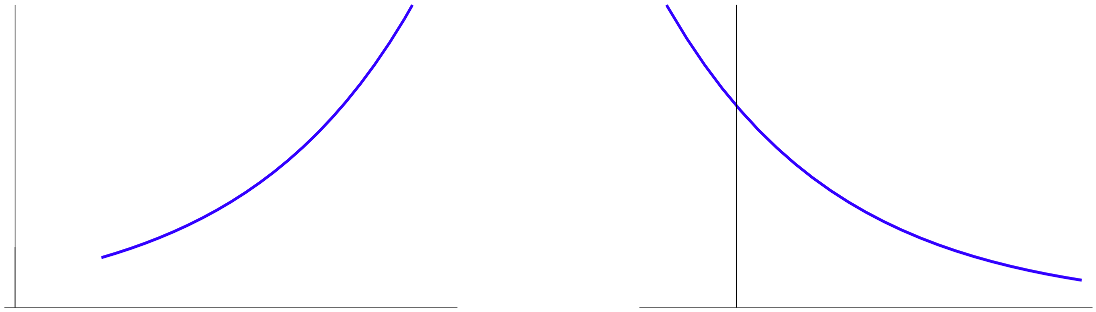


Figura 7.26:

No desenho abaixo, o gráfico de uma função crescente e côncava para baixo e o de uma função decrescente e côncava para baixo, respectivamente.

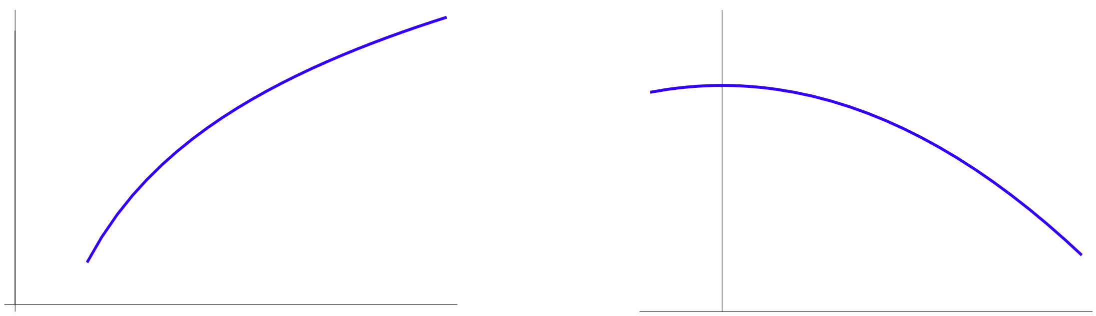


Figura 7.27:

Proposição 7.3. *Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável em D.*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in D$, então f é côncava para cima em D.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in D$, então f é côncava para baixo em D.*

A prova segue diretamente das definições.

Exemplo 7.10.

[1] Considere a função $f(x) = x^4 - x^2$.

(a) Determine, onde f é côncava para cima.

(b) Determine, onde f é côncava para baixo.

Calculando a segunda derivada:

$$f''(x) = 2\,(6\,x^2 - 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\text{se} \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty) \\ f''(x) < 0 \quad &\text{se} \quad x \in (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}). \end{aligned}$$

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\dfrac{1}{\sqrt{6}}, +\infty)$ e f é côncava para baixo em $(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

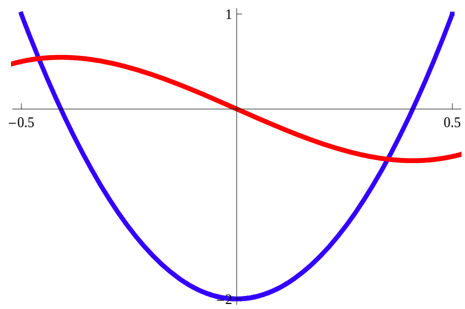


Figura 7.28: Gráficos de f' (vermelho) e f'' (azul).

[2] Considere a função de custo $C(x) = \dfrac{5\,x}{x^2+3} + 1$.

(a) Determine, onde C é côncava para cima.

(b) Determine, onde C é côncava para baixo.

Calculando a segunda derivada:

$$C''(x) = \frac{10\,x\,(-9+x^2)}{(3+x^2)^3}.$$

Logo, $C''(x) > 0$ se $x \in (-3,0) \cup (3,+\infty)$ e $C''(x) < 0$ se $x \in (-\infty,-3) \cup (0,3)$. Então, como $x \geq 0$ temos que C é côncava para cima em $(3,+\infty)$ e C é côncava para baixo em $(0,3)$.

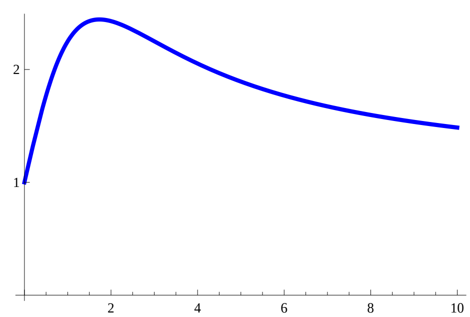


Figura 7.29: Gráficos de $C = C(x)$.

Definição 7.6. *Um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de uma função f é um ponto de* **inflexão** *de f, se existe um pequeno intervalo $(a,b) \subset D$ tal que $x_0 \in (a,b)$ e:*

1. *f é côncava para cima em (a,x_0) e côncava para baixo em (x_0,b), ou*

2. *f é côncava para baixo em (a,x_0) e côncava para cima em (x_0,b).*

Se a função é duas vezes derivável, para obter os pontos x_0, candidatos a pontos de inflexão, resolvemos a equação:

$$\boxed{f''(x) = 0}$$

e estudamos o sinal de $f''(x)$ para $x > x_0$ e $x < x_0$ (x_0 solução da equação).
$f''(x_0) = 0$ não implica em que x_0 seja abscissa de um ponto de inflexão; de fato, $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12\,x^2$; logo, $f''(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = 0$ é um ponto de mínimo (verifique!).

Note que se $f''(x_0) = 0$ e $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, então, x_0 é um ponto de inflexão.

Num ponto de inflexão, não necessariamente existe a segunda derivada da função. De fato, seja $f(x) = x\,|x|$; se $x > 0$ temos $f''(x) = 2$ e se $x < 0$ temos $f''(x) = -2$; então, 0 é um ponto de inflexão e $f''(0)$ não existe. Como exercício esboce o gráfico de f.

Exemplo 7.11.

[1] Seja $f(x) = x^3$; então: $f''(x) = 6\,x$. Por outro lado, $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$; logo, $x_0 = 0$ é ponto de inflexão de f.

[2] Seja $f(x) = x^4 - x^2$; então: $f''(x) = 2\,(6\,x^2 - 1)$.

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big) \cup \big(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty\big) \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big).$$

Então $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ e $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ são os pontos de inflexão de f.

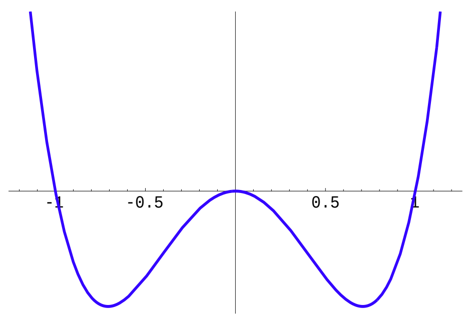


Figura 7.30: Gráfico de $f(x) = x^4 - x^2$.

[3] O custo para produzir certo tipo de componente de telefones celulares é modelado por $C(x) = x^3 - \dfrac{3\,x^2}{2} + 4$. Determine a concavidade e os pontos de inflexão de $C = C(x)$.

Calculamos $C''(x) = 3\,(2\,x - 1)$

$$C''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(\frac{1}{2}, +\infty\big) \quad \text{e} \quad C''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(0, \frac{1}{2}\big).$$

Então, $x = \dfrac{1}{2}$ e o ponto de inflexão de C. Logo, $C = C(x)$ é côncava para cima em $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$ e côncava para baixo em $(0, \dfrac{1}{2})$

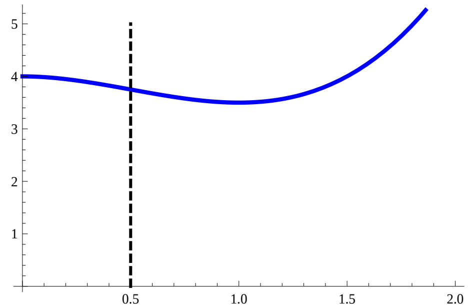


Figura 7.31: Gráfico de $C = C(x)$.

7.5 Esboço do Gráfico de Funções

Para obter o esboço do gráfico de uma função, siga os seguintes passos:

a) Determine o $Dom(f)$.

b) Calcule os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

c) Calcule os pontos críticos.

d) Determine se existem pontos de máximo e mínimo.

e) Estude a concavidade e determine os pontos de inflexão.

f) Determine se a curva possui assíntotas.

g) Esboço.

Exemplo 7.12.

Esboce o gráfico das funções:

[1] $y = f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) **Interseções com os eixos coordenados:** Não possui interseções.

c) **Pontos críticos de f:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2};$$

logo, resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$ e $x = -2$, que são os pontos críticos de f.

d) **Máximos e mínimos relativos de f:**

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}.$$

Logo, $f''(2) > 0$ e $f''(-2) < 0$; logo, 2 e -2 são o ponto de mínimo e de máximo relativo de f, respectivamente.

e) **Estudemos a concavidade de f:** Note que $f''(x) \neq 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\quad \text{se} \quad x \in A = (0, +\infty) \\ f''(x) < 0 &\quad \text{se} \quad x \in B = (-\infty, 0). \end{aligned}$$

f é côncava para cima em A e côncava para baixo em B. O gráfico não possui pontos de inflexão.

f) **Assíntotas.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4}{x} = -\infty.$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 4}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 4}{x} = -\infty.$$

g) **Esboço do gráfico:** O gráfico de f passa pelos pontos $(2, 4)$ e $(-2, -4)$ que são os pontos de mínimo e máximo, respectivamente, de f.

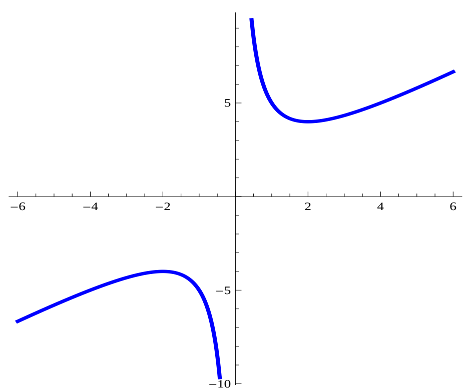


Figura 7.32: Gráfico de $y = \frac{x^2+4}{x}$.

[2] $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) Interseções com os eixos coordenados: se $x = 0$, então $y = -1$; logo, a curva passa pelo ponto $(0, -1)$.

c) Pontos críticos de f. $f'(x) = -\dfrac{4\,x}{(x^2 - 1)^2}$; logo $f'(x) = 0$ implica que $x = 0$, que é o ponto crítico de f.

d) Máximos e mínimos relativos de f:

$$f''(x) = \frac{12\,x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}.$$

$f''(0) < 0$; logo, 0 é ponto de máximo relativo de f.

e) Concavidade de f. $f''(x) > 0$ se $x \in \big(-\infty, -1\big)$ ou $x \in \big(1, \infty\big)$, $f''(x) < 0$ se $x \in \big(-1, 1\big)$. f é côncava para baixo em $(-1, 1)$ e côncava para cima em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. $\pm 1 \notin Dom(f)$; logo, o gráfico de f não possui pontos de inflexão.

f) Assíntotas.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$

Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal da curva.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty.$$

Logo, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais da curva.

g) Esboço do gráfico:

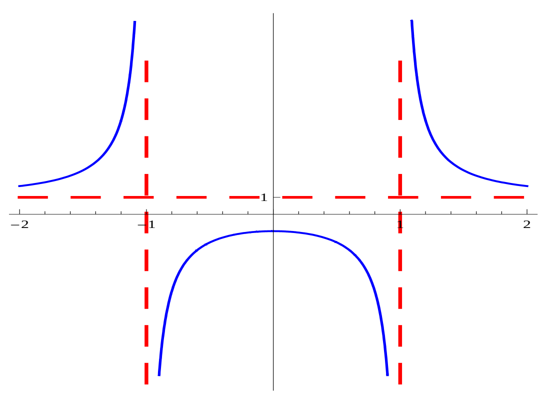


Figura 7.33: Gráfico de $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

[3] $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(1 - x^2)$.

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) Interseções com os eixos coordenados: Se $x = 0$, então $y = 0$; logo, a curva passa pelo ponto $(0, 0)$. Se $y = 0$, então $x = 0$ ou $x = \pm 1$; logo, a curva passa pelos pontos $(0, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

c) Pontos críticos de f: Se $x \neq 0$; então, $f'(x) = \dfrac{2\,x\,(1 - 4\,x^2)}{3\,(x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

A função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(1 - x^2)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas não existe $f'(0)$; logo, no ponto $(0, 0)$ do gráfico deve existir uma "cúspide"como foi observado no gráfico do valor absoluto. Os pontos críticos de f são $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

d) Máximos e mínimos relativos de f. Se $x \neq 0$; então,

$$f''(x) = -\frac{2\,(20\,x^2 + 1)}{9\,(x^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$f''(-\frac{1}{2}) < 0$ e $f''(\frac{1}{2}) < 0$; logo, $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$ são pontos de máximos relativos de f. Se $x = 0$, estudamos o sinal da derivada de f para valores à esquerda e à direita de $x = 0$: $f'(x) > 0$ se $0 < x < \frac{1}{2}$ e $f'(x) < 0$, se $-\frac{1}{2} < x < 0$; logo, $x = 0$ é um ponto de mínimo local de f.

e) Concavidade de f. $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. f é côncava para baixo em $\mathbb{R} - \{0\}$.

f) Assíntotas. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^2}\,(x^2 - 1) = +\infty$. Logo, f não possui assíntotas horizontais e nem verticais.

g) Esboço do gráfico:

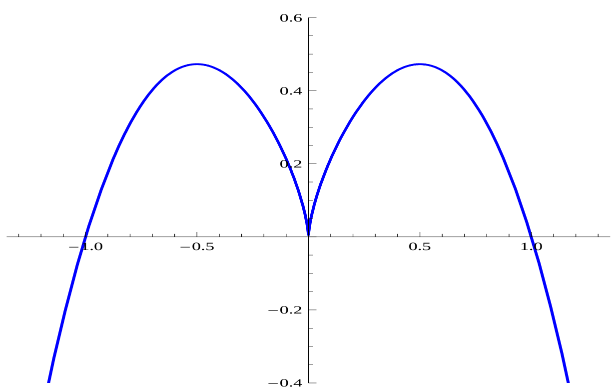


Figura 7.34: Gráfico de $f(x) = x^{2/3}\,(1 - x^2)$.

[4] $y = f(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}$, onde $b > 0$, representa uma família de curvas e é chamada função densidade de probabilidade normal padrão, que tem um papel relevante em Probabilidade e Estatística.

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) A curva passa pelo ponto $(0, e^{-\frac{a^2}{b}})$.

c) Pontos críticos de f:

$$f'(x) = -\frac{2\,(x-a)}{b}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{b}};$$

logo, $x = a$ é o ponto crítico de f.

d) Máximos e mínimos relativos de f:

$$f''(x) = \frac{2}{b}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}\,\big(\frac{2(x-a)^2}{b} - 1\big).$$

$f''(a) < 0$; logo, $x = a$ é ponto de máximo relativo de f.

e) As abscissas dos pontos de inflexão são: $x = a \pm \sqrt{\frac{b}{2}}$

f) Assíntotas: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} = 0$. Logo, $y = 0$ é a assíntota horizontal da curva.

g) Esboço dos gráficos:

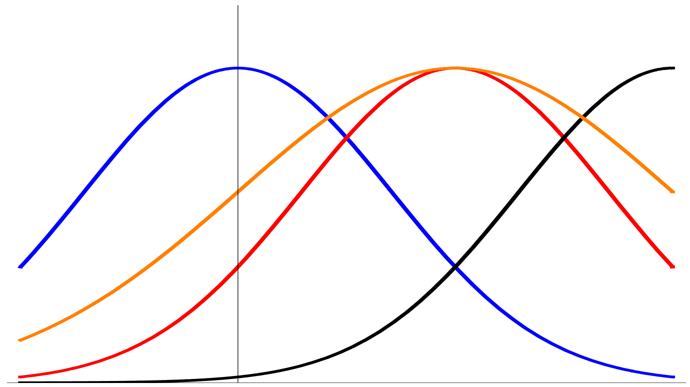


Figura 7.35: Esboço dos gráficos para $a = 0,\ b = 1$; $a = b = 1$; $a = 2,\ b = 1$ e $a = 1,\ b = 2$..

[5] $y = \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + c}$, ($c \in \mathbb{R}$), que representa uma família de curvas.

a) A solução da equação $x^2 + 2\,x + c = 0$ é $r_0 = -1 \pm \sqrt{1-c}$; então, se $c > 1$, $Dom(f) = \mathbb{R}$, se $c = 1$, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ e se $c < 1$, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{r_0\}$.

b) Se $x = 0$, então $y = \dfrac{1}{c}$, se $c \neq 0$. Neste caso, a interseção com o eixo dos y é $(0, \dfrac{1}{c})$.

c) Pontos críticos:

$$f'(x) = -\frac{2\,(x+1)}{(x^2 + 2\,x + c)^2},$$

$f'(x) = 0$ se $x = -1$, ($c \neq 1$). Neste caso, o ponto crítico é $(-1, \dfrac{1}{c-1})$.

d) Máximos e mínimos:

$$f''(x) = \frac{2\,(3\,x^2 + 6\,x + 4 - c)}{(x^2 + 2\,x + c)^3}$$

e $f''(-1) = -\dfrac{2}{(c-1)^2} < 0$; logo, $x = -1$ é ponto de máximo relativo se $c \neq 1$.

e) Resolvendo $f''(x) = 0$, obtemos $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3\,(c-1)}}{3}$. Se $c > 1$, temos dois pontos de inflexão.

f) Assíntotas.

Assíntotas horizontais: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + c} = 0$; então, $y = 0$ é assíntota horizontal.

Assíntotas verticais:
Se $c = 1$, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + 1} = \infty$ e se $c < 1$, $\lim\limits_{x \to -1 \pm \sqrt{1-c}} \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + c} = \infty$.

$x = -1$ e $x = -1 \pm \sqrt{1-c}$ são assíntotas verticais da curva, para $c = 1$ e $c < 1$, respectivamente.

g) Esboço dos gráficos:

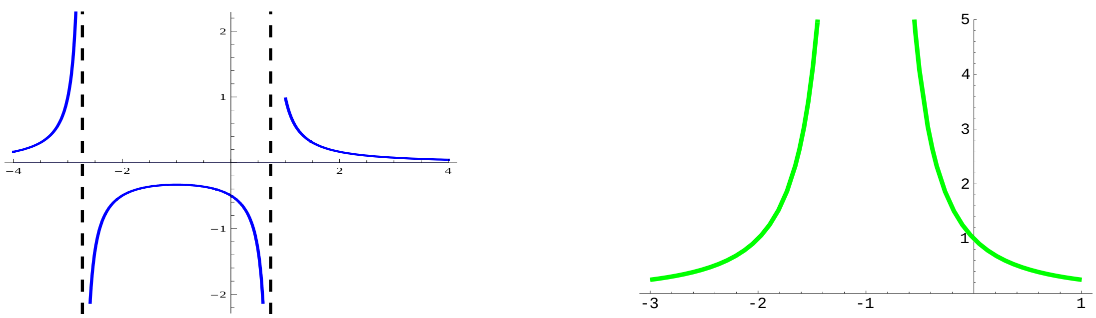


Figura 7.36: Esboço dos gráficos para $c = -2$ e $c = 1$, respectivamente.

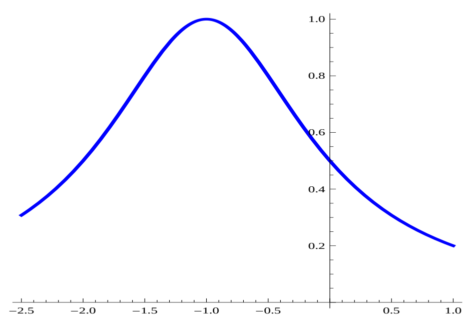


Figura 7.37: Esboço para $c = 2$.

7.6 Problemas de Otimização

Nesta seção apresentaremos problemas de maximização e minimização aplicados à diversas áreas. O primeiro passo para resolver este tipo de problema é determinar, de forma precisa, a função a ser otimizada. Em geral, obtemos uma expressão de duas variáveis, mas usando as condições adicionais do problema, esta expressão pode ser reescrita como uma função de uma variável derivável e assim poderemos aplicar os teoremas.

Exemplo 7.13.

[1] Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

Considere $x,\, y > 0$ tal que $x + y = 70$; logo, $x,\, y \in [0, 70]$; o produto é: $P = x\,y$. Esta é a função que devemos maximizar. Como $y = 70 - x$, substituindo em P:

$$P(x) = x\,y = x\,(70 - x).$$

$P : [0, 70] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável. Derivando: $P'(x) = 70 - 2\,x = 2\,(35 - x)$; o ponto crítico é $x = 35$. Analisando o sinal de P', é claro que este ponto é ponto de máximo para

P e $y = 35$; logo, $P = 1225$ é o produto máximo. Os números são $x = y = 35$. Note que $P(0) = P(70) = 0$.

[2] O custo para produzir certo produto é dado por $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 6\,x^2 + 30\,x + 25$. Determine o lucro máximo se o preço do produto é 10 reais.

O lucro é dado por $L(x) = R(x) - C(x)$, onde a receita é $R(x) = 10\,x$; logo;

$$L(x) = \frac{1}{3}\,\big[-x^3 + 18\,x^2 - 60x - 75\big].$$

Derivando e igulando a zero:

$$-3\,x^2 + 36\,x - 60 = 0 \Longrightarrow x = 2 \quad \text{e} \quad x = 10.$$

Derivando novamente:

$$L''(x) = \frac{1}{3}\,\big[36 - 6\,x\big],$$

logo: $L''(2) = 8$ e $x = 2$ é ponto de mínimo, $L''(10) = -8$ e $x = 10$ é ponto de máximo. $L(10) = 41.66$ reais.

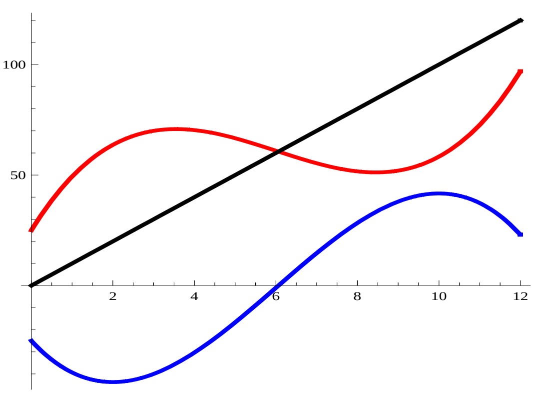


Figura 7.38: Gráficos de $L(x)$ (azul), $C(x)$ (vermelho) e $R(x)$ (negro).

Note que o ganho da empresa é devido ao fato de que o custo é $C(10) = 58.33$ reais e a receita é $R(10) = 100$ reais.

[3] A evolução no tempo t da capacidade de produção de uma fábrica fundada em 1940, é dada por:

$$P(t) = \frac{40000}{1000 + (t-50)^2}.$$

Determine o ano em que a fábrica alcançou sua capacidade máxima.

Derivando a função $P = P(t)$e igualando a zero:

$$P'(t) = -\frac{80000\,(-50 + t)}{(1000 + (t-50)^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow t = 50.$$

O ponto crítico é $t = 50$. Note que é mais simples estudar o sinal de $P'(t)$ que calcular $P''(t)$, então:

$$P'(t) > 0 \Longleftrightarrow t < 50 \quad \text{e} \quad P'(t) < 0 \Longleftrightarrow t > 50.$$

Logo, $t = 50$ é o ponto máximo. A fábrica alcançou sua maior produção em 1990.

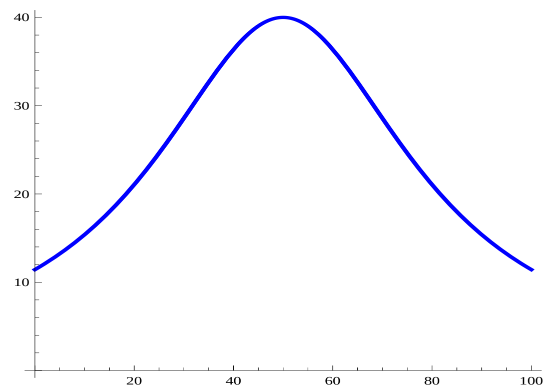


Figura 7.39: Gráfico de $P(t)$.

[4] Um atacadista quando vendia certo produto por um preço unitário de 20 reais, conseguia vender 180 unidades por semana. Reolveu aumentar o preço para 25 reais e o número de unidades vendidas diminuiu para 155. Supondo que a função demanda seja afim, qual deve ser o preço do produto para que a receita seja a maior possível?

Seja p o preço unitário do produto e x a quantidade demandada. Como a função é afim:

$$x = a\,p + b.$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{cases} 180 &= 20\,a + b \\ 155 &= 25\,a + b. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -5$ e $b = 280$, então:

$$x = -5\,p + 280 \quad \text{e} \quad R = x\,p = -5\,p^2 + 280\,p.$$

Logo, $R' = -10\,p + 280 = 0$; temos $p = 28$. $R'' = -10$ e $p = 28$ é ponto de máximo. O preço do produto para maximizar a receita deve ser 28 reais.

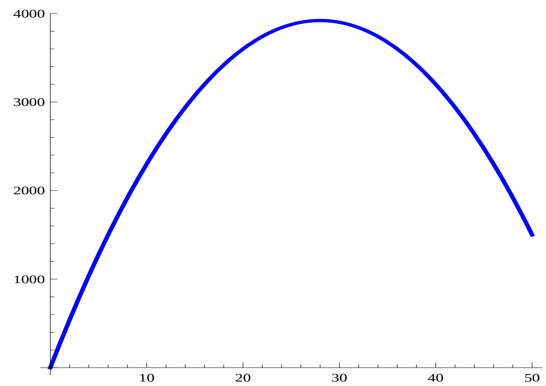


Figura 7.40: Gráfico de $R(x)$.

[5] Uma empresa tem um ganho de 10 reais por cada produto vendido. A empresa paga k reais por semana em publicidade e a quantidade de produtos que vende por semana é dada por:

$$x = 3500\,(1 - e^{-0.002k}).$$

Determine o valor de k que maximiza o lucro líquido.

O lucro pela venda de x produtos é de $10\,x$ reais; tirando o custo k da publicidade temos que o lucro líquido é $L = 10\,x - k$, então:

$$L(k) = 35000\,(1 - e^{-0.002k}) - k.$$

Derivando em relação a k e igualando a zero:

$$L'(k) = 70\,e^{-0.002k} - 1 = 0 \Longrightarrow e^{-0.002k} = \frac{1}{70} \Longrightarrow k = \frac{ln(70)}{0.002}.$$

Derivando novamente:

$$L''(k) = -0.14\,e^{-0.002k} \quad \text{e} \quad L''\Big(\frac{ln(70)}{0.002}\Big) = -0.002,$$

então $k = \dfrac{ln(70)}{0.002} \cong 2124.25$ é um ponto de máximo e o lucro líquido $L(2124.25) = 32375.8$ reais.

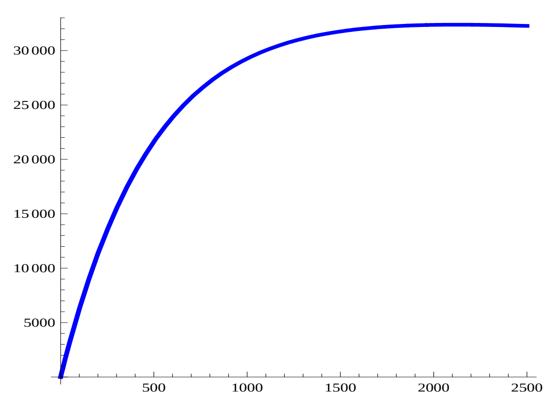


Figura 7.41: Gráfico de $L(k)$.

[6] O custo total para produzir x unidades de certo produto é $C(x) = 0.2\,x^2 + 4300\,x + 200000$, expresso em reais. Determine quantas unidades devem ser produzidas para que o custo médio seja mínimo.

O custo médio é dado por $CMe(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, logo:

$$CMe(x) = 0.2\,x + \frac{200000}{x} + 4300.$$

Derivando e igualando a zero:

$$\frac{dCMe}{dx} = 0.2 - \frac{200000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{200000}{0.2} \Longrightarrow x = 1000.$$

Derivando novamente:

$$\frac{d^2CMe}{dx^2} = \frac{400000}{x^3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2CMe}{dx^2}\bigg|_{x=1000} = \frac{1}{2500},$$

então $x = 1000$ é um ponto de mínimo e $CMe(1000) = 4700$ reais.

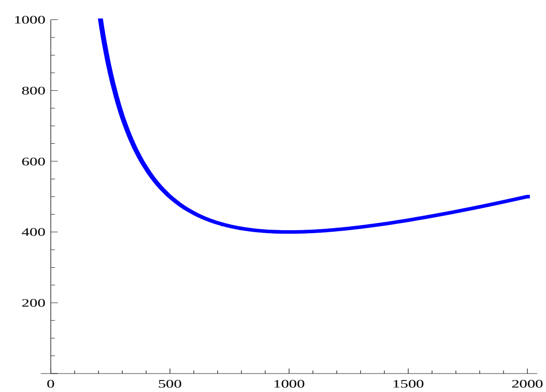


Figura 7.42: Gráfico de $CMe(x)$.

7.7 Teorema de L'Hôpital

Comumente, ao estudar limites, aparecem expressões indeterminadas. Por exemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1},$$

onde a expressão indeterminada é do tipo $(\frac{0}{0})$. O teorema de L'Hôpital nos indica um método para fazer desaparecer estas indeterminações e calcular limites de uma forma mais eficiente.

Teorema 7.6. (L'Hôpital)
Sejam f e g funções deriváveis num domínio D, que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, exceto possivelmente num ponto a e $g(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

1. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, então:*

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

2. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, então:*

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

Para a prova do teorema veja o apêndice. O teorema também é válido para limites laterais e para limites no infinito. Se f' e g' satisfazem às hipóteses do teorema e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = L$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L;$$

logo; $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = L.$

Em geral se $f^{(n)}$ e $g^{(n)}$ satisfazem às hipóteses do teorema e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L.$$

Se a função da qual estamos calculando o limite é n vezes derivável, podemos derivar sucessivamente até "fazer desaparecer"a indeterminação. Para indicar o tipo de indeterminação, denotamos $(\frac{0}{0})$, $(\frac{\infty}{\infty})$, etc.

Exemplo 7.14.

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 4\,x + 4}{x^2 - x - 2}$. Primeiramente observamos que o limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema, derivamos o numerador e o denominador da função racional duas vezes; então:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4\,x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x - 4}{2\,x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

[2] Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$. O limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x\, ln(a)}{1} = ln(a).$$

7.7.1 Outros tipos de indeterminações

O teorema de L'Hôpital nos indica somente como resolver indeterminações do tipo $(\frac{0}{0})$ e $(\frac{\infty}{\infty})$. Outros tipos, como $(0\cdot\infty)$, ∞^0, $\infty-\infty$, 0^0 e 1^∞, podem ser resolvidos transformando-os nos tipos já estudados no teorema.

Caso $(\mathbf{0}\cdot\infty)$

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,ln(x)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0\cdot\infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ln(x)}{\frac{1}{x}}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\big(ln(x)\big)'}{\big(\frac{1}{x}\big)'}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Caso $(\infty-\infty)$

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right]$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\infty-\infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x^2}{x^2-1}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\,x^2}{x^2-1}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x}{2\,x}=2.$$

[2] Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right]$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\infty-\infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-x+x\,e^x}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{-x+x\,e^x}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$ Aplicando o teorema:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-x+x\,e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{-1+e^x+x\,e^x}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{-1+e^x+x\,e^x}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$, aplicando novamente o teorema:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-x+x\,e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{-1+e^x+x\,e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\,(x+2)}=\frac{1}{2}.$$

Caso $(\mathbf{1}^{\infty})$

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^{x}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (1^{∞}); então fazemos:

$$u(x) = ln\Big(\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x}\Big) = x\,ln\big(1 + \frac{1}{x}\big);$$

então, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,ln\big(1 + \dfrac{1}{x}\big)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$; então aplicamos o caso A:

$$\lim_{x \to +\infty} x\,ln\big(1 + \frac{1}{x}\big) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\big(1 + \frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}}.$$

O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\big(1 + \frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x}.$$

O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1.$$

Como $ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} ln\Big(\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x}\Big) = ln\Big(\lim_{x \to +\infty} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x}\Big) = 1.$$

Da última igualdade: $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^{x} = e$.

Caso $(\infty^{\mathbf{0}})$

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (x)^{e^{-x}}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (∞^{0}); fazemos:

$$u(x) = ln\big((x)^{e^{-x}}\big) = \frac{ln(x)}{e^{x}};$$

então, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{e^{x}}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{e^{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\,e^{x}} = 0.$$

Como $ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} ln\big((x)^{e^{-x}}\big) = ln\big(\lim_{x \to +\infty} (x)^{e^{-x}}\big) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x)^{e^{-x}} = 1$.

Caso (0^0)

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (0^0); fazemos:

$$u(x) = ln(x^x) = x\, ln(x);$$

então: $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\, ln(x)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0\cdot\infty)$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0.$$

Sendo $ln(x)$ uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x\to 0} ln(x^x) = ln(\lim_{x\to 0} x^x) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim\limits_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$.

Em geral, nos casos de potências indeterminadas, usamos a função logarítmica $y = ln(x)$ para poder aplicar o teorema de L'Hôpital. A continuidade da função logarítmica $y = ln(x)$ e de sua inversa $y = e^x$ permite resolver este tipo de limite.

7.8 Diferencial de uma Função

A diferencial de uma função será introduzida de maneira formal. Ao leitor interessado recomendamos a bibliografia avançada. Seja $y = f(x)$ uma função definida num domínio D e diferenciável no ponto $x_0 \in D$. Denotemos por dx o número (não nulo), tal que $dx + x_0 \in D$.

Definição 7.7.

1. *Para cada $x_0 \in D$, a diferencial de $y = f(x)$ no ponto x_0 é denotada por dy ou $df(x_0)$ e definida por $dy = f'(x_0)\, dx$.*

2. *O incremento de $y = f(x)$ em x_0 é denotado por Δy e definido por $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0)$.*

Para x_0 fixado, dy é uma função linear sobre o domínio de todos os valores possíveis de dx e Δy é uma função sobre o domínio de todos os valores possíveis de dx. Seja $dx = x - x_0$, então: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\Delta y - dy}{x - x_0} = 0$. Se $f'(x_0) \neq 0$: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$ temos que dy é uma "boa"aproximação para Δy: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\, dx + R(x - x_0)$, onde $R(x - x_0)$ é uma função tal que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R(x - x_0)}{x - x_0} = 0$. Compare com linearização.

Exemplo 7.15.

Seja $y = f(x) = x^2$; $dy = 2\,x\,dx$; no ponto x_0: $dy = 2\,x_0\,dx$ e $f(x_0 + dx) - f(x_0) = 2\,x_0\,dx + (dx)^2$; logo $\Delta y = \ 2\,x_0\,dx + (dx)^2$. Então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y - dy}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{x \to x_0} (1 + \frac{x - x_0}{2x_0}) = 1.$$

Por outro lado, $x^2 = x_0^2 + 2\,x_0\,dx + R(x - x_0)$, então $\dfrac{R(x - x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^2 - x_0^2 - 2\,x_0\,dx}{x - x_0} = x - x_0$ e $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{R(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$.

Propriedades

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções definidas num domínio D e diferenciáveis no ponto $x_0 \in D$, então:

1. $d(f + g)(x_0) = d(f)(x_0) + d(g)(x_0)$.
2. $d(f\,g)(x_0) = g(x_0)\,d(f)(x_0) + f(x_0)\,d(g)(x_0)$.

7.9 Exercícios

1. Calcule os pontos críticos (se existem) de:

   (a) $y = 3x + 4$
   (b) $y = x^2 - 3x + 8$
   (c) $y = 2 + 2x - x^2$
   (d) $y = (x - 2)(x + 4)$
   (e) $y = 3 - x^3$
   (f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$
   (g) $y = x^4 + 4x^3$
   (h) $y = e^x - x$
   (i) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 9)^2}$

2. Usando a primeira derivada, determine os intervalos de crescimento e/ou decrescimento das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 4\,x^3 - 3\,x$
   (b) $f(x) = e^x - x$
   (c) $f(x) = ln(x^2 + 1)$
   (d) $f(x) = x^2\,ln(x)$
   (e) $y = 2x - 1$
   (f) $y = 3 - 5x$
   (g) $y = 3x^2 + 6x + 7$
   (h) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$
   (i) $y = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$
   (j) $y = 2^x$
   (k) $y = e^{-x}$
   (l) $y = x\,e^{-x}$
   (m) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

3. Calcule os pontos de máximos e de mínimos relativos (se existem) de:

   (a) $y = 7x^2 - 6x + 2$
   (b) $y = 4x - x^2$
   (c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 9$
   (d) $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5}{3}\,x^3 + 4x^2$
   (e) $y = 5 + \sqrt[5]{(x - 2)^7}$
   (f) $y = 3 + \sqrt[3]{(2x + 3)^4}$
   (g) $y = \dfrac{4\,x}{x^2 + 4}$
   (h) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} - 2x$
   (i) $y = (x + 2)^2(x - 1)^3$
   (j) $y = x^2\sqrt{16 - x}$
   (k) $y = x^4 + \dfrac{4\,x^3}{3} + 3\,x^2$
   (l) $y = x - 3 + \dfrac{2}{x + 1}$
   (m) $y = x^2\,\sqrt{3 - x^2}$

4. Calcule os pontos de inflexão (se existem) e estude a concavidade de:

   (a) $y = -x^3 + 5\,x^2 - 6\,x$
   (b) $y = 3\,x^4 - 10\,x^3 - 12\,x^2 + 10\,x + 9$
   (c) $y = \dfrac{1}{x + 4}$
   (d) $y = 2\,x\,e^{-3x}$
   (e) $y = x^2 - \dfrac{1}{3\,x^2}$
   (f) $y = \dfrac{x^2 + 9}{(x - 3)^2}$
   (g) $y = e^{-x^2}$

(h) $y = (x+4)\, e^{x+4}$

(i) $y = \dfrac{x+1}{x}$

(j) $y = x\,\sqrt{1-x^2}$

(k) $y = ln(x^2 - 2\,x + 2)$

(l) $y = e^{x^2-1}$

5. Esboce os gráficos de:

(a) $y = -x^2 + 4x + 2$

(b) $y = -x^4 - x^3 - 2x^2$

(c) $y = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

(d) $y = ln(x^2+1)$

(e) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

(f) $y = \dfrac{x^2}{x-3}$

(g) $y = 2\sqrt{x} - x$

(h) $y = x^3 - 3x^2$

(i) $y = x + \dfrac{1}{x}$

(j) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

(k) $y = x^5 - x^3$

(l) $y = x^6 - x^4$.

(m) $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 2\,x}$

(n) $y = (x+1)\,(x-3)^{\frac{2}{3}}$

(o) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$

(p) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2 - x - 2}$

(q) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)\,(x+2)^2}$

(r) $y = \dfrac{x^2 - 4\,x - 5}{x-5}$

(s) $y = (x^2-1)^2$

(t) $y = 2\,x\,ln^2(x)$

6. Determine o valor de k tal que a função $y = x^3 + kx^2 + x + 1$ admita um ponto de inflexão em $x = 1$.

7. Seja $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

(a) Determine o único ponto de inflexão de y.

(b) Verifique que y tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo se $b^2 - 3ac > 0$.

8. Seja $y = x^m\,(1 - x^n)$, onde $m,\ n$ são números naturais. Verifique:

(a) Se m é par, y tem um ponto de mínimo em $x = 0$.

(b) Se n é par, y tem um ponto de mínimo em $x = 1$.

9. Esboce o gráfico da família de curvas $y = x^4 + x^3 + c\,x^2$, $c \in \mathbb{R}$.

10. Um cartaz deve conter $50\,cm^2$ de matéria impressa com duas margens de $4\,cm$ cada, na parte superior e na parte inferior e duas margens laterais de $2\,cm$ cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que sua área total seja mínima.

11. Uma fábrica de refrigerantes usa latas cilíndricas cujos volumes devem ser iguis a 256 cm^3.Determine a altura e o raio das bases para minimizar a área da superfície.

12. A taxa aeróbica de uma pessoa com x anos de idade é dada por:

$$A(x) = \frac{110\,(ln(x) - 2)}{x},$$

sendo $x \geq 11$. Em que idade a pessoa tem capacidade aeróbica máxima?

13. Um produtor descobre que quando o preço unitário de seu produto era R$6 a demanda era de 4200 unidades e quando o preço era de R$8 a demanda era de 3800 unidades. Admitindo que a função da demanda é afim, determine o preço que deve ser cobrado para que a receita mensal seja máxima.

14. A relação entre preço e a demanda para um certo produto é $p = 20\,e^{-x/2}$, sendo p o preço unitário e x a demanda mensal. Qual é o preço que torna a receita mensal máxima?

15. Uma empresa que produz um só produto calcula que sua função de custo total diário (em reais) é dada por $C(x) = x^3 - 4\,x^2 + 17\,x + 10$ e que sua função de receita é $R(x) = 20\,x$. Determine o valor de x para o qual o lucro diário é máximo.

16. A vazão de água de uma represa é modelada por:

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1},$$

se $0 \leq t \leq 12$ e onde t é o tempo em meses. Determine quando a vazão foi máxima.

17. Uma empresa quer fabricar caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de uma folha retangular de papelão medindo 30 cm por 50 cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão. Dependendo do valor de x, diferentes caixas (com diferentes volumes) podem ser confeccionadas. O problema é determinar o valor de x tal que a caixa correspondente tenha o maior volume.

18. Usando L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{e^{3x}}$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\, e^{-4x}$

(g) $\lim\limits_{x \to 1} ln(x)\, ln(x-1)$

(h) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{2 + ln(x)}}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

Capítulo 8

A DERIVADA EM ECONOMIA

Em Economia, as funções diferenciáveis são chamadas marginais. O conceito de derivada na Economia é aplicado na chamada **Análise Marginal**. A Análise Marginal, essencialmente, estuda o aporte de cada produto e/ou serviço no lucro das empresas. Ela tenta dar respostas a perguntas do tipo: é conveniente deixar de produzir um determinado produto já existente? Que quantidade de um produto, uma empresa deve vender para continuar produzindo? Quais são os efeitos nos lucros da empresa quando ocorrem perturbações na demanda de um produto? É conveniente terceirizar?

8.1 Introdução

Agora temos ferramentas necessárias para caracterizar de forma mais precisa algumas funções da Economia.

Função demanda padrão

Em circunstâncias normais, quando o preço de um bem aumenta, a demanda do mesmo diminui e reciprocamente, se o preço diminui a demanda aumenta. Então, a função de demanda $x = f(p)$ deve ser decrescente; logo:

$$p_1 < p_2 \Longleftrightarrow x_2 = f(p_2) < f(p_1) = x_1.$$

Se a função for diferenciável, não constante, teremos que:

$$\frac{dx}{dp} < 0,$$

para todo p. Geometricamente, o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto da função de demanda é negativo. Isto justifica as escolhas feitas para função de demanda nos capítulos anteriores.

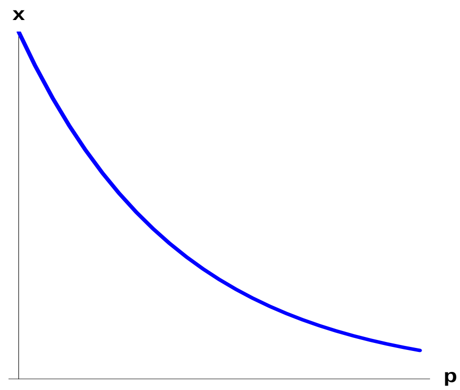


Figura 8.1: Função demanda padrão.

Função de custo total padrão

Em geral, uma função de custos $C = C(x)$ é de classe C^1 e não negativa. De fato, $C(0) \geq 0$, indica que se uma empresa não tem produção os custos são sempre não negativos; por exemplo, se tiver matéria prima estocada $C(0) > 0$. Então $C'(x) > 0$, isto é, C é crescente. Os custos crescem a medida que aumentam as unidades produzidas.

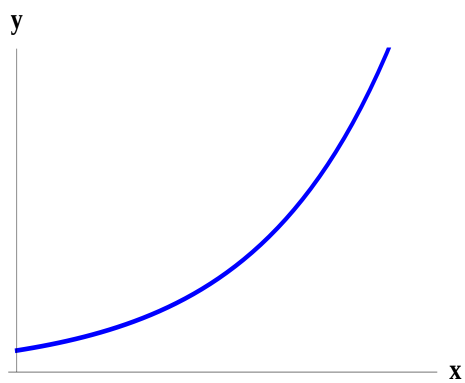


Figura 8.2: Função de custo total padrão.

Função de produção padrão

Em geral, uma função de produção $y = P(q)$ é de classe C^2 e deve satisfazer a $P'(q) > 0$ para todo q, P deve ser côncava para cima em $0 < q < a$ e côncava para baixo para $q > a$ (para um certo a). Note que poderemos ter $a = +\infty$.

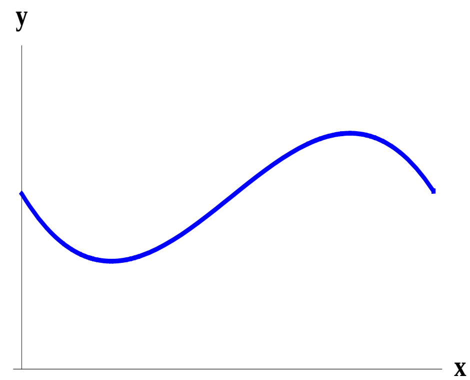


Figura 8.3: Função de produção padrão.

Exemplo 8.1.

[1] Um modelo comumente utilizado para função de produção é $y = P(q) = k\,q^{\alpha}$; $k,\,\alpha > 0$. Então:

$$\begin{aligned} P'(q) &= k\,\alpha\,q^{\alpha-1} > 0 \quad \text{para todo} \quad q, \\ P''(q) &= k\,\alpha\,(\alpha-1)\,q^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Então $y = P(q)$ é côncava para cima se $\alpha > 1$ e côncava para baixo se $0 < \alpha < 1$.

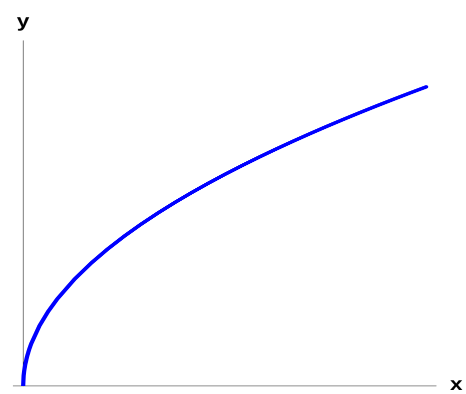


Figura 8.4: Função de produção para $0 < \alpha < 1$.

8.2 Análise Marginal

Definição 8.1. *O* **custo marginal** *de um bem é o aumento (acréscimo) do custo total para produzir uma unidade adicional do bem.*

Se a função de custo de um certo bem é derivável, então o custo marginal é a taxa instantânea com a qual aumenta ou diminui o custo para produzir uma unidade adicional do bem.

Definição 8.2. *Seja $C = C(x)$ a função de custo total para produzir um certo bem. Se $C = C(x)$ é derivável, então, denotamos e definimos o custo marginal por:*

$$CM_g(x) = C'(x).$$

O custo marginal $CM_g(x)$ é o custo aproximado para produzir a unidade $x+1$ após ter produzido x unidades. Note que o custo marginal independe do custo fixo da empresa.

Em situações normais, $C(x)$ e x são não negativas e deve ter a seguinte propriedade:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow C(x_1) < C(x_2).$$

Isto é, o custo deve crescer se o número de unidades produzidas cresce. Se $C = C(x)$ for diferenciável, temos que:

$$CM_g(x) = C'(x) > 0,$$

para todo x. Quando o número de bens produzidos é muito grande, o custo marginal deve crescer ou ser nulo. Por outro lado, o custo marginal também pode decrescer para alguns valores de x. Logo, a função de custo deve ter intervalos de concavidade para cima e intervalos de concavidade para baixo.

Proposição 8.1. *Seja $C \in C^1$.*

1. *Se $CM_g(x) > CM_e(x)$, então CM_e é crescente.*
2. *Se $CM_g(x) < CM_e(x)$, então CM_e é decrescente*
3. *x_0 é um ponto crítico de $CM_e = CM_e(x)$ se, e somente se $CM_e(x_0) = CM_g(x_0)$.*

Segue diretamente, que se derivamos o custo médio: $CM_e(x) = \dfrac{C(x)}{x}$; temos:

$$CM_e{}'(x) = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\big[CM_g(x) - CM_e(x)\big].$$

Corolário 8.1. *Se $C \in C^2$, então o custo médio é mínimo em x_0, se satisfaz às seguintes condições:*

1. *$CM_e(x_0) = CM_g(x_0)$ e*
2. *$CM_g{}'(x_0) > 0$.*

Exemplo 8.2.

O custo total de uma empresa para produzir x unidades de um determinado produto é $C(x) = 4\,x^2 + x + 16$. Em que nível de produção o custo médio é mínimo?

Calculemos $CM_e(x_0) = 4\,x_0 + 1 + \dfrac{16}{x_0}$ e $CM_g(x_0) = 8\,x_0 + 1$; logo:

$$CM_e(x_0) = CM_g(x_0) \Leftrightarrow 4\,x_0 + 1 + \frac{16}{x_0} = 8\,x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = 2,$$

e ${CM_g}'(2) > 0$. Logo, o custo médio é mínimo em $x = 2$ e o custo $C(2) = 34$.

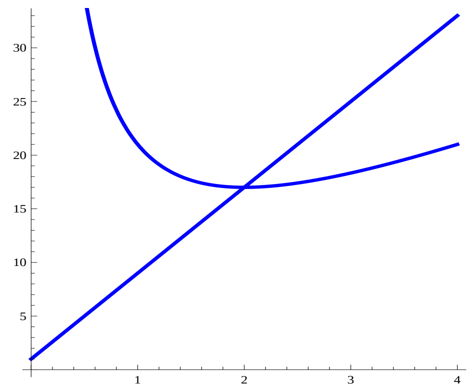


Figura 8.5: Gráfico do custo marginal e o custo médio.

Definição 8.3. *A* **receita marginal** *de um bem é a variação da receita ao vender uma unidade adicional do bem.*

Seja $R = R(x)$ a função de receita total da venda de um certo tipo de bem. Se $R = R(x)$ é derivável, então, denotamos e definimos a receita marginal:

$$RM_g(x) = R'(x).$$

A receita marginal $RM_g(x)$ é a receita aproximada da venda $x+1$ após ter vendido x unidades.

Definição 8.4. *O* **lucro marginal** *de um bem é o lucro aproximado ao vender uma unidade adicional do bem.*

Seja $L = L(x)$ a função de lucro total da venda de um certo tipo de bem. Se $L = L(x)$ é derivável, então, denotamos e definimos o lucro marginal:

$$LM_g(x) = L'(x) = RM_g(x) - CM_g(x).$$

Em situações normais, $L = L(x)$ e x são não negativas e deve ter a seguinte propriedade:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow L(x_1) < L(x_2).$$

Isto significa que se o consumo crescer o lucro cresce. Se $L = L(x)$ for diferenciável, temos que:

$$LM_g(x) = L'(x) > 0,$$

para todo x.

Proposição 8.2. *Seja $L \in C^1$.*

1. *Se $RM_g(x) > CM_g(x)$, então L é crescente.*
2. *Se $RM_g(x) < CM_g(x)$, então L é decrescente*
3. *x_0 é um ponto crítico de $LM_g = LM_g(x)$ se, e somente se $RM_g(x_0) = CM_g(x_0)$.*

4. *Sendo $C \in C^2$, então o lucro é máximo em x_0, se $CM_e(x_0) = CM_g(x_0)$.*

Da proposição anterior segue que, se $RM_g(x) > CM_g(x)$, deve ser produzida a unidade seguinte e se $RM_g(x) < CM_g(x)$ não se deve produzir a seguinte unidade.

Derivando o lucro: $L(x) = R(x) - C(x)$, temos:

$$L'(x) = RM_g(x) - CM_g(x) \Longrightarrow L'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow RM_g(x_0) = CM_g(x_0).$$

Por outro lado, para que o lucro seja máximo devemos ter custo mínimo e receita máxima,isto é, $C''(x_0) > 0$ e $R''(x_0) < 0$; logo $L''(x_0) < 0$. Portanto, o lucro é máximo em x_0 se:

$$RM_g{}'(x_0) < CM_g{}'(x_0).$$

Este resultado representa uma importante conclusão geral, referente a qualquer tipo de empresa. No nível de produção onde o lucro é máximo a receita marginal é igual ao custo marginal. Veja o exemplo [6].

Exemplo 8.3.

[1] Uma mineradora determina que sua função de custo total para a extração de certo tipo de ferro é dada por $C(x) = 2.5\,x^2 + 4.32\,x + 1200$ em US$, onde x é dada em toneladas de ferro. Determine o custo adicional quando a produção aumenta de 10 para 11 toneladas de ferro. Ache o custo marginal para 10 toneladas.

Primeramente calculamos $C(11) = 1550.02$ e $C(10) = 1493.20$, logo:

$$C(11) - C(10) = US\$\,56.82.$$

Derivando a função de custo, temos:

$$CM_g(x) = C'(x) = 5\,x + 4.32 \Longrightarrow CM_g(10) = US\$\,54.32.$$

Isto significa que se a extração de ferro é incrementada em 1 tonelada, de 10 para 11 toneladas a mudança do custo é, aproximadamente, de US$ 54.32. Em outras palavras, extrair uma tonelada adicional de ferro custa US$ 54.32.

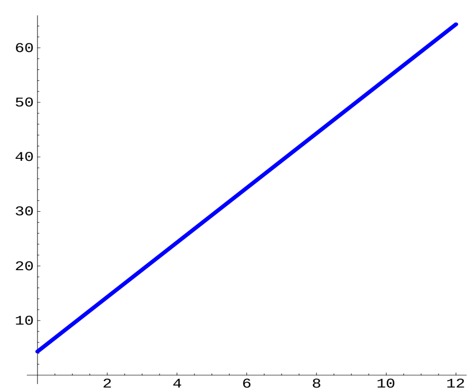


Figura 8.6: Gráfico do custo marginal.

[2] O custo médio para produzir um certo tipo de componentes mecânicos para motores de carros é dado por: $CM_e(x) = 0.001\,x^2 - 0.02\,x + 5 + \frac{5000}{x}$. Determine o custo adicional quando a produção aumenta de 50 para 51 componentes. Ache o custo marginal para 50 unidades.

Como $C(x) = x\,CM_e(x) = 0.001\,x^3 - 0.02\,x^2 + 5\,x + 5000$, temos: $C(51) = 5335.63$ e $C(50) = 5325.0$, logo:

$$C(51) - C(50) = 10.63.$$

Derivando:

$$CM_g(x) = 0.003\,x^2 - 0.04\,x + 5 \Longrightarrow CM_g(50) = 10.5.$$

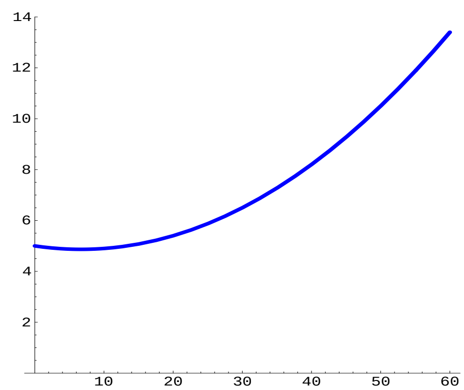


Figura 8.7: Gráfico do custo marginal.

[3] Se a relação entre o preço e a demanda, para um certo produto é $(x+2)\,p = 400$, ache a função receita e a receita marginal.

Lembrando que $R(x) = x\,f(x)$, onde $p = f(x)$ é uma função de preço. Logo:

$$p = f(x) = \frac{400}{x+2} \Longrightarrow R(x) = \frac{400\,x}{x+2} \Longrightarrow R'(x) = \frac{800}{(x+2)^2}.$$

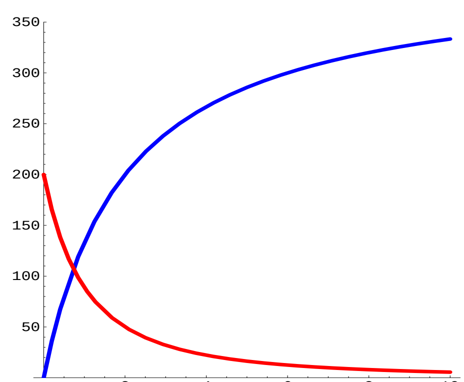


Figura 8.8: Gráfico da receita e da receita marginal, respectivamente.

[4] O preço de um certo bem é dado por $p = f(x) = 50\,e^{-0.01x}$, $x \geq 0$ e o custo por

$C(x) = 100\,ln(x+1)$. Determine o lucro marginal para 90 unidades.

Sabemos que $L(x) = R(x) - C(x) = 50\,x\,e^{-0.01x} - 100\,ln(x+1)$, então:

$$LM_g(x) = L'(x) = e^{-0.01x}\,(50 - 0.5\,x) - \frac{100}{x+1} \Longrightarrow LM_g(90) = 0.933.$$

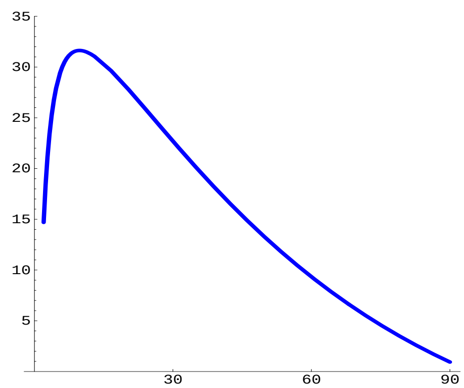


Figura 8.9: Gráfico do lucro marginal.

[5] **Decisão sobre a fixação de preços:** Uma empresa tem o custo para produzir x bens por semana dado por $C(x) = 10^{-6}\,x^3 - 3\times 10^{-3}\,x^2 + 6\,x + 1000$. O preço para que x bens possam ser vendidos semanalmente tem demanda $p = 12 - 15\times 10^{-4}\,x$. Determine o volume e o preço de venda para que o lucro seja máximo.

A receita semanal é $R(x) = p\,x = 12\,x - \left(15\times 10^{-4}\right)x^2$ e o lucro

$$L(x) = R(x) - C(x) = -10^{-6}\,x^3 + 15\times 10^{-4}\,x^2 + 6\,x - 1000.$$

Derivando e igulando a zero:

$$L'(x) = -3\times 10^{-6}\,x^2 + 3\times 10^{-3}\,x + 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 2000 \quad \text{e} \quad x = -1000.$$

Ficamos com a solução positiva. Derivando novamente

$$L''(x) = -6\times 10^{-6}\,x + 3\times 10^{-3}. \Longrightarrow L''(2000) = -0.009.$$

Logo, $x = 2000$ é um ponto de máximo. O preço do bem correspondente a $x = 2000$ é

$$p = 12 - 15\times 10^{-4}\times 2000 = 9\ u.m.$$

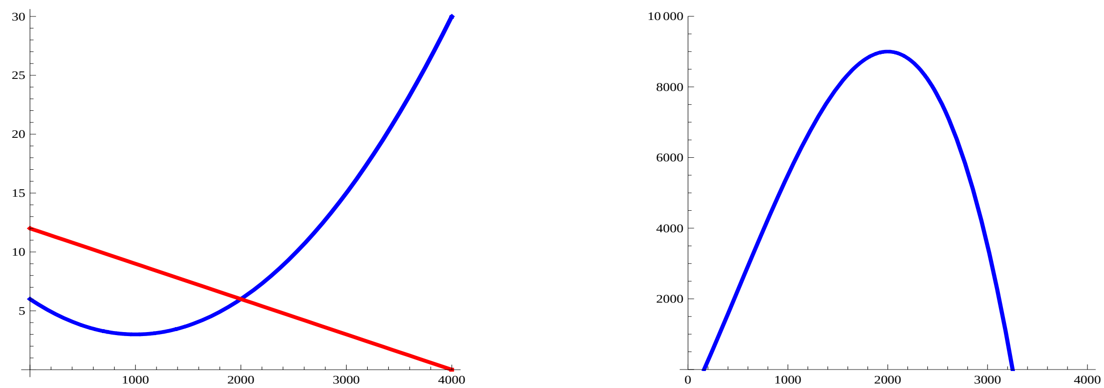


Figura 8.10: Gráficos de RM_g, CM_g e L, respectivamente.

[6] A demanda anual de um certo produto é dada por $x = 100000 - 200\,p$, onde x é o número de unidades demandadas por ano e p é o preço em reais. O custo para produzir este bem é dado por $C(x) = 150000 + 100\,x + 0.003\,x^2$. Maximize o lucro.

A receita é $R(x) = 500\,x - 0.005\,x^2$, logo $RM_g(x) = 500 - 0.01\,x$ e $CM_g = 100 + 0.006\,x$, logo:

$$RM_g(x) = CM_g(x) \Longrightarrow 500 - 0.01\,x = 0.006\,x + 100 \Longrightarrow x = 25000.$$

Por outro lado $RM'_g(x) = -0.01 < CM'_g(x) = 0.006$; logo, $x = 25000$ é um ponto de máximo.

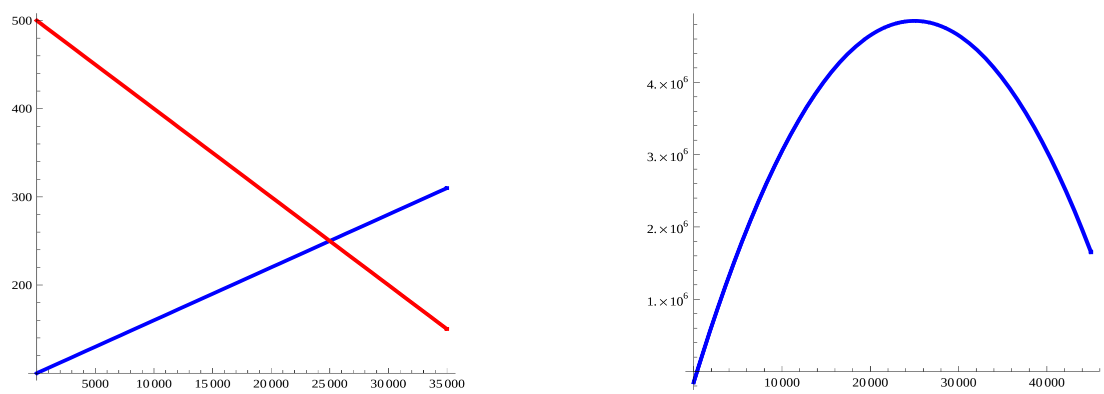


Figura 8.11: Gráficos de RM_g, CM_g e L, respectivamente.

[7] Se o custo para produzir certo bem é dado por $C(x) = a\,e^{kx}$; $a,\ k > 0$, determine quando o custo médio é mínimo.

Calculemos $CM_e(x) = CM_g(x)$:

$$\frac{a\,e^{kx}}{x} = a\,k\,e^{kx} \Longrightarrow x = \frac{1}{k}.$$

Por outro lado, $CM_g{}'(x) = a\,k^2\,e^{kx} > 0$, para todo x.

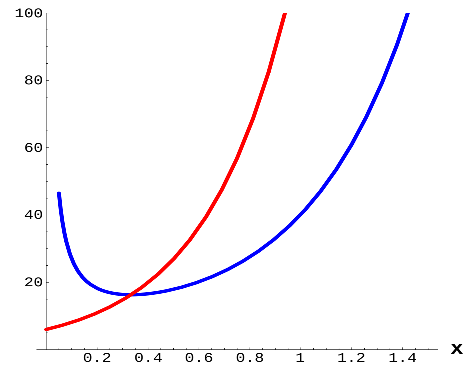


Figura 8.12: Gráficos de CM_e e CM_g.

[8] Suponha que uma empresa para produzir um certo artigo tenha função de custo total $C(x) = 0.003\,x^2 + 100\,x$ e de receita total $R(x) = -0.005\,x^2 + 500\,x$. Determine o lucro máximo.

Calculemos $RM_g(x) = CM_g(x)$, isto é:

$$CM_g(x) = 0.006\,x + 100 = RM_g(x) = -0.01\,x + 500 \Longrightarrow x = 25000.$$

Note que $L(25000) = 5000000$ u.m. (unidades monetárias).

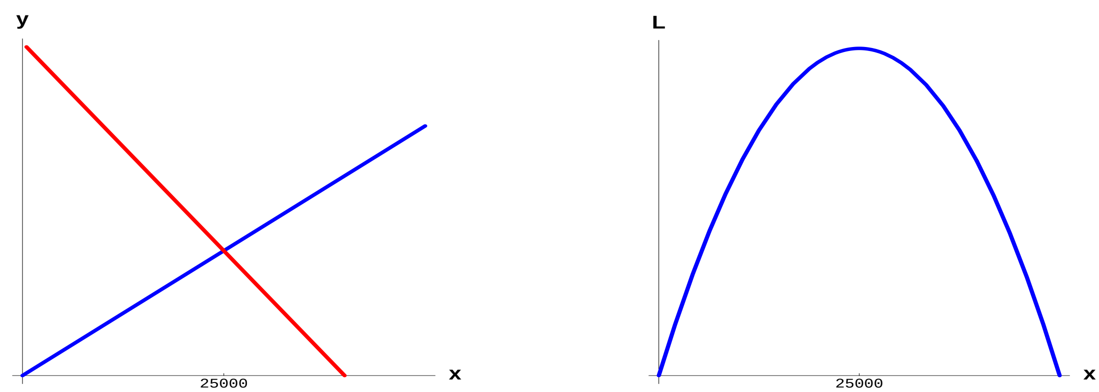


Figura 8.13: Gráficos de RM_g, CM_g e L, respectivamente.

8.3 Elasticidade

A **elasticidade**, em termos gerais, mede o grau de resposta que apresenta uma variável às mudanças de outra variável.
Em geral, dada uma função f derivável, definimos a elasticidade de f como:

$$\varepsilon_{f(x)} = \frac{x\,f'(x)}{f(x)}.$$

Como f poder ser crescente ou decrescente, dizemos que:

1. f é inelástica se $|\varepsilon_{f(x)}| < 1$.
2. f é elástica se $|\varepsilon_{f(x)}| > 1$.
3. f é unitária se $|\varepsilon_{f(x)}| = 1$.

Existem diversos tipos de elasticidade. Nós estudaremos os mais relevantes.

8.3.1 Elasticidade-preço

Definição 8.5. *A* **elasticidade-preço da demanda** *mede o quanto a quantidade demandada responde a variações no preço.*

Para deixar esta medida de sensibilidade livre de unidades, consideraremos tanto a variação na quantidade demandada, quanto a variação no preço em termos de percentuais. Assim a elasticidade-preço da demanda mede as variações percentuais desta, ante uma mudança no preço da mercadoria demandada. Logo, a elasticidade-preço da demanda é uma medida da resposta de consumidores a mudanças de preços (aumento ou redução) de produtos, bens ou serviços.

Para certos tipos de produtos, bens e/ou serviços, os consumidores podem reagir fortemente quando o preço de um determinado produto sobe ou desce e para outros tipos de produtos, bens e/ou serviços a demanda não se altera notavelmente quando o preço varia. No primeiro caso, dizemos que a demanda é **elástica** e no segundo que é **inelástica**. Quando a variação da demanda é proporcional à queda de preço ,a demanda é dita **unitária**.

Em geral, produtos que não têm bons substitutos apresentam menor elasticidade, por exemplo, a água. Por outro lado, os produtos com muitos substitutos apresentam maior elasticidade, por exemplo, os refrigerantes. A elasticidade da demanda depende de como são traçados os limites do mercado. Mercados definidos de forma restrita tendem a ter uma demanda mais elástica que mercados definidos de forma ampla. Então, dependendo do tipo de produto e do segmento de mercado afetado, a elasticidade da demanda pode comportar-se de forma diferente. Do mesmo modo os produtores também têm suas reações e a oferta pode ser elástica ou inelástica.

A elasticidade-preço da demanda é denotada e definida por:

$$\varepsilon_p = \frac{\dfrac{\text{Variação percentual da quantidade demandada}}{\text{quantidade}}}{\dfrac{\text{Variação percentual do preço}}{\text{preço}}}.$$

Isto é, se $x = f(p)$ é a função da demanda:

$$\varepsilon_p = \frac{p_0}{x_0} \times \frac{x - x_0}{p - p_0},$$

onde p_0 é o preço inicial, p o preço atual, $x_0 = f(p_0)$ a quantidade demandada inicial e $x = f(p)$ a quantidade demandada atual.

Se a variação percentual na quantidade demandada é maior que a variação percentual do preço, a elasticidade-preço da demanda será em valor absoluto, maior que um . Neste caso temos que a demanda é elástica. Se a variação percentual na quantidade demandada é menor que a variação percentual do preço, a elasticidade-preço da demanda será em valor absoluto menor que um. Neste caso temos que a demanda é inelástica. Se a variação percentual na quantidade demandada é igual à variação percentual do preço, a elasticidade-preço da demanda será em valor absoluto igual a um. Neste caso temos que a demanda é unitária.

Exemplo 8.4.

[1] A um preço de 30 reais a demanda de um certo bem é de 300 unidades; se o preço aumenta para 45 reais a demanda diminui para 225 unidades. Calcule a elasticidade-preço.

Denotemos por $p_0 = 30$, $p = 45$, $x_0 = 300$ e $x = 225$, então:

$$\varepsilon_p = \frac{p_0}{x_0} \times \frac{x - x_0}{p - p_0} = \frac{30}{300} \times \frac{225 - 300}{45 - 30} = -\frac{1}{2}.$$

Logo, $|\varepsilon_p| < 1$; a demanda é inelástica. Isto é, uma variação percentual no preço implica em uma variação menor na demanda e de sinal contrário à quantidade demandada.

[2] A um preço de 2.5 reais a demanda de um certo bem é de 6 unidades e se o preço aumenta para 3 reais a demanda diminui zero unidades. Calcule a elasticidade-preço.

Denotemos por $p_0 = 2.5$, $p = 3$, $x_0 = 6$ e $x = 0$, então:

$$\varepsilon_p = -\frac{2.5}{6} \times \frac{6}{0.5} = -5.$$

Logo, $|\varepsilon_p| > 1$, a demanda é elástica. Isto é, uma variação percentual no preço implica em uma variação maior na demanda e de sinal contrário à quantidade demandada.

No caso em que as funções envolvidas sejam diferenciáveis; isto é, a função da demanda $x = f(p)$ seja diferenciável, temos que a elasticidade-preço da demanda é:

$$\varepsilon_p = \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp}.$$

Note que :

$$\varepsilon_p \leq 0 \quad \text{pois} \quad x,\, p > 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dp} \leq 0.$$

Observações 8.1.

1. Se $\varepsilon_p = 0$, a demanda-preço é dita perfeitamente inelástica e implica em que a demanda não varia por mudanças no preço.

2. Se $0 < |\varepsilon_p| < 1$, a demanda-preço é inelástica e como sabemos, implica em que a variação percentual da quantidade demandada seja menor que a variação percentual do preço.

3. Se $|\varepsilon_p| = 1$, a demanda-preço é elasticamente unitária e como sabemos, implica em que a variação percentual da quantidade demandada seja igual à variação percentual do preço.

4. Se $1 < |\varepsilon_p| < +\infty$, a demanda-preço é elástica e como sabemos, implica em que a variação percentual da quantidade demandada seja maior que a variação percentual do preço.

5. Se $|\varepsilon_p| = +\infty$, a demanda-preço é dita perfeitamente elástica e implica em que os consumidores estejam dispostos a comprar tudo o que é ofertado a um preço determinado e nada a um preço superior.

Demanda Polinomial de Primeiro Grau ou Afim

Consideremos uma função de demanda afim $x = f(p) = -a\,p + b$, $a \geq 0$. Então:

$$\varepsilon_p = \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} = -\frac{a\,p}{x}.$$

Se $\varepsilon_p = 0$, então o coeficiente angular $a = 0$; logo, a curva de demanda é paralela ao eixo dos p passando por b.

Se $|\varepsilon_p| = +\infty$, então $x = 0$ e temos que $ap = b$ e a curva da demanda é paralela ao eixo dos x passando por b/a

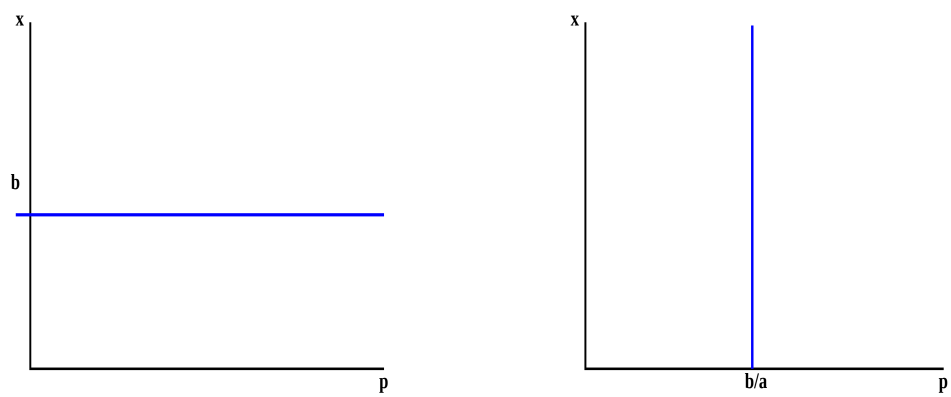


Figura 8.14: Demanda-preço perfeitamente inelástica e perfeitamente elástica, respectivamente.

Se $|\varepsilon_p| = 1$, então $a\,p = x$, logo temos uma reta passando pela origem perpendicular ao gráfico da função de demanda e que se intersectam no ponto $(b/2a, b/2)$.

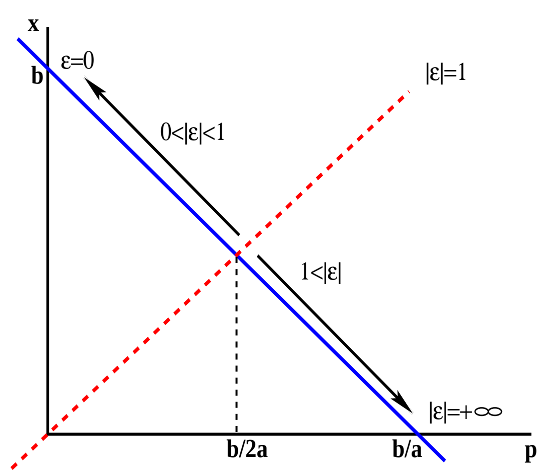


Figura 8.15: Demanda no caso afim.

A porção de reta que fica no semi-plano $ap < x$ corresponde à demanda inelástica e a porção de reta que fica no semi-plano $ap > x$ corresponde à demanda elástica.

Demanda Polinomial de Segundo Grau ou Quadrática

Se a função da demanda de uma empresa é dada por

$$x = f(p) = b - a\,p^2, \quad a > 0 \quad \text{e} \quad b \geq 0,$$

estudemos sua elasticidade.

Se $x = f(p) = b - a\,p^2$, então:

$$\varepsilon_p = -\frac{2\,a\,p^2}{x}.$$

Então, $\varepsilon_p = 0$ se $p = 0$; logo $x = b$.

$\varepsilon_p = +\infty$ se $p = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

$|\varepsilon_p| = 1$ se $p = \sqrt{\dfrac{b}{3a}}$. Logo:

$$0 < \varepsilon_p < 1 \Longleftrightarrow 0 < p < \sqrt{\frac{b}{3a}} \quad \text{e} \quad 1 < \varepsilon_p \Longleftrightarrow p > \sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

Exemplo 8.5.

Se função de demanda é $x = f(p) = 18 - 2\,p^2$, temos:

$$\varepsilon_p = -\frac{4\,p^2}{x}.$$

$\varepsilon_p = 0$ se $p = 0$, isto é $x = 18$.
$\varepsilon_p = +\infty$ se $p = 3$.
$|\varepsilon_p| = 1$ se $p = \sqrt{3}$. Logo, $0 < \varepsilon_p < 1$ se $0 < p < \sqrt{3}$ e $1 < \varepsilon_p$ se $p > \sqrt{3}$.

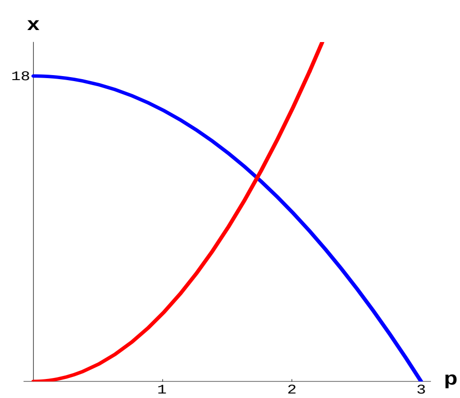


Figura 8.16: Demanda $x = f(p) = 18 - 2\,p^2$ (azul) e ε_p (vermelho).

Demanda Racional

Consideremos uma função de demanda $x = f(p) = k\,p^{-r}$, $r \geq 0$ e $k > 0$. Então:

$$\varepsilon_p = \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} = -r.$$

A elasticidade-preço da demanda é constante. A demanda não tem variação com o preço.

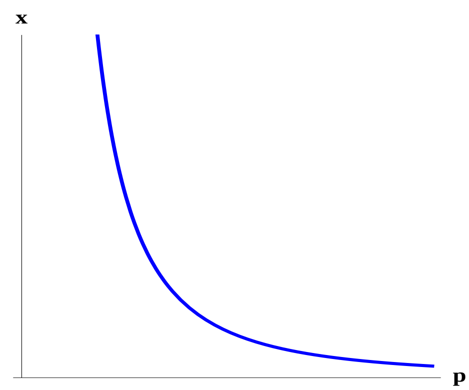


Figura 8.17: Demanda $x = f(p) = k\,p^{-r}$.

8.3.2 Elasticidade-preço e Receita

Considere a função de receita total $R(x) = x\,f(x)$, onde $p = f(x)$ é uma função de preço; então:

$$\begin{aligned} RM_g(x) &= \frac{dR}{dx} = f(x) + x\,\frac{df}{dx} = p + x\,\frac{dp}{dx} = p\left[1 + \frac{x}{p}\,\frac{dp}{dx}\right] \\ &= p\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_p}\right]. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} RM_g(x) < 0 \quad &\text{se} \quad \varepsilon_p > -1 \\ RM_g(x) = 0 \quad &\text{se} \quad \varepsilon_p = -1 \\ RM_g(x) > 0 \quad &\text{se} \quad \varepsilon_p < -1 \end{aligned}$$

Se $|\varepsilon_p| < 1$, então $RM_g(x) < 0$, ou seja, se o preço sobe, a receita total sobe e se o preço diminui a receita total diminui.

Se $|\varepsilon_p| > 1$, então $RM_g(x) > 0$, ou seja, se o preço sobe a receita total diminui e se o preço diminui a receita total sobe.

Se $|\varepsilon_p| = 1$, então $RM_g(x) = 0$ e a receita total permanece constante.

Observamos acima que x_0 é um ponto crítico de $R = R(x)$ se, e somente se $\varepsilon_p(x_0) = -1$ e portanto x_0 é um ponto de máximo da receita.

Logo, podemos concluir que se a demanda de um bem está na parte elástica da demanda é de interesse do produtor reduzir o preço do bem para que a receita total aumente. Agora se a demanda está na parte inelástica da demanda é de interesse do produtor aumentar o preço do bem para que a receita total aumente.

A elasticidade da receita para funções do tipo: $R(x) = x\,f(x)$ é dada por:

$$\varepsilon_{R(x)} = \frac{x\,R'(x)}{R(x)} = \frac{RM_g(x)}{f(x)} = \frac{p}{f(x)}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_p}\right] = 1 + \frac{1}{\varepsilon_p}.$$

Logo, a elasticidade da receita depende essencialmente da elasticidade-preço da demanda.

Exemplo 8.6.

[1] A demanda de um certo produto é dada por $x = 50 - p$, $0 \le p \le 50$.

(a) Determine os intervalos de preço para os quais a demanda é elástica, inelástica e unitária.

(b) Estude o comportamento da receita utilizando o ítem (a).

(a) Como $\varepsilon_p = \dfrac{p}{x}\,\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{p}{50-p}$, notamos que $p \ge 0$ e $50 - p \ge 0$; logo

$$\begin{cases} |\varepsilon_p| & = 1 \iff 50 - p = p \iff p = 25 \\ |\varepsilon_p| & < 1 \iff p < 50 - p \iff p < 25 \\ |\varepsilon_p| & > 1 \iff 50 - p < p \iff p > 25. \end{cases}$$

A demanda é inelástica em $[0, 25)$, elástica em $(25, 50]$ e unitária para $p = 25$.

Se $p \in [0, 25)$ a receita aumenta, se $p \in (25, 50]$ a receita diminui e a receita é máxima em $p = 25$. Note que a receita é $R(x) = x\,(50 - x)$.

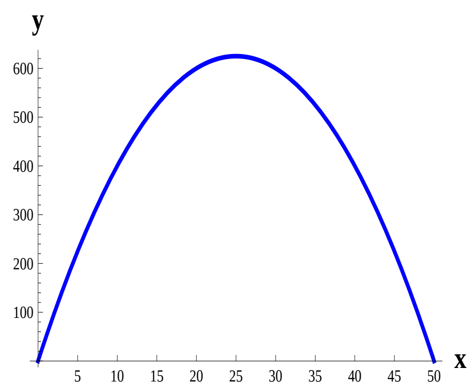


Figura 8.18: Gráfico de $R(x) = x\,(50 - x)$.

[2] Se o preço e a demanda de um certo produto são dados por $p^3 + x^2 = 3$, determine o ponto em que a receita máxima.

Note que: $RM_g(x) = 0$ se, e somente se $\varepsilon_p(x) = -1$. Calculamos $\varepsilon_p(x)$ derivando implicitamente $p^3 + x^2 = 3$:

$$3\,p^2 + 2\,x\,\frac{dx}{dp} = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{3\,p^2}{2\,x}.$$

Então:

$$\varepsilon_p(x) == -\frac{3\,p^3}{2\,x^2} = -1 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{9}{5}.$$

Logo $x = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ é um ponto de máximo da receita.

[2] A relação entre o preço e a demanda, para um certo produto é $(x+2)\,p = 400$:

(a) Ache a função receita.

(b) Ache a elasticidade da receita.

(c) Analise a elasticidade da receita unitária.

(a) Lembrando que $R(x) = x\,f(x)$, onde $p = f(x)$ é uma função de preço, temos:

$$p = f(x) = \frac{400}{x+2} \Longrightarrow R(x) = \frac{400\,x}{x+2}.$$

(b) Calculamos $\varepsilon_p(x)$ derivando implicitamente $(x+2)\,p = 400$:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x+2}{p} \Longrightarrow \varepsilon_p(x) = -\frac{x+2}{x} \Longrightarrow \varepsilon_{R(x)} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_p} = \frac{2}{x+2}.$$

(c) $|\varepsilon_{R(x)}| = 1$ se $x = 0$; logo, $p = 200$.

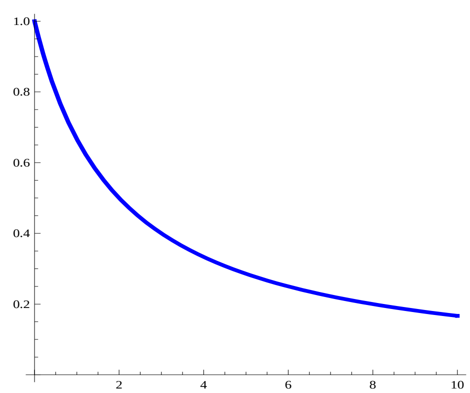


Figura 8.19: Gráfico de $\varepsilon_{R(x)}$.

[3] A relação entre o preço e a demanda, para um certo produto é $x\,(1+p^2) = 100$. Determine quando a elastacidade-preço da demanda é inelástica.

Calculamos $\varepsilon_p(x)$ derivando implicitamente $x\,(1+p^2) = 100$:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2\,p\,x}{p^2+1} \Longrightarrow \varepsilon_p(x) = -\frac{2\,p^2}{p^2+1}.$$

A demanda é inelástica se $|\varepsilon_p(x)| < 1$, donde $p < 1$.

8.3.3 Elasticidade-custo

A elasticidade custo é dada por:

$$\varepsilon_{C(x)} = \frac{CM_g(x)}{CM_e(x)}.$$

Se $\varepsilon_{C(x)} < 1$, então o custo de produção da seguinte unidade será menor que o custo médio das unidades já produzidas.

Reciprocamente, se $\varepsilon_{C(x)} > 1$, então o custo médio por unidade cresce quando uma unidade adicional for produzida.

Exemplo 8.7.

Sabendo que numa empresa, o custo total para produzir uma quantidade x de unidades de um certo bem é dada por $C(x) = x^2 + 900$, determine a elasticidade custo para $x = 10$, $x = 30$ e $x = 60$.

$C'(x) = 2\,x$; então:

$$\varepsilon_{C(x)} = \frac{2\,x^2}{x^2 + 900};$$

logo:

$$\varepsilon_{C(x)} = \begin{cases} 0.2 & \text{se} \quad x = 10 \\ 1 & \text{se} \quad x = 30 \\ 1.6 & \text{se} \quad x = 60. \end{cases}$$

Para $x = 10$ é inelástica, para $x = 30$ é unitária e para $x = 60$ é elástica.

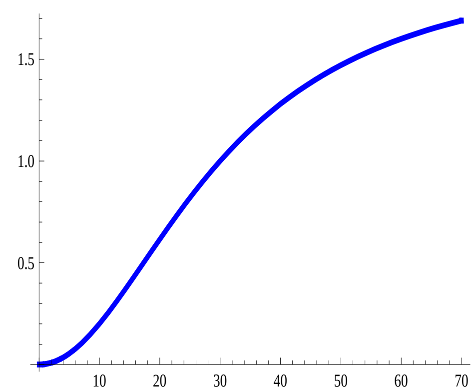


Figura 8.20: Gráfico de $\varepsilon_{C(x)}$.

8.4 Exercícios

1. Determine a função de custo marginal se a função de custo médio para produzir um certo produto é dada por:

$$CMe(x) = 2\,x + \frac{1000}{x^2}.$$

2. O custo total para produzir um certo produto é dado por:

$$C(x) = \frac{5\,x^2}{x^2+3} + 5000.$$

(a) Determine o custo e o custo médio marginal para $x = 0$, $x = 20$ e $x = 50$.

(b) Esboce os gráficos do custo e do custo médio marginal.

3. Numa fábrica o custo total para produzir x unidades diárias é:

$$C(x) = -x^3 + 100\,x^2 + x + 4$$

e a demanda é:

$$x = 40 - \sqrt{p^2 + p}.$$

(a) Determine o custo marginal para $x = 0$, $x = 10$ e $x = 100$.

(b) Esboce os gráficos do custo e da demanda marginal.

(c) Determine o lucro e o lucro marginal.

4. Numa fábrica o custo total para produzir x unidades diárias é modelado por:

$$C(x) = 0.6\,x^3 - x^2 + 50\,x + 400,$$

o de produção é:

$$P(x) = -x^3 + 8\,x^2 + 40\,x$$

e o lucro:

$$L(x) = 25\,\sqrt{x^3 + x^2}.$$

(a) Determine o custo e o custo marginal para $x = 0$, $x = 10$ e $x = 100$.

(b) Determine a produtividade marginal para $x = 0$, $x = 10$ e $x = 100$.

(c) Determine o lucro marginal para $x = 0$, $x = 10$ e $x = 100$.

5. Numa fábrica o custo total para produzir x unidades diárias é:

$$C(x) = 0.3\,x^3 - 2\,x^2 + 500\,x.$$

(a) Em que nível de produção o custo médio por unidade será menor?

(b) Em que nível de produção o custo médio por unidade será igual ao do custo marginal?

(c) Esboce os gráficos do custo médio e marginal no mesmo sistema de coordenadas.

6. O custo médio de uma empresa é dado por:

$$CMe(x) = 30\,x - 6\,x^2 + x^3.$$

(a) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento.

(b) Determine os pontos de máximo e de mínimo, se existirem.

7. A relação entre preço e a demanda de um certo produto é $p = 40\,e^{-x/2}$, sendo p o preço unitário e x a demanda mensal. Determine o preço que torna a receita mensal máxima.

8. Uma empresa tem como função de custo total $C(x) = 30\,x^2 + 10\,x + 350$.

(a) Determine o custo total marginal e o custo médio em $x = 0$ e $x = 50$.

(b) Minimize o custo.

9. Uma empresa tem como função de custo total $C(x) = x^2 + 5\,x + 30$.

(a) Determine o custo total marginal e o custo médio em $x = 0$ e $x = 50$.

(b) Determine a quantidade que deve ser produzida se desejamos minimizar o custo médio.

10. O custo total para produzir um certo bem é $C(x) = x^2 + 10\,x + 400$ e a demanda deste bem é $p = 125 - 3\,x$.

(a) Determine o valor de x que maximiza a receita total.

(b) Determine o valor de x que maximiza o lucro total.

11. Uma companhia estima que a demanda anual de um certo produto é dada por:

$$p = 180000 - 250\,x,$$

onde x é o número de unidades demandadas e p é o preço em reais. O custo total de produção é dado por:

$$C(x) = 35000 + 300\,x + 0.001\,x^2.$$

(a) Maximize o lucro total.

(b) Qual é o preço que deveria ser fixado?

12. Uma empresa vende uma quantidade x de unidades de um certo produto obtendo um lucro $L(x) = -0.2\,x^3 + 10\,x - 200$.

    (a) Determine quando a empresa tem lucro.

    (b) Determine o lucro marginal.

    (c) Maximize o lucro total.

13. Uma empresa tem como funções de custo total e de preço $C(x) = x^3 - 10\,x^2 + 40\,x$ e $p = 200 - 10\,x$.

    (a) Determine o custo total marginal em $x = 0$ e $x = 100$.

    (b) Determine a receita total e a receita total marginal.

    (c) Determine o lucro total.

    (d) Maximize o lucro total.

14. As funções de custo total e receita total de uma empresa que produz um certo produto são $C(x) = 50000 + 20\,x + 0.0001\,x^2$ e $R(x) = 60\,x - 0.004\,x^2$, respectivamente.

    (a) Maximize o lucro.

    (b) Qual é o lucro máximo?.

15. Uma empresa foi fundada em 1990 e sua capacidade de produção P=P(t) evoluiu segundo:
$$P(t) = \frac{50000}{[700 + (t-20)^2]^2} \quad t \geq 0.$$

    (a) Em que ano a empresa alcançou sua capacidade máxima de produção?

    (b) Qual foi essa capacidade?

16. O custo total de uma empresa é $C(x) = -0.5\,x^3 + 10\,x^2 - 16\,x + 120$ e o preço de equilíbrio é 10 reais.

    (a) Calcule o custo marginal.

    (b) Calcule a receita marginal.

    (c) Maximize o lucro.

17. Um produtor descobre que quando o preço unitário de um produto era de 6 u.m. a demada era de 4200 unidades e quando o preço era de 8 u.m. a demanda era de 3800 unidades. Admitindo que a função de demanda é afim, determine o preço que deve ser cobrado para que a receita mensal seja máxima?

18. A demanda de uma empresa é dada por $x = ln(p^2 + 1)$ tal que $p > 1$.

    (a) Determine a elasticidade da demanda.

    (b) Determine a elasticidade da demanda para $p = 100$. Interprete sua resposta.

    (c) Determine a elasticidade da demanda para $p = 1000$. Interprete sua resposta.

    (d) Se a elasticidade da demanda é 1, interprete sua resposta em relação ao preço.

19. Numa fábrica o custo total para produzir x unidades diárias é $C(x) = x^3 + 20\,x^2 - x + 4$.

    (a) Determine a elasticidade do custo.

    (b) Determine a elasticidade do custo para $p = 100$. Interprete sua resposta.

    (c) Determine a elasticidade do custo para $p = 1000$. Interprete sua resposta.

20. Analise a elasticidade da função de demanda $x = b - a\,p^3$, $a > 0$.

Capítulo 9

INTEGRAÇÃO INDEFINIDA

9.1 Introdução

Na primeira parte do capítulo mostraremos como obter uma função conhecendo apenas a sua derivada. Este problema é chamado de integração indefinida.

Definição 9.1. *Uma função $F(x)$ é chamada uma* **primitiva** *da função $f(x)$ no intervalo I se para todo $x \in I$, tem-se:*

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Muitas vezes não faremos menção ao intervalo I, mas a primitiva de uma função sempre será definida sobre um intervalo.

Exemplo 9.1.

[1] Seja $f(x) = e^x$, então $F(x) = e^x$ é uma primitiva de f em $\mathbb{R}$, pois $F'(x) = e^x = f(x)$. $F'(x) = e^x + 200$ é também uma primitiva de f em $\mathbb{R}$, pois $F'(x) = e^x = f(x)$. Na verdade $F(x) = e^x + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$ é uma primitiva de f. De fato, $F'(x) = e^x = f(x)$.

[2] Seja $f(x) = 4\,x^3$, então $F(x) = x^4$ é uma primitiva de f em $\mathbb{R}$, pois $F'(x) = 4\,x^3 = f(x)$. $F(x) = x^4 + 5$ é também uma primitiva de f em $\mathbb{R}$, pois $F'(x) = x^3 = f(x)$. Na verdade, $F(x) = x^4 + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$ é primitiva de f pois $F'(x) = x^3 = f(x)$.

[3] Seja:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Não existe função definida em todo $\mathbb{R}$ cuja derivada seja igual a $f(x)$. Por outro lado, considere a seguinte função:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ x - a & x \in [a, b] \\ b - a & x \geq b. \end{cases}$$

$F(x)$ é uma função contínua em todo $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ se $x \in (a, b)$. Logo, F é uma primitiva de f em (a, b).

Em geral, uma função f admite uma infinidade de primitivas sobre um intervalo. É o que assegura a seguinte proposição:

Proposição 9.1. *Seja F uma primitiva da função f no intervalo I. Então, $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, é também primitiva de f no intervalo I.*

A pergunta natural que surge, a seguir, é: se F e G são primitivas de uma função f sobre um intervalo, será que F e G estão relacionadas de alguma forma? A resposta a esta questão é dada pela seguinte proposição:

Proposição 9.2. *Se F e G são primitivas de uma função f num intervalo I, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + c$, para todo $x \in I$.*

De fato, seja $H(x) = F(x) - G(x)$; então, para todo $x \in I$, temos que:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = \, = f(x) - f(x) = 0.$$

Como consequência do Teorema do Valor Médio, para todo $x \in I$, $H(x) = c$; então, para todo $x \in I$, $F(x) - G(x) = c$.

Em outras palavras, duas primitivas de uma função diferem por uma constante. Logo, se conhecemos uma primitiva de uma função, conhecemos todas as primitivas da função. De fato, basta somar uma constante à primitiva conhecida para obter as outras.

Exemplo 9.2.

[1] Seja $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$. Uma primitiva desta função é $F(x) = \dfrac{e^{ax}}{a}$; logo, toda primitiva de f é do tipo $G(x) = \dfrac{e^{ax}}{a} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

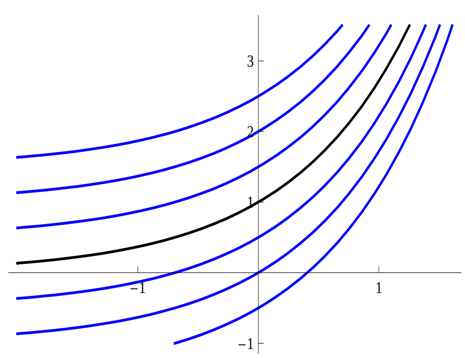


Figura 9.1: Gráficos de f e algumas primitivas de $f(x) = e^{ax}$.

[2] Seja $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Uma primitiva desta função é $F(x) = \dfrac{1}{x}$; logo, toda primitiva de f é do tipo $G(x) = -\dfrac{1}{x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Definição 9.2. *Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$ no intervalo I. A expressão $F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$ é chamada a* **integral indefinida da função** f *e é denotada por:*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+c}$$

Note que

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+c \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Em particular:

$$\int f'(x)\,dx = f(x)+c.$$

Teorema 9.1. **(Linearidade da Integral)** *Sejam F, G primitivas de f e g, respectivamente, num intervalo e α, $\beta \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha\,F+\beta\,G$ é uma primitiva de $\alpha\,f+\beta\,g$, e:*

$$\boxed{\int \big[\alpha\,f(x)+\beta\,g(x)\big]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx}$$

Prova: Se F e G são primitivas de f e g, respectivamente, então $\alpha\,F(x)+\beta\,G(x)$ é primitiva de $\alpha\,f(x)+\beta\,g(x)$; logo:

$$\begin{aligned}\int \big[\alpha\,f(x)+\beta\,g(x)\big]\,dx &= \big(\alpha\,F(x)+\beta\,G(x)\big)+c = \alpha\,\big(F(x)+c_1\big)+\beta\,\big(G(x)+c_2\big)\\ &= \alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Exemplo 9.3.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\displaystyle\int (x+1)^2\,dx$.

[2] $\displaystyle\int \big(10\,e^x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\big)\,dx$.

[1] [3] Observe que $(x+1)^2 = x^2+2\,x+1$; logo, usando o Teorema de linearidade:

$$\int (x+1)^2\,dx = \int (x^2+2\,x+1)\,dx = \int x^2\,dx+2\int x\,dx+\int dx = \frac{x^3}{3}+x^2+x+c.$$

[2] Usando o Teorema de linearidade, podemos escrever a integral como:

$$\int \big(10\,e^x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\big)\,dx = 10\int e^x\,dx+\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Como $\big(e^x\big)' = e^x$ e $\frac{4}{3}\,\big(\sqrt[4]{x^3}\big)' = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, então:

$$\int \big(10\,e^x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\big)\,dx = 10\,e^x+\frac{4}{3}\,\sqrt[4]{x^3}+c.$$

Assim o processo de integrar se reduz a descobrir uma função conhecendo apenas sua derivada; usando a tabela de derivadas do capítulo anterior, obtemos uma lista de integrais chamadas imediatas. Esta lista pode ser comprovada derivando cada resultado da integral e consultando a tabela de derivada. Por exemplo, na tabela de derivadas do capítulo anterior temos que:

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}; \quad \text{então,} \quad \int \frac{dx}{x} = ln(x) + c.$$

No entanto, não incluimos como imediatas, por exemplo, integrais do tipo $\int ln(x)\,dx$, pois não é evidente encontrar uma função que tem como derivada $ln(x)$. Para resolver este impasse, estudaremos os chamados **métodos de integração**, que nos permitirão calcular integrais não imediatas.

9.2 Tabela

Usaremos como variável independente u.

1. $\displaystyle\int du = u + c$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = ln(|u|) + c$
3. $\displaystyle\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
4. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{ln(a)} + c,\ a > 0$, $(a \neq 1)$
5. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + c$

Métodos de Integração

Nas próximas seções apresentaremos os métodos mais utilizados que nos permitirão determinar uma grande quantidade de integrais não imediatas. O primeiro a ser estudado se baseia na regra da cadeia.

9.3 Método de Substituição

Sejam F uma primitiva de f num intervalo I e g uma função derivável tal que $F \circ g$ esteja definida. Usando a regra da cadeia; temos, $\big(F(g(x))\big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$, então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c;$$

fazendo $u = g(x)$, tem-se $du = g'(x)\,dx$; substituindo na expressão anterior:

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c}$$

Exemplo 9.4.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$. Fazendo $u = 1 + x^2$, então $du = 2x\,dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{du}{u} = ln(|u|) + c = ln(x^2+1) + c.$$

[2] $\displaystyle\int \frac{dx}{(3\,x+7)^7}$. Fazendo $u = 3x + 7$, então $du = 3\,dx$ ou, equivalentemente, $\dfrac{du}{3} = dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{dx}{(3\,x+7)^7} = \int \frac{du}{3\,u^7} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^7} = -\frac{1}{18\,u^6} + c = -\frac{1}{18\,(3\,x+7)^6} + c.$$

[3] $\displaystyle\int \frac{ln(x)}{x}\,dx$. Fazendo $u = ln(x)$, então $du = \dfrac{dx}{x}$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{ln(x)}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\big(ln(x)\big)^2}{2} + c.$$

9.3.1 Outros Tipos de Substituições

Exemplo 9.5.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

Fazendo $u = \sqrt{x+1}$, então $x = u^2 - 1$, $dx = 2\,u\,du$ e $2\,du = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}$;

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = 2\int (u^2-1)\,du = \frac{2\,u^3}{3} - 2\,u + c = \frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1} + c.$$

[2] $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$.

Fazendo $u = 1 + \sqrt[3]{x}$, então $x = (u-1)^3$ e $dx = 3\,(u-1)^2\,du$;

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} &= \int \frac{3(u-1)^2}{\sqrt{u}}du = 3\int (u^2-2u+1)u^{-\frac{1}{2}}\,du = 6\,\Big(\frac{u^{5/2}}{5} - \frac{2\,u^{3/2}}{3} + \sqrt{u}\Big) + c\\ &= 6\,\Big(\frac{1}{5}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} + \sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\Big) + c.\end{aligned}$$

[3] $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx$.

Seja $u = \sqrt[3]{(x+3)}$; então, $x = u^3 - 3$ e $dx = 3\,u^2\,du$; $x^2 + 1 = u^6 - 6\,u^3 + 10$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx &= 3\int (u^6 - 6u^3 + 10)u\,du = 3\int (u^7 - 6u^4 + 10u)\,du = \frac{3u^8}{8} - \frac{18u^5}{5} + 15\,u^2 + c\\ &= \frac{3}{40}\,\sqrt[3]{(x+3)^2}\,(5\,x^2 - 18\,x + 101) + c.\end{aligned}$$

9.4 Método de Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis no intervalo I. Derivando o produto $f \cdot g$:

$$\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$$

ou, equivalentemente, $f(x)\,g'(x) = (f(x)\,g(x))' - f'(x)\,g(x)$. Integrando ambos os lados:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx;$$

fazendo: $u = f(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$, temos: $du = f'(x)\,dx$ e $v = g(x)$. Logo:

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

Este método de integração nos permite transformar a integração de $u\,dv$ na integração de $v\,du$. É importante saber "escolher" a substituição u e dv na integral de partida. Devemos escolher v' tal que permita determinar v. As expressões de u' e v devem ser mais simples que as de u e v', respectivamente.

Exemplo 9.6.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\displaystyle\int ln(x)\,dx$.

Façamos $u = ln(x)$ e $dv = dx$; então, $du = \dfrac{dx}{x}$ e $v = x$; logo:

$$\int ln(x)\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = x\,ln(x) - \int dx = x\,ln(x) - x + c.$$

[2] $\displaystyle\int x\,e^{2x}\,dx$.

Façamos $u = x$ e $dv = e^{2x}\,dx$; então, $du = dx$ e $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$; logo:

$$\int x\,e^{2x}\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c.$$

[3] $\displaystyle\int x^3\,e^{x^2}\,dx$.

Aqui usamos, novamente, os dois métodos:

Substituição: seja $t = x^2$; então, $dt = 2\,x\,dx$ ou $\dfrac{dt}{2} = x\,dx$;

$$\int x^3\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int t\,e^t dt.$$

Integrando por partes: fazemos $u = t$ e $dv = e^t\,dt$; então, $du = dt$ e $v = e^t$:

$$\int x^3\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int t\, e^t dt = \frac{1}{2}\int u\, dv = \frac{1}{2}\left(u\, v - \int v\, du\right) = \frac{1}{2}\left(t\, e^t - \int e^t\, dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(t\, e^t - e^t\right) = \frac{e^{x^2}}{2}\,(x^2 - 1) + c.$$

9.5 Método para Integração de Funções Racionais ou Frações Parciais

Um polinômio $P(x)$ de coeficientes reais pode ser sempre expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos. Naturalmente esta decomposição depende essencialmente do grau de $P(x)$.

[1] $P(x) = (x - a_1)\,(x - a_2)..........(x - a_n)$ ou

[2] $P(x) = (x - a)^r\,(x - b_1)........(x - b_s)$ ou

[3] $P(x) = (a\,x^2 + bx + c)\,(x - d_1)......(x - d_l)$ ou

[4] $P(x) = (a\,x^2 + bx + c)^r\,(x - d_1)......(x - d_l)$.

Exemplo 9.7.

[1] $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)\,(x - 1)$.

[2] $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2\,(x + 2)$.

[3] $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)\,(x - 1)$.

[4] $P(x) = x^8 + x^7 - 9x^6 + 3x^5 - 33x^4 + 3x^3 - 35x^2 + x - 12 = (x^2 + 1)^3\,(x - 3)\,(x + 4)$.

Seja uma função racional:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

A decomposição de uma função racional em frações mais simples, depende do modo em que o polinômio $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e/ou quadráticos. Se numa função racional o grau de $P(x)$ é maior ou igual ao grau de $Q(x)$, então podemos dividir os polinômios. De fato, se $grau(P(x)) \geq grau(Q(x))$ então

$$P(x) = Q(x)\,A(x) + R(x),$$

onde $grau(R(x)) < grau(Q(x))$; então, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Logo, basta estudar o caso em que:

$$grau(P(x)) < grau(Q(x)),$$

pois, caso contrário efetuamos a divisão dos polinômios.

Caso 1: $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ se decompõe em fatores lineares distintos.

Então:

$$\boxed{Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)......(x - a_n)}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ são distintos dois a dois; então

$$\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + ... + \frac{A_n}{(x - a_n)}}$$

onde $A_1,\ A_2,\ ....A_n$ são constantes a determinar.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = A_1 \int \frac{dx}{(x - a_1)} + A_2 \int \frac{dx}{(x - a_2)} + ... + A_n \int \frac{dx}{(x - a_n)}.$$

Calculemos $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x - a_i)}$.

Fazendo $u = x - a_i$; então, $I = \displaystyle\int \frac{du}{u} = ln(|u|) + c = ln(|x - a_i|) + c$; logo:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = A_1\,ln(|x - a_1|) + A_2\,ln(|x - a_2|) + ... + A_n\,ln(|x - a_n|) + c}$$

onde $A_1,\ A_2,\ ....A_n$ são as constantes a determinar.

Exemplo 9.8.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\mathbf{I} = \displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - x - 22}{x^2 + 3\,x - 10}\,dx.$

Observe que $grau(P(x)) > grau(Q(x))$. Dividindo os polinômios:

$$\frac{x^3 + 5x^2 - x - 22}{x^2 + 3\,x - 10} = (x + 2) + \frac{3\,x - 2}{x^2 + 3\,x - 10}.$$

A seguir, aplicamos o método à última parcela da direita:

$$\mathbf{I} = \int (x + 2)\,dx + \int \frac{3\,x - 2}{x^2 + 3\,x - 10}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2\,x + \int \frac{3\,x - 2}{x^2 + 3\,x - 10}\,dx.$$

Calculemos $\displaystyle\int \frac{3\,x - 2}{x^2 + 3\,x - 10}\,dx$. Fatorando: $x^2 + 3\,x - 10 = (x + 5)\,(x - 2)$; temos:

$$\frac{3\,x - 2}{x^2 + 3\,x - 10} = \frac{A_1}{x + 5} + \frac{A_2}{x - 2} = \frac{A_1\,(x - 2) + A_2\,(x + 5)}{x^2 + 3\,x - 10}.$$

Comparando os numeradores: $3x - 2 = A_1(x - 2) + A_2(x + 5)$. As raízes do polinômio $Q(x)$ são $x = 2$ e $x = -5$; agora substituimos cada raiz na última expressão. Se $x = 2$ teremos $4 = 7\,A_2$ e $A_2 = \dfrac{4}{7}$. Se $x = -5$, então $-17 = -7\,A_1$ e $A_1 = \dfrac{17}{7}$. Logo, podemos decompor a fração inicial em:

$$\frac{3\,x-2}{x^2+3\,x-10}=\frac{17}{7\,(x+5)}+\frac{4}{7\,(x-2)}.$$

Então, pelo Caso 1: $\displaystyle\int \frac{3\,x-2}{x^2+3\,x-10}\,dx=\frac{17}{7}\,ln(|x+5|)+\frac{4}{7}\,ln(|x-2|)$. A integral procurada é:

$$\mathbf{I}=\frac{x^2}{2}+2\,x+\frac{17}{7}\,ln(|x+5|)+\frac{4}{7}\,ln(|x-2|)+c.$$

[2] $\displaystyle\mathbf{I}=\int \frac{5x^3-6x^2-68x-16}{x^3-2x^2-8x}\,dx.$

Note que $grau(P(x))=grau(Q(x))$. Dividindo os polinômios:

$$5\,x^3-6\,x^2-68\,x-16=5\,(x^3-2\,x^2-8\,x)+(4\,x^2-28\,x-16).$$

Então: $\displaystyle\frac{5\,x^3-6\,x^2-68\,x-16}{x^3-2\,x^2-8\,x}=5+\frac{4\,x^2-28\,x-16}{x^3-2\,x^2-8\,x}.$

$$\mathbf{I}=\int 5\,dx+\int \frac{4\,x^2-28\,x-16}{x^3-2\,x^2-8\,x}\,dx=5\,x+\int \frac{4\,x^2-28\,x-16}{x^3-2\,x^2-8\,x}\,dx.$$

Aplicando o método à última parcela da direita, calculemos

$$\mathbf{II}=\int \frac{4x^2-28x-16}{x^3-2x^2-8x}\,dx.$$

Primeiro observemos que $x^3-2\,x^2-8\,x=x\,(x-4)\,(x+2)$:

$$\frac{4\,x^2-28\,x-16}{x^3-2\,x^2-8\,x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-4}+\frac{A_3}{x+2}=\frac{A_1\,(x-4)\,(x+2)+A_2\,x\,(x+2)+A_3\,x\,(x-4)}{x^3-2\,x^2-8\,x}.$$

Comparando os numeradores: $4\,x^2-28\,x-16=A_1\,(x+2)\,(x-4)+A_2\,x\,(x+2)+A_3\,x\,(x-4)$; as raízes do polinômio $Q(x)$ são $x=0$, $x=4$ e $x=-2$; agora substituimos cada raiz na última expressão.

Se $x=0$, então, $A_1=2$; se $x=4$ então, $A_2=-\dfrac{8}{3}$ e se $x=-2$, então, $A_3=\dfrac{14}{3}$. A fração inicial pode ser decomposta em:

$$\frac{4\,x^2-28\,x-16}{x^3-2\,x^2-8\,x}=\frac{2}{x}-\frac{8}{3\,(x-4)}+\frac{14}{3\,(x+2)}.$$

Pelo Caso 1, temos: $\mathbf{II}=2\,ln(|x|)-\dfrac{8}{3}\,ln(|x-4|)+\dfrac{14}{3}\,ln(|x+2|)+c$. A integral procurada é:

$$\mathbf{I}=5\,x+2\,ln(|x|)-\frac{8}{3}\,ln(|x-4|)+\frac{14}{3}\,ln(|x+2|)+c.$$

Observação 9.1.

Nos exemplos anteriores a forma de determinar os coeficientes é equivalente a resolver um sistema de equações.

Consideremos o exemplo 2:

$$4\,x^2 - 28\,x - 16 = A_1\,(x+2)\,(x-4) + A_2\,x\,(x+2) + A_3\,x\,(x-4)$$

Ordenando o segundo membro em potências de x, temos:

$$4\,x^2 - 28\,x - 16 = (A_1 + A_2 + A_3)\,x^2 + (-2\,A_1 + 2\,A_2 - 4\,A_3)\,x - 8\,A_1.$$

Comparando os polinômios e sabendo que dois polinômios são iguais se e somente se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais, temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 & = 4 \\ 2\,A_1 - 2\,A_2 + 4\,A_3 & = 28 \\ 8\,A_1 & = 16, \end{cases}$$

que tem como solução: $A_1 = 2$, $A_2 = -\dfrac{8}{3}$ e $A_3 = \frac{14}{3}$.

[3] $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2}$, $a \neq 0$.

$grau(P(u)) < grau(Q(u))$; e $u^2 - a^2 = (u-a)\,(u+a)$; aplicando o método:

$$\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{A_1}{u-a} + \frac{A_2}{u+a} = \frac{A_1(u+a) + A_2(u-a)}{u^2 - a^2}.$$

Comparando os numeradores: $1 = A_1\,(u+a) + A_2\,(u-a)$; as raízes do polinômio $Q(u)$ são $u = a$ e $u = -a$; agora substituimos cada raiz na última expressão. Se $u = a$, então, $A_1 = \dfrac{1}{2a}$ e se $u = -a$, então, $A_2 = -\dfrac{1}{2a}$. A fração inicial pode ser decomposta em:

$$\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2\,a\,(u-a)} - \frac{1}{2\,a\,(u+a)}.$$

Pelo Caso 1, temos:

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2\,a}\,\big(ln(|u-a|) - ln(|u+a|)\big) + c = \frac{1}{2\,a}\,ln\Big(\Big|\frac{u-a}{u+a}\Big|\Big) + c}$$

Aplicamos esta última fórmula para completamento de quadrados.

Exemplo 9.9.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x}$.

Como $x^2-4x=(x-2)^2-4$: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x}=\int\frac{dx}{(x-2)^2-4}$. Fazendo $u=x-2$, temos $du=dx$. Substituindo:

$$\int\frac{dx}{x^2-4x}=\int\frac{du}{u^2-4}=\frac{1}{4}\,ln(|\frac{u-2}{u+2}|)+c=\frac{1}{4}\,ln(|\frac{x-4}{x}|)+c,$$

onde as últimas igualdades são obtidas pela fórmula anterior.

[2] $\displaystyle\int\frac{dx}{5-x^2-4x}$.

Completando os quadrados $5-x^2-4x=9-(x+2)^2$ e fazendo $u=x+2$, temos $du=dx$. Substituindo:

$$\int\frac{dx}{5-x^2-4x}=-\int\frac{du}{u^2-9}=-\frac{1}{6}\,ln(|\frac{u-3}{u+3}|)+c=-\frac{1}{6}\,ln(|\frac{x-1}{x+5}|)+c,$$

onde as últimas igualdades são obtidas pela fórmula anterior.

Caso 2: $\mathbf{Q(x)}$ se decompõe em fatores lineares, alguns deles repetidos.

Seja $x-a_i$ o fator linear de $Q(x)$ de multiplicidade r e r a maior potência da fatoração. Então, a cada fator linear repetido associamos uma expressão do tipo:

$$\boxed{\frac{B_1}{(x-a_i)}+\frac{B_2}{(x-a_i)^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{B_r}{(x-a_i)^r}}$$

onde $B_1,\,B_2,\,\ldots\ldots.B_r$ são constantes a determinar. Em tal caso, integrando esta expressão obtemos:

$$\boxed{B_1\,ln(|x-a_i|)-\frac{B_2}{x-a_i}+\ldots\ldots+\frac{B_r}{(1-r)(x-a_i)^{r-1}}}$$

Os fatores lineares não repetidos são tratados como no caso 1.

Exemplo 9.10.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\displaystyle\int\frac{3\,x^2+4\,x+2}{x^3+2\,x^2+x}\,dx$.

Como $grau(P(x))<grau(Q(x))$ e $x^3+2\,x^2+x=x\,(x+1)^2$. O fator $(x+1)$ tem multiplicidade 2 e o fator x é como no caso 1.

$$\frac{3\,x^2+4\,x+2}{x^3+2\,x^2+x}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Comparando os numeradores:

$$3\,x^2+4\,x+2=A_1\,(x+1)^2+B_1\,x\,(x+1)+B_2\,x.$$

As raízes do polinômio $Q(x)$ são: $x=0$ e $x=-1$; agora, substituimos cada raiz na última expressão. Se $x=0$, então $A_1=2$ e se $x=-1$, então $B_2=-1$. Falta determinar B_1. Para calcular o valor da constante B_1, formamos o sistema de equações, obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios.

$$3\,x^2+4\,x+2=(A_1+B_1)\,x^2+(2A_1+B_2+B_1)\,x+A_1;$$

então:

$$\begin{cases} A_1+B_1 & =3\\ 2A_1+B_2+B_1 & =4\\ A_1 & =2\end{cases}$$

Como sabemos os valores de A_1 e B_2 obtemos, facilmente, $B_1=1$; então:

$$\frac{3\,x^2+4\,x+2}{x^3+2\,x^2+x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2};$$

logo:

$$\int\frac{3\,x^2+4\,x+2}{x^3+2\,x^2+x}\,dx=ln\big(|x^3+x^2|\big)+\frac{1}{x+1}+c.$$

[2] $\displaystyle\int\frac{x^3+3\,x-1}{x^4-4\,x^2}\,dx.$

Como $grau(P(x))<grau(Q(x))$; $x^4-4\,x^2=x^2\,(x-2)\,(x+2)$. O fator x tem multiplicidade 2 e os fatores $x-2,\ x+2$ são como no caso 1.

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}.$$

Comparando os numeradores:

$$x^3+3\,x-1=A_1\,x^2\,(x+2)+A_2\,x^2\,(x-2)+B_1\,x\,(x+2)\,(x-2)+B_2\,(x-2)\,(x+2);$$

as raízes do polinômio $Q(x)$ são: $x=0$, $x=2$ e $x=-2$. Agora substituimos cada raiz na última expressão. Se $x=0$, então $B_2=\dfrac{1}{4}$; se $x=2$, então $A_1=\dfrac{13}{16}$ e se $x=-2$, então $A_2=\dfrac{15}{16}$. Falta determinar B_1. Para calcular o valor da constante B_1, formamos o sistema de equações obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios.

$$x^3+3\,x-1=(A_1+A_2+B_1)\,x^3+(2\,A_1-2\,A_2+B_2)\,x^2+....;$$

note que o coeficiente da potência cúbica nos dá o valor de B_1. De fato, sendo $A_1+A_2+B_1=1$, então $B_1=-\dfrac{3}{4}$.

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4-4\,x^2}=\frac{13}{16\,(x-2)}+\frac{15}{16\,(x+2)}-\frac{3}{4\,x}+\frac{1}{4\,x^2};$$

logo:

$$\int\frac{x^3+3\,x-1}{x^4-4\,x^2}\,dx=\frac{13}{16}\,ln\big(|x-2|\big)+\frac{15}{16}\,ln\big(|x+2|\big)-\frac{3}{4}\,ln\big(|x|\big)-\frac{1}{4\,x}+c.$$

Caso 3: Q(x) se decompõe em fatores lineares e fatores quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem

A cada fator quadrático $ax^2 + bx + c$ de $Q(x)$ associamos uma expressão do tipo:

$$\boxed{\frac{Cx + D}{a\,x^2 + b\,x + c}}$$

onde $C,\ D$ são constantes a determinar. Os fatores lineares são tratados como no caso 1 e 2.

Exemplo 9.11.

Calcule as seguintes integrais:

[1] Calcule $\mathbf{I} = \displaystyle\int \frac{8\,x^2 + 3\,x + 20}{x^3 + x^2 + 4\,x + 4}\,dx$.

Primeiramente observamos que $grau(P(x)) < grau(Q(x))$. Fatorando o polinômio:

$$x^3 + x^2 + 4\,x + 4 = \ = (x + 1)\,(x^2 + 4).$$

O único fator quadrático irredutível é $x^2 + 4$; o fator $x + 1$ é como no caso 1.

$$\frac{8x^2 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Comparando os numeradores:

$$8\,x^2 + 3\,x + 20 = A_1\,(x^2 + 4) + (Cx + D)\,(x + 1) = (A_1 + C)\,x^2 + (C + D)\,x + 4\,A_1 + D.$$

A raiz real do polinômio $Q(x)$ é $x = -1$; agora substituimos esta raiz na última expressão. Se $x = -1$, então $A_1 = 5$. Formamos o sistema de equações, obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios: $A_1 + C = 8$, logo $C = 3$ e $C + D = 3$ implica em $D = 0$.

$$\frac{8\,x^2 + 3\,x + 20}{x^3 + x^2 + 4\,x + 4} = \frac{5}{x + 1} + \frac{3x}{x^2 + 4}.$$

Portanto:

$$\mathbf{I} = 5\,ln(|x + 1|) + 3\int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx = ln(|(x + 1)^5\,\sqrt{(x^2 + 4)^3}|) + c,$$

onde a última integral é resolvida usando substituição simples.

9.6 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais usando a tabela e, em seguida, derive seus resultados para conferir as respostas:

(a) $\int x(x+3)(x+1)\,dx$

(b) $\int (3x^2+5)^3\,dx$

(c) $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}dx$

(d) $\int (x^{\frac{2}{3}}+1)^2\,dx$

(e) $\int \sqrt{x}(x-\sqrt{x}+1)dx$

(f) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^{\frac{2}{3}}}dx$

(g) $\int \frac{(x^3-x^2)^2}{\sqrt{x}}dx$

(h) $\int \sqrt{x}(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2\,dx$

(i) $\int 10^x\,dx$

(j) $\int \frac{e^x+4}{e^x}\,dx$

(k) $\int 5e^{ax}\,dx$

(l) $\int (9t^2 - \frac{1}{\sqrt{t^3}})\,dt$

(m) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3})\,dx$

(n) $\int x^3\,\sqrt[4]{x}\,dx$

(o) $\int \frac{(x^5+2x^2-1)dx}{x^4}$

2. Calcule as seguintes integrais usando o método de substituição:

(a) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}\,dx$

(b) $\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

(c) $\int \sqrt{x+5}\,dx$

(d) $\int \frac{dy}{\sqrt{b-ay}}$

(e) $\int y(b-ay^2)\,dy$

(f) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$

(g) $\int \frac{6x}{(5-3x^2)^2}\,dx$

(h) $\int \frac{dy}{(b+ay)^3}$

(i) $\int x^3\sqrt{a+bx^4}\,dx$

(j) $\int \frac{ln(x)+2}{x}\,dx$

(k) $\int \frac{1}{x(ln(x))^2}\,dx$

(l) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

(m) $\int x^2e^{x^3}\,dx$

(n) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+16}\,dx$

(o) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2}\,dx$

(p) $\int \frac{dx}{x\,ln(x)}$

3. Calcule as seguintes integrais, usando as substituições dadas:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$, use $x=-ln(t)$

(b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$, use $t=\sqrt{x+1}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, use $z=1+\sqrt{x}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}}}$, use $z=1+\sqrt[3]{x}$

4. Calcule as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

(a) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int (x-1)\,e^{-x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int x^4\,e^x\,dx$

(g) $\displaystyle\int (x^5-x^3+x)\,e^{-x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int x^4 e^{-x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int ln^3(x)\,dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,ln(x)\,dx$

(k) $\displaystyle\int x\,\sqrt{x+1}\,dx$

5. Calcule a seguinte integral usando primeiramente o método de substituição e depois, integração por partes:

(a) $\displaystyle\int x^5\,e^{x^2}\,dx$

6. Calcule as seguintes integrais, usando frações parciais:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+8}$

(b) $\displaystyle\int \frac{4dx}{x^4-1}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5+4x^3}{(x^2+2)^3}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2}$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)}$

(i) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(1+x^2)}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$

(m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

(n) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$

(p) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 - 1}\, dx$

7. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int x\, 5^x\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^5}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2\,x}{x^3 + 3\,x^2 + 4}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x\,(x^2+1)}\, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\,x^2 + 12\,x - 7}$

Capítulo 10

INTEGRAIS INDEFINIDAS E ECONOMIA

10.1 Determinação de Funções

A seguir apresentaremos o método para determinar uma função conhecendo apenas sua derivada.

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. Conhecendo sua derivada $f'(x)$, por integração determina-se uma família de funções:

$$y = f(x) + c,$$

onde c é uma constante arbitrária.

Exemplo 10.1.

[1] Se o custo marginal de um empresa para produzir x unidades de certo produto é dado por:

$$CMg(x) = 20 - x + 0.01\,x^3$$

e se o custo para produzir uma unidade do produto é de 100 reais, determine o custo para produzir 120 unidades.

Observe que:

$$C(x) = \int CMg(x)\,dx + c = \int \big[20 - x + \frac{x^3}{100}\big]\,dx = 20\,x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{400} + c.$$

Por outro lado $C(1) = 100$, isto é $\dfrac{7801}{400} + c = 100$, então $c = \dfrac{32199}{400}$ e:

$$C(x) = 20\,x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{400} + \frac{32199}{400} \Longrightarrow C(120) = 513680.49.$$

Isto é, 513680.49 reais.

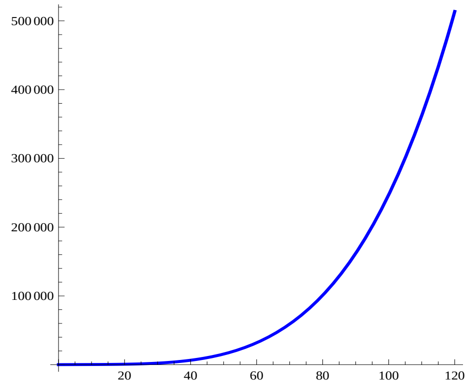


Figura 10.1: Gráfico de $C = C(x)$ do exemplo [1].

[2] Determine a função de oferta $x = f(p)$ de um certo produto, se a oferta marginal é dada por:

$$\frac{dx}{dp} = p\,\sqrt{p^2 - 25},$$

sabendo que para um preço de 13 reais o produto tem uma oferta de 600 unidades.

$$f(p) = \int \left[\frac{dx}{dp}\right] dp + c = \int p\,\sqrt{p^2 - 25}\,dp + c.$$

Fazendo $u = p^2 - 25$ temos $du = 2\,p\,dp$, logo:

$$f(p) = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du + c = \frac{(p^2 - 25)^{3/2}}{3} + c,$$

e $600 = f(13) = 576 + c$, então $c = 24$ e:

$$f(p) = \frac{(p^2 - 25)^{3/2}}{3} + 24.$$

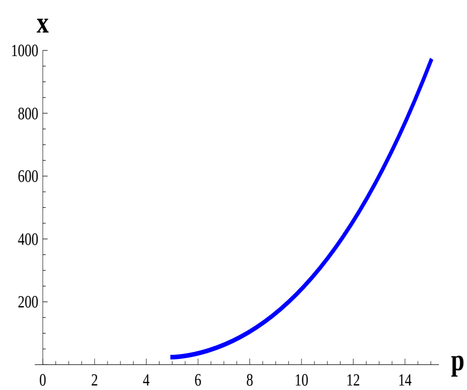


Figura 10.2: Gráfico de $x = f(p)$ do exemplo [2].

[3] A taxa de crescimento populacional de uma cidade é dada por $P'(t) = 2000\,e^{0.5t}$, t medido em anos. Se atualmente a cidade tem 100000 habitantes, qual será a sua população em 10 anos?

Integrando:

$$P(t) = \int 2000\, e^{0.5t}\, dt + c = 4000\, e^{0.5t} + c.$$

Por outro lado $P(0) = 100000$; logo, $100000 = P(0) = 4000 + c$ e $c = 96000$; logo:

$$P(t) = 4000\, e^{0.5t} + 96000$$

e $P(10) = 689653$ habitantes, aproximadamente.

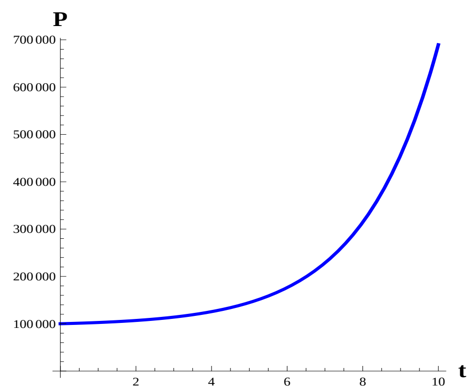


Figura 10.3: Gráfico de $P = P(t))$ do exemplo [3].

[4] A receita marginal para a venda de um produto eletrônico é dada por:

$$RMg(x) = 200 - 0.02\, x + 0.0001\, x^2 + \frac{200}{x+1},$$

onde x é o número de unidades demandadas. Determine a função da receita.

$$\begin{aligned} R(x) &= \int \left[200 - 0.02\, x + 0.0001\, x^2 + \frac{200}{x+1}\right] dx + c \\ &= 200\, x - 0.01\, x^2 + 0.0000333\, x^3 + 200\, ln(x+1) + c. \end{aligned}$$

Como $R(0) = 0$, então $c = 0$ e:

$$R(x) = 200\, x - 0.01\, x^2 + 0.0000333\, x^3 + 200\ ln(x+1).$$

10.2 Modelos

Nos seguintes parágrafos apresentaremos alguns modelos elementares utilizados em diversas Ciências. A forma de estudar estes modelos passa pela determinação de primitivas para certas funções.

Suponha que temos a seguinte expressão que relaciona derivadas, funções da variável independente e da variável dependente:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y), \tag{10.1}$$

onde g e h são funções dadas. Reescrevemos (10.1):

$$\frac{1}{h(y)}\,\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Integramos, em relação a x, ambos os lados da expressão anterior:

$$\int \left[\frac{1}{h(y)}\,\frac{dy}{dx}\right] dx = \int g(x)\,dx + c \Longrightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + c.$$

Desta última expressão podemos determinar a função incógnita $y = f(x)$. A expressão (10.1) é chamada equação diferencial ordinária de variáveis separáveis.

Exemplo 10.2.

[1] Determine o valor da constante r tal que:

$$\varepsilon_p(x) = -r.$$

Lembremos que:

$$\varepsilon_p(x) = \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} \Longrightarrow \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} = -r \Longrightarrow \frac{1}{x}\,\frac{dx}{dp} = -\frac{r}{p}.$$

Segundo o roteiro anterior, temos que:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{r}{p}\,dp + c_1 \Longrightarrow ln(|x|) = -r\,ln(|p|) + ln(c);$$

onde $c_1 = ln(c)$; como $p \geq 0$ e $x \geq 0$ temos que:

$$x(p) = \frac{c}{p^r}.$$

Como já sabíamos, obtivemos a demanda racional.

[2] Se a elasticidade da demanda é dada por:

$$\varepsilon_p(x) = -\frac{2\,p^2}{p^2+1}$$

e se para $p = 1$, temos $x = 4$, determine a função da demanda.

Como antes, temos:

$$\varepsilon_p = \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} \Longrightarrow \frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} = -\frac{2\,p^2}{p^2+1} \Longrightarrow \frac{1}{x}\,\frac{dx}{dp} = -\frac{2\,p}{p^2+1}.$$

Então:

$$\ln(x) = -\int \frac{2\,p}{p^2+1}\,dp + c_1 \Longrightarrow \ln(x) = -ln(p^2+1) + ln(c).$$

onde $c_1 = ln(c)$, logo:

$$x(p) = \frac{c}{p^2+1}.$$

Por outro lado, $x(1) = 4$, temos que $4 = \dfrac{c}{2}$; logo $c = 8$ e:

$$x(p) = \frac{8}{p^2+1}.$$

10.3 Modelo de Crescimento e Decrescimento Exponencial

Nos capítulos anteriores já estudamos funções que descrevem os fenômenos de crescimento e decrescimento exponencial; agora, com a ajuda da integral indefinida, estamos em condições de justificar tais definições.
Este modelo ocorre quando a taxa de variação de uma quantidade é proporcional à quantidade presente.

O modelo ou lei de crescimento exponencial é dado por:

$$\frac{dN}{dt} = k\,N, \tag{10.2}$$

onde $N = N(t)$ é uma função derivável e $k \neq 0$.

Como vimos anteriormente, esta lei pode ser aplicada para modelar uma grande variedade de situações. Antes de apresentar os exemplos, determinemos $N = N(t)$. Primeiramente, reescrevemos (10.2):

$$\frac{1}{N}\,\frac{dN}{dt} = k.$$

Integrando ambos os lados, em relação a t:

$$\int \left[\frac{1}{N}\,\frac{dN}{dt}\right] dt = k\,t + c_1 \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = k\,t + c_1 \Longrightarrow ln(|N(t)|) = k\,t + c_1,$$

donde $|N(t)| = C\,e^{kt}$ e $C = e^{c_1}$. Supondo que $N(t) \geq 0$, para todo t, temos que:

$$N(t) = C\,e^{kt}.$$

Se $k > 0$ o modelo representa o crescimento exponencial e se $k < 0$ o modelo representa o decrescimento exponencial.

Exemplo 10.3.

[1] O PIB de um certo país tem uma taxa de crescimento proporcional ao PIB. Se no primeiro dia do ano em 2007 o PIB era de U$100 bilhões e no primeiro dia do ano em 2008 o PIB era de U$110 bilhões, pergunta-se:

(a) Qual é o valor esperado do PIB para 2009?

(b) Quando o PIB atingirá U$200 bilhões?

Denotemos por $P = P(t)$ o PIB do país no instante t, (em anos). Como $\dfrac{dP}{dt} = k\,P$, temos que: $P(t) = C\,e^{kt}$.

No ano inicial ($t = 0$), temos $100 = P(0) = C$, então $P(t) = 100\,e^{kt}$. No ano seguinte ($t = 1$), temos $110 = P(1) = 100\,e^{k}$, logo:

$$e^k = \frac{11}{10} \Longrightarrow k = ln(11) - ln(10) \cong 0.09531.$$

Logo:

$$P(t) = 100\, e^{0.09531t}.$$

(a) Calculamos $P(2) = 121$ bilhões de dólares.

(b) Devemos obter t, tal que $P(t) = 200$. Isto é, $100\, e^{0.09531t} = 200$; logo $e^{0.09531t} = 2$ e:

$$t = \frac{ln(2)}{0.09531} \cong 7 \text{ anos}.$$

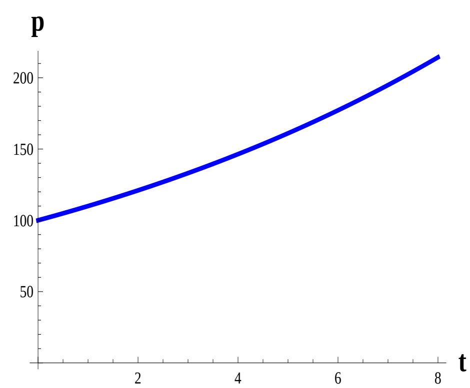


Figura 10.4: Gráfico de $P(t) = 100\, e^{0.09531t}$.

[2] Uma rede de supermercados promove uma grande promoção de um certo produto. Durante o período de promoção a quantidade diária de produtos vendidos era de 30000 unidades. Após o término da promoção, a venda do produto decai a uma taxa proporcional às vendas diárias. Se na primeira semana sem promoção caiu a 18000 unidades diárias, pede-se:

(a) Determine o volume de vendas passadas 2 semanas da promoção.

(b) Quando a venda atingirá a quantidade de 5000 unidades diárias?

Denotemos por $V = V(t)$ as vendas no instante t, (em dias). Como $\frac{dV}{dt} = -k\, V$, temos que: $V(t) = C\, e^{-kt}$, onde $k > 0$.

Durante a promoção ($t = 0$), temos $30000 = V(0) = C$, então $V(t) = 30000\, e^{-kt}$. Após uma semana ($t = 7$), temos $18000 = V(7) = 30000\, e^{-7k}$, logo:

$$e^{-7k} = \frac{3}{5} \Longrightarrow k = -\frac{ln(3) - ln(5)}{7} \cong 0.07298.$$

Logo:

$$V(t) = 30000\, e^{-0.07298t}.$$

(a) Calculamos $V(14) \cong 10799.25$.

(b) Devemos obter t, tal que $V(t) = 5000$. Isto é, $30000\, e^{-0.07298t} = 5000$, logo $e^{-0.07298t} = \frac{1}{6}$ e:

$$t = \frac{ln(6)}{0.07298} \cong 24 \text{ dias}.$$

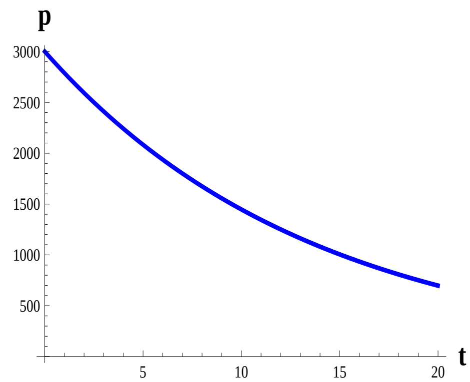


Figura 10.5: Gráfico de $P(t) = 30000\, e^{-0.07298t}$.

10.3.1 Modelo de Gompertz

Este modelo é utilizado em Ciências Atuariais como modelo de envelhecimento e morte numa população.

O modelo de Gompertz é dado por:

$$\frac{dN}{dt} = k\,N\, \ln\big(\frac{m}{N}\big), \tag{10.3}$$

onde $N = N(t)$ é uma função derivável e $k,\ m \ngtr 0$.

Fazendo a mudança $u(t) = \ln\big(\frac{m}{N}\big)$ na equação (10.3), obtemos o modelo linear:

$$u' = -k\,u \Longrightarrow u = c\,e^{-kt} \Longrightarrow \ln\big(\frac{m}{N}\big) = c\,e^{-kt} \Longrightarrow \frac{m}{N} = e^{c\,e^{-kt}}.$$

Logo, a solução de (10.3) é:

$$N(t) = m\,e^{-c\,e^{-kt}}.$$

Se a população inicial $N(0) = n_0$, temos que $n_0 = m\,e^{-c}$, logo:

$$c = ln\big(\frac{m}{n_0}\big).$$

Note que:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = m.$$

Exemplo 10.4.

Uma população tem um crescimento de $k = 0.71$ por ano, $m = 80.5$ milhões e $n_0 = 0.25\,m$. Aplicar o modelo de Gompertz para encontrar a população após dois anos.

Como $N(0) = 80.5$ e $c = 5.0814$:

$$N(t) = 80.5\,e^{-5.0814\,e^{-0.71t}}$$

Então, $N(24) = 80.499$.

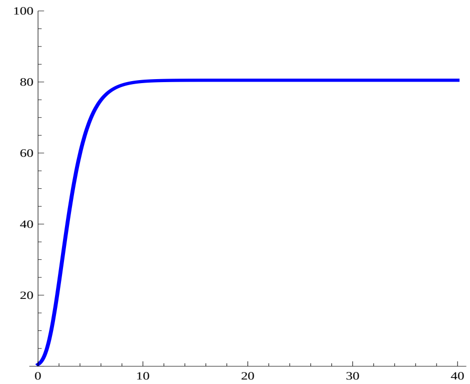


Figura 10.6: Gráfico de $N(t)$.

10.4 Modelo de Crescimento Logístico

O modelo de crescimento exponencial não serve se é utilizado a longo prazo, pois, em geral, o crescimento de uma economia ou de uma população sempre é limitado por diversos fatores. Uma economia ou uma população não pode crescer indefinidamente. A função logística mostra-se bastante exata na predição de certos padrões de crescimento num espaço limitado.

O modelo de crescimento logístico ou inibido é dado por:

$$\frac{dN}{dt} = k\, N\, (N_1 - N), \tag{10.4}$$

onde $N = N(t)$ é uma função derivável e $k \neq 0$.

Por exemplo, considere uma criação de trutas com população inicial N_0 numa lagoa sem predadores. Se a população $N = N(t)$ é pequena, ela tende a crescer a uma taxa proporcional a si mesma; mas, quando ela se torna grande, há uma competição crescente por alimento e espaço e N cresce a uma taxa menor. Estudos ecológicos mostram que a lagoa pode suportar uma quantidade máxima de N_1 indivíduos, se a taxa de crescimento da população N é conjuntamente proporcional a N e a $N_1 - N$.
Para determinar N, primeiramente reescrevemos (10.4):

$$\left[\frac{1}{N\,(N_1 - N)}\right] \frac{dN}{dt} = k;$$

integramos em relação a t, aplicando o método de frações parciais:

$$\int \frac{dN}{N\,(N_1 - N)} = k \int dt + c \Longrightarrow \frac{1}{N_1}\left[\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{N_1 - N}\right] = k\,t + c_1;$$

e:

$$ln\Big(\frac{N}{N_1 - N}\Big) = k\,t\,N_1 + C, \quad \text{onde} \quad C = N_1\,c_1.$$

Fazendo $N(0) = N_0$ e $C = ln\big(\frac{N_0}{N_1 - N_0}\big)$; então,

$$ln\Big(\frac{N}{N_1 - N}\Big) = N_1\,k\,t + ln\Big(\frac{N_0}{N_1 - N_0}\Big);$$

logo, $\dfrac{N}{N_1 - N} = \dfrac{N_0\, e^{N_1 k t}}{N_1 - N_0}$; donde:

$$N(t) = \frac{N_0 N_1}{N_0 + (N_1 - N_0)\, e^{-N_1 k t}},$$

que é uma função logística de população limite N_1. De fato:

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = N_1.$$

Exemplo 10.5.

[1] Um portador de malária retorna para sua comunidade isolada de 1000 habitantes. Supondo que a taxa segundo a qual a malária se espalha é proporcional não somente ao número N de habitantes infectados, mas também ao número de habitantes não infectados da comunidade, determine o número de infectados após 8 dias, se no quarto dia o número de infectados era de 50 pessoas.

Seja $N = N(t)$ o número de infectados no instante t. O número inicial de infectados é $N_0 = 1$ e o total $N_1 = 1000$, então:

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999\, e^{-1000kt}}.$$

Como $N(4) = 50$, temos que $-4000\, k = log\big(\dfrac{19}{999}\big) \simeq -3.9623$, donde $-1000\, k = -0.99058$, logo:

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999\, e^{-0.99058t}}.$$

Calculamos $N(8) \cong 734$ habitantes

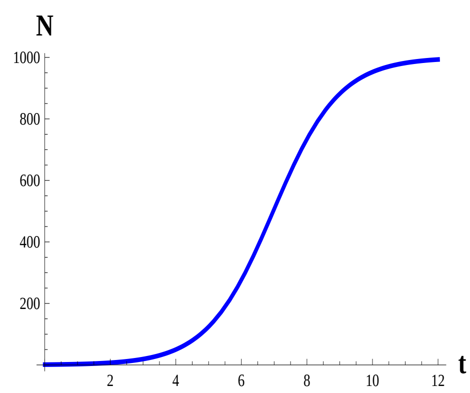


Figura 10.7: Gráfico de $N(t)$.

[2] O número N de habitantes de uma cidade de 1200000 habitantes, exposta a uma forte companha de marketing é modelado pela equação logística. Inicialmente a campanha atinge 500 pessoas. Foi observado por pesquisa de opinião que após 2 dias a campanha atingiu 2000 pessoas. Determine $N = N(t)$.

Seja $N = N(t)$ o número de habitantes expostos à propaganda, no instante t. O número inicial de expostos é $N_0 = 500$ e o total $N_1 = 1200000$, então:

$$N(t) = \frac{600000000}{500 + 1199500\, e^{-1200000kt}}.$$

Como $N(2) = 2000$, temos que $-1200000\, k = \frac{1}{2}\, log\big(\frac{599}{2399}\big) \cong -0.693773$, logo:

$$N(t) = \frac{600000000}{500 + 1199500\, e^{-0.693773\, t}}.$$

10.5 Modelo de Resfriamento de Newton

Este modelo foi proposto por Newton para o estudo do calor em corpos. Se a taxa de variação de uma quantidade varia a uma taxa proporcional à diferença entre um número fixo e a quantidade, temos:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(A - T(t)), \tag{10.5}$$

onde $T = T(t)$ é uma função derivável e $k > 0$. No caso em que $T = T(t)$ é a temperatura de um corpo e A é a temperatura ambiente temos a lei de resfriamento de Newton. Nós utilizaremos este modelo como modelo de aprendizado. Primeiramente, reescrevemos (10.5):

$$\left[\frac{1}{A - T}\right] \frac{dT}{dt} = k.$$

Integrando ambos os lados, em relação a t:

$$\int \left[\left[\frac{1}{A - T}\right] \frac{dT}{dt}\right] dt = k\,t + c_1 \Longrightarrow \int \frac{dT}{A - T} = k\,t + c_1 \Longrightarrow ln(|A - T|) = -k\,t + c_2,$$

como $A - T \geq 0$, para todo t, temos que:

$$T(t) = A - C\, e^{-kt}.$$

O gráfico de $T = T(t)$ é dito curva de aprendizagem. Note que:

$$\lim_{t \to +\infty} T(t) = A.$$

Exemplo 10.6.

[1] Uma fábrica de carros deseja implementar uma nova linha de montagem. Segundo estudos feitos, se T unidades forem completadas por dia após t dias na linha de montagem, então:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(90 - T).$$

No primeiro dia de trabalho são completadas 60 unidades e, após 5 dias de trabalho são completadas 75 unidades.

(a) Quantas unidades diárias são completadas após 9 dias de trabalho?

(b) Que acontece após 30 dias?

Sabemos que a solução é:

$$T(t) = 90 - C\, e^{-kt}.$$

(a) Primeiro observamos que $T(0) = 60$, isto é $C = 30$; logo:

$$T(t) = 90 - 30\, e^{-kt}.$$

Após 5 dias $75 = T(5) = 90 - 30\, e^{-5k}$, então $k = 0.1386$ e:

$$T(t) = 90 - 30\, e^{-0.1386t}.$$

Logo, $T(9) \cong 81$ carros.

(b) Observe que $T(30) = 89.5308$, por outro lado, $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 90$; isto é, após um mês a linha atingiu seu potencial total.

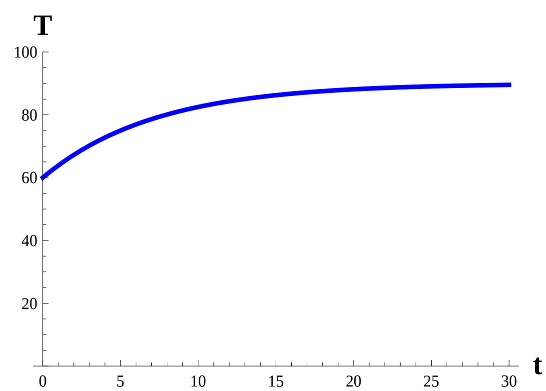


Figura 10.8: Gráfico de $T(t)$.

[2] **Modelo de Evans**: Se a taxa de variação do preço P de um commodity é proporcional à diferença da demanda D e da oferta S de commodity no mercado, em cada instante, temos:

$$\frac{dP}{dt} = k(D - S),$$

$k > 0$.

No caso em que S eD são funções lineares do preço, temos o modelo anterior.

De fato, consideremos as funções lineares $D = \alpha_1 - \alpha_2\, p$ e $S = \alpha_3 - \alpha_4\, p$ tais que $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$. Logo:

$$D - S = (\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_4)\, p,$$

e:

$$\frac{dP}{dt} = k\big[(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_4)\, p\big].$$

10.6 Exercícios

1. Um produtor descobriu que seu custo marginal é dado por:

$$CM_g(x) = 6\,x + 1 \quad (u.m.)$$

   por unidade, quando x unidades são produzidas. O custo para produzir a primeira unidade é de 130 u. m. Determine o custo para produzir 10 unidades.

2. Uma empresa tem lucro marginal:

$$LM_g(x) = 100 - 2\,x \quad (u.m.)$$

   por unidade quando x unidades são produzidas. Se o lucro da empresa é de 700 u. m. quando 10 unidades são produzidas, qual é o lucro máximo da empresa?

3. O consumo para um determinado país é denotado por $c(x)$, onde x é a receita nacional líquida. A propensão marginal ao consumo é:

$$c'(x) = 0.9 + 0.3\,\sqrt{x}.$$

   Supondo que o consumo seja 10 bilhões de u. m. quando $x = 0$, determine $c(x)$.

4. Numa fábrica o custo marginal é $CM_g(x) = 0.08\,x + 4$, quando a produção é de x unidades.

   (a) Expresse a função custo, sabendo que o custo para produzir 10 unidades é de 80.00 u. m.

   (b) Determine o custo para a produção de 20 unidades.

5. Se a receita marginal de uma empresa é:

$$RM_g(x) = 50 - 2\,x \quad (u.m.)$$

   e o custo marginal é 10 u.m. Determine o valor x que maximiza o lucro.

6. Em alguns estudos, a degradação ambiental produzida por detritos tóxicos é modelada pela equação de Haldane:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{a\,s}{b + c\,s + s^2},$$

   onde $a,\, b,\, c > 0$ e $S = S(t)$ é a concentração do substrato (a substância do resíduo na qual as bactérias agem). Determine $S = S(t)$.

Capítulo 11

INTEGRAÇÃO DEFINIDA

11.1 Intodução

Neste capítulo introduziremos a noção de integral definida, cuja origem foi a formalização matemática da idéia do cálculo de áreas de regiões planas delimitadas pelos gráficos de funções. Observemos que somente "sabemos"calcular, efetivamente, a área de regiões limitadas por segmentos de retas como retângulos, triângulos ou composições destes. Como motivação, começaremos com um problema.

Problema: Sejam f, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.. Calcule a área da região plana R delimitada pelo gráfico das funções contínuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$.

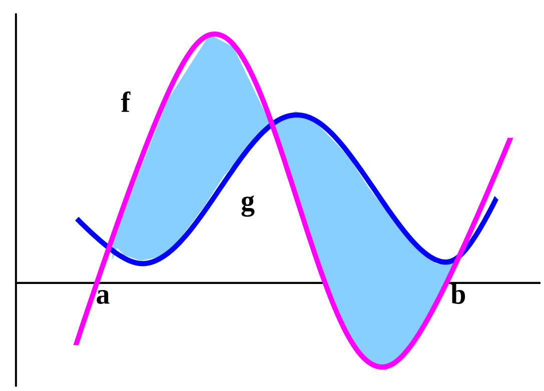


Figura 11.1: Área da região dada no problema.

Solução do Problema: O subconjunto $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset [a,b]$ é chamado de **partição de ordem** n **do intervalo** $[a,b]$ se:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Subdividamos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos da partição P. Formemos os seguintes subintervalos:

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n].$$

Denotemos qualquer destes subintervalos por $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n.
Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n. Note que estes subintervalos não tem necessariamente o mesmo comprimento. Para cada i, variando de 1 até n, consideremos o retângulo R_i limitado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = f(c_i)$ e $y = g(c_i)$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

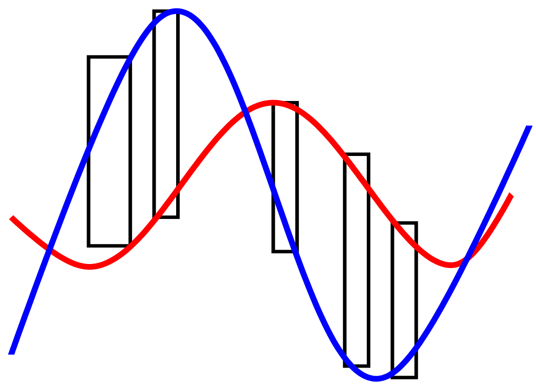


Figura 11.2: Subdivisão da região.

Obtemos assim n retângulos R_i. É intuitivo que a soma das áreas dos n retângulos é uma "aproximação"da área da região R. Se n é muito grande ou, equivalentemente, se n cresce, então Δx_i ou seja a base do retângulo correspondente é muito pequena e a soma das áreas dos n retângulos aproxima-se cada vez mais da área da região R.

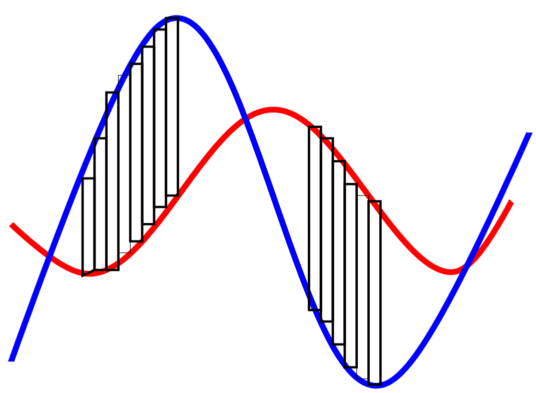


Figura 11.3: Subdivisão da região.

A área de cada R_i é $|f(c_i) - g(c_i)| \times \Delta x_i$ (base por altura); a soma S_n das áreas dos n retângulos é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |f(c_i) - g(c_i)|\, \Delta x_i.$$

S_n é chamada soma de Riemann da função $|f - g|$. Denotemos por $|\Delta x_i|$ o maior dos Δx_i. A área de uma região plana R delimitada pelo gráfico das funções contínuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ definidas no intervalo $[a, b]$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é:

$$A(R) = \lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(c_i) - g(c_i)| \, \Delta x_i.$$

É possível provar, com rigor matemático que este limite sempre existe e é igual a área de R; mais ainda, este limite não depende da escolha da partição do intervalo $[a, b]$ ou da escolha dos pontos c_i. Para mais detalhes veja a bibliografia intermediária e avançada.

Exemplo 11.1.

[1] Calcule a área da região limitada pelo gráfico da função $y = f(x) = x^2$, o eixo dos x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

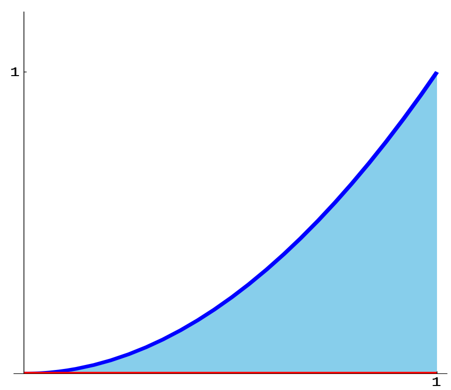


Figura 11.4: Área limitada por $y = f(x) = x^2$.

O intervalo de integração é $[0, 1]$, $f(x) = x^2$ e $g(x) = 0$; então $h(x) = |f(x) - g(x)| = x^2$.

a) Consideremos a seguinte partição de ordem 4 de $[0, 1]$:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{3}{4} < x_4 = 1;$$

$\Delta x_i = \dfrac{1}{4}$, para cada i. Os subintervalos são: $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$. Se escolhemos $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{4}$, $c_3 = \dfrac{1}{2}$ e $c_4 = \dfrac{3}{4}$, então, $h(c_1) = 0$, $h(c_2) = \dfrac{1}{16}$, $h(c_3) = \dfrac{1}{4}$, $h(c_4) = \dfrac{9}{16}$; logo:

$$S_4 = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{7}{32}.$$

Se escolhemos $c_1 = \dfrac{1}{4}$, $c_2 = \dfrac{1}{2}$, $c_3 = \dfrac{3}{4}$ e $c_4 = 1$:

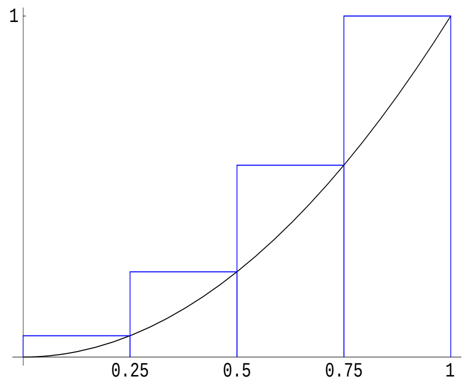


Figura 11.5: Partição da região.

$h(c_1) = \frac{1}{16}$, $h(c_2) = \frac{1}{4}$, $h(c_3) = \frac{9}{16}$, $h(c_4) = 1$; logo:

$$S_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{15}{32}.$$

É intuitivo que

$$\frac{7}{32} \leq A(R) \leq \frac{15}{32}.$$

b) Consideremos a seguinte partição de ordem n:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < x_3 = \frac{3}{n} < .... < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Se escolhemos $c_1 = \frac{1}{n}$, $c_2 = \frac{2}{n}$, $c_3 = \frac{3}{n}$,............, $c_n = \frac{n}{n}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{3^2}{n^2} + ... + \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) \\ &= \frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{6\,n^2}. \end{aligned}$$

Se escolhemos $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{n}$, $c_3 = \frac{2}{n}$,............, $c_n = \frac{n-1}{n}$:

$$S_n = \frac{1}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2) = \frac{(n-1)\,(2\,n-1)}{6\,n^2}.$$

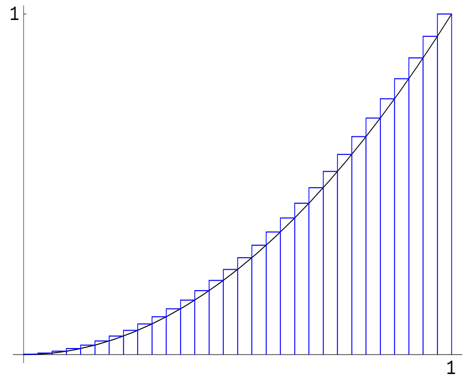


Figura 11.6: Nova partição da região.

Então,

$$\frac{(n-1)\,(2\,n-1)}{6\,n^2} \le A(R) \le \frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{6\,n^2}.$$

Por outro lado:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)\,(2\,n-1)}{6\,n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{6\,n^2} = \frac{1}{3};$$

então:

$$A(R) = \frac{1}{3}.$$

[2] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^3$, $g(x) = 9\,x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

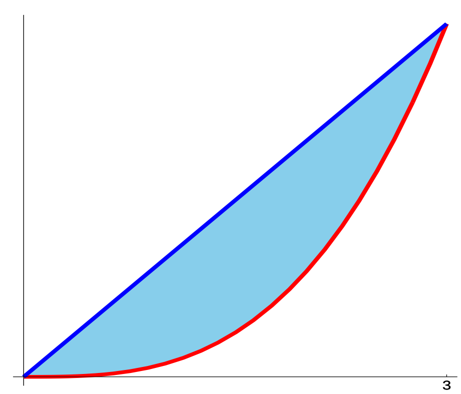


Figura 11.7: Área limitada por $f(x) = x^3$, $g(x) = 9\,x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

O intervalo de integração é $[0,3]$; então, $h(x) = |f(x) - g(x)| = 9\,x - x^3$, se $x \in \big[0,3\big]$.

a) Consideremos a seguinte partição de ordem 6 de $[0,3]$:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_4 = 2 < x_5 = \frac{5}{2} < x_6 = 3;$$

$\Delta x_i = \dfrac{1}{2}$, para cada i. Se escolhemos $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{2}$, $c_3 = 1$, $c_4 = \dfrac{3}{2}$, $c_5 = 2$ e $c_6 = \dfrac{5}{2}$, obtemos: $h(c_1) = 0$, $h(c_2) = \dfrac{35}{8}$, $h(c_3) = 8$, $h(c_4) = \dfrac{81}{8}$, $h(c_5) = 10$ e $h(c_6) = \dfrac{55}{8}$ e,

$$S_6 = \frac{1}{2}\left[\frac{35}{8} + 8 + \frac{81}{8} + 10 + \frac{55}{8}\right] = \frac{315}{16}.$$

b) Consideremos a seguinte partição de ordem n:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{3}{n} < x_2 = \frac{6}{n} < x_3 = \frac{9}{n} < \text{.................} < x_n = \frac{3\,n}{n} = 3.$$

$\Delta x_i = \dfrac{3}{n}$. Seja $c_i = \dfrac{3\,i}{n}$, para todo $i = 1,\ 2,\ .....n$.

Logo: $h(c_1) = 3^3\big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\big)$, $h(c_2) = 3^3\big(\dfrac{2}{n} - \dfrac{8}{n^3}\big)$, $h(c_3) = 3^3\big(\dfrac{3}{n} - \dfrac{27}{n^3}\big)$, $h(c_4) = 3^3\big(\dfrac{4}{n} - \dfrac{64}{n^3}\big)$.
Em geral:

$$h(c_i) = 3^3\left(\frac{i}{n} - \frac{i^3}{n^3}\right),$$

e:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h(c_i) \times \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 3^3\left(\frac{i}{n} - \frac{i^3}{n^3}\right) \times \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^4}{n^2}\left(i - \frac{i^3}{n^2}\right).$$

Lembrando que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \text{e}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4},$$

temos $S_n = \dfrac{81}{4}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$. Então, a área procurada é:

$$\begin{aligned} A(R) &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{81}{4}\big(1 - \frac{1}{n^2}\big) \\ &= \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

11.2 Definição e Cálculo da Integral Definida

Definição 11.1. *Sejam f uma função definida no intervalo $[a,b]$, P uma partição qualquer do intervalo $[a,b]$ e c_i um ponto qualquer em cada subintervalo definido pela partição. A* **integral definida de f de a até b** *é denotada por:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

e definida por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}$$

se o limite existe.

Se o limite da definição existe, é independente das escolhas feitas, como no caso da definição de área. Portanto, deve ter sempre um único valor.

Se f é **contínua e não negativa em** $[a,b]$ a definição de integral definida coincide com a definição de área da região R delimitada pelo gráfico de f, pelas retas $x=a$, $x=b$ e pelo eixo dos x $(g=0)$:

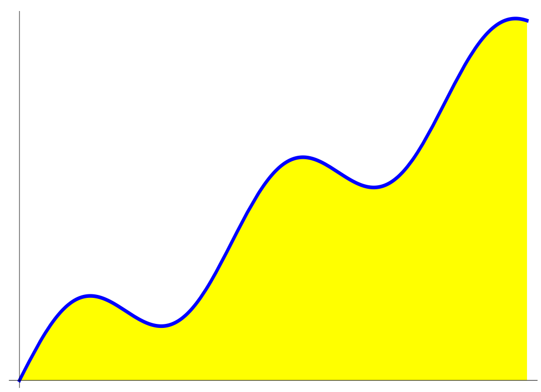


Figura 11.8: A região R.

$$\boxed{R = \{(x,y)\,/a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}}$$

Neste caso teremos:

$$\boxed{A(R) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Os números a e b são chamados limites inferior e superior de integração.

Definição 11.2. *Uma função f definida em $[a,b]$ é dita* **integrável em** $[a,b]$ *se sua integral definida existe.*

Algumas das provas deste capítulo serão omitidas, pois fogem do objetivo destas notas. Um leitor interessado pode recorrer à bibliografia indicada.

Teorema 11.1. *Se a função f é contínua em $[a,b]$, então é integrável em $[a,b]$.*

Observemos que a recíproca deste teorema é falsa. Por exemplo, considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{se} \quad x \in (1,2]. \end{cases}$$

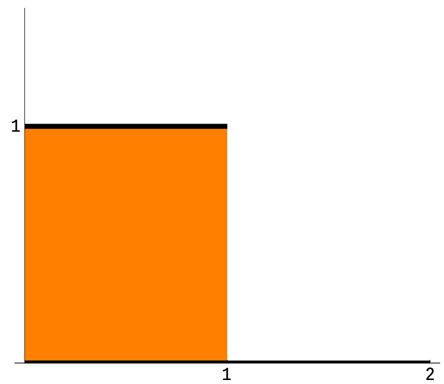


Figura 11.9: Gráfico de f.

f é descontínua, mas a região limitada pelo gráfico de f, possui área igual a 1 no intervalo $[0,1]$ e zero no intervalo $(1,2]$; logo, f é integrável.

Proposição 11.1. *Se f e g são funções integráveis em $[a,b]$, então:*

1. **Linearidade da Integral.** *$\alpha\, f + \beta\, g$ é função integrável em $[a,b]$, para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e:*

$$\boxed{\int_a^b \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx}$$

2. **Monotonicidade da Integral**. *Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a,b]$; então,*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx}$$

3. *$|f|$ é integrável e:*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx}$$

4. *Sejam $a < c < b$ e f uma função integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ respectivamente. Então f é integrável em $[a,b]$ e:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Até agora conhecemos a definição e as propriedades mais importantes da integral definida. Mostraremos, a seguir, como calculá -la.

11.3 Teorema Fundamental do Cálculo e Construção de Primitivas

Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. Definamos a função:

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Por exemplo, se $f(x)=cos(x)$, então:

$$g(x)=\int_0^x cos(t)\,dt = sen(x);$$

por outro lado observe que, $g'(x)=cos(x)=f(x)$. Este fato pode ser generalizado. É o que estabelece o seguinte teorema.

Teorema 11.2. (Fundamental do Cálculo). *Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. A função:*

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em (a,b), e:

$$\boxed{g'(x)=f(x),\ ou,\ g'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)}$$

Este resultado implica que toda função contínua possui uma primitiva. Veja o apêndice.

Existem funções integráveis que não possuem primitivas (não podem ser contínuas). Por exemplo, a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{se} \quad x=0;\end{cases}$$

f não é derivada de nenhuma função:

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt=0,\quad \text{para todo} \quad x.$$

Corolário 11.3. *Se f é uma função integrável em $[a,b]$ e admite uma primitiva $F(x)$ em $[a,b]$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

O corolário nos diz que para calcular a integral definida de uma função, basta procurar uma primitiva da função e avaliá-la nos limites de integração. A integral definida é um número real.

Notação:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Corolário 11.4. *Na hipótese do corolário anterior, temos:*

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Corolário 11.5. *Seja* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e* $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável;* I *e* J *são intervalos tais que* $\alpha(J) \subset I$*. Então:*

$$g(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

é derivável e:

$$\boxed{g'(x) = f(\alpha(x))\,\alpha'(x)}$$

Exemplo 11.2.

[1] A primitiva de $\displaystyle\int sen(x^6)\,dx$ é:

$$F(x) = \int_0^x sen(t^6)\,dt.$$

De fato, $F'(x) = sen(x^2)$.

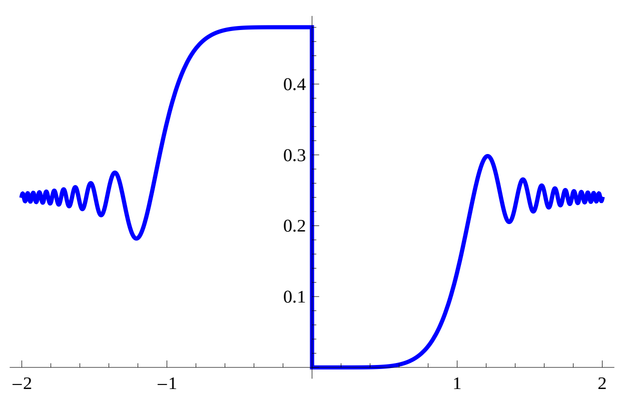


Figura 11.10: Grafico de $F = F(x)$.

[2] A primitiva de $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$ é:

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

[3] Calcule $\displaystyle\int_0^1 \left[10\,e^x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]dx.$

Usando a linearidade, podemos escrever a integral como:

$$\int_1^2 \left[10\,e^x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]dx=10\int_1^2 e^x\,dx+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Como:

$$F_1(x)=\int e^x\,dx=e^x,\ \text{e}\ F_2(x)=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\int x^{-1/4}\,dx=\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[10\,e^x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]dx&=10\int_1^2 e^x\,dx+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=10\,F_1(x)\Big|_1^2+F_2(x)\Big|_1^2\\&=10\,\big(F_1(2)-F_1(1)\big)+\big(F_2(2)-F_2(1)\big)\\&=10\,(e^2-e)+\frac{4}{3}\,(\sqrt[4]{8}-1).\end{aligned}$$

[4] Calcule $\displaystyle\int_e^{e^2} ln(x)\,dx.$

Utilizamos integração por partes:

$$\begin{aligned}u&=ln(x)\quad & dv&=dx\\ du&=\frac{dx}{x} & v&=x;\end{aligned}$$

então: $F(x)=\displaystyle\int ln(x)\,dx=x\,ln(x)-x$; logo:

$$\int_e^{e^2} ln(x)\,dx=F(x)\Big|_e^{e^2}=e^2.$$

[5] Calcule $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2\,x^2+3}\,dx.$

Se $u=2\,x^2+3$, então $\dfrac{du}{4}=x\,dx.$

$$\int x\sqrt{2\,x^2+3}\,dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{u}\,du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{\sqrt{(2\,x^2+3)^3}}{6}+c.$$

Logo, $F(x)=\dfrac{\sqrt{(2\,x^2+3)^3}}{6}$; então,

$$\int_0^1 x\sqrt{2\,x^2+3}\,dx = F(1)-F(0) = \frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[6] Seja

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^b t^x\,dt & \text{se} \quad x\neq -1\\[2ex] ln(\dfrac{b}{a}) & \text{se} \quad x=-1.\end{cases}$$

Verifique se f é contínua em -1.

Calculando diretamente: $\displaystyle\int t^x\,dt=\frac{t^{x+1}}{x+1}+c$. Logo, $F(x)=\dfrac{t^{x+1}}{x+1}$; então:

$$\int_a^b t^x\,dt = F(b)-F(a)=\frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{x+1}.$$

Por outro lado, aplicando L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}(b^{x+1}\,ln(b)-a^{x+1}\,ln(a))\\ &= f(-1);\end{aligned}$$

logo, f é contínua em -1.

11.4 Métodos de Integração

Método de Substituição

Se $u=g(x)$, então $du=g'(x)\,dx$; logo,

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

Integração por Partes

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx}$$

Exemplo 11.3.

[1] No exemplo [3] da página anterior, fizemos $u = 2\,x^2 + 3$; logo, $\dfrac{du}{4} = x\,dx$. Se: $x = 0$, então $u = 3$; se $x = 1$, então $u = 5$. Assim:

$$\int_0^1 x\sqrt{2\,x^2 + 3}\,dx = \frac{1}{4}\int_3^5 \sqrt{u}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{6}\bigg|_3^5 = \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 4\,e^x + 4}$.

Façamos $u = e^x$, então $e^{2x} + 4\,e^x + 4 = u^2 + 4\,u + 4 = (u+2)^2$. Se $x = 0$, então $u = 1$; se $x = 1$, então $u = e$:

$$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 4\,e^x + 4} = \int_1^e \frac{du}{(u+2)^2} = -\frac{1}{u+2}\bigg|_1^e = \frac{e-1}{3\,(e+2)}.$$

[3] Calcule $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Se $u = \sqrt{x} + 1$, então $\sqrt{x} = u - 1$ e $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$; logo, $2\,(u-1)\,du = dx$. Se: $x = 0$, então, $u = 1$; se $x = 4$, então, $u = 3$. Assim:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^3 \frac{(u-1)}{u}\,du = 2\,\big(u - ln(|u|)\big)\bigg|_1^3 = 4 - 2\,ln(3).$$

[4] Calcule $\displaystyle\int_1^4 x\,ln(x)\,dx$.

Usando o método de integração por partes temos: $u = ln(x)$ e $dv = x\,dx$; então, $du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$. Assim $\displaystyle\int x\,ln(x)\,dx = \frac{x^2\,ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$. Logo:

$$\int_1^4 x\,ln(x)\,dx = \frac{x^2\,ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\bigg|_1^4 = 16\,ln(2) - \frac{15}{4}.$$

[5] Verifique que $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$, sendo f tal que o integrando seja definido.

Seja $I = \displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\,dx$. Fazendo $u = a - x$, então $du = -dx$:

$$I = -\int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)}\,du = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)}\,dx;$$

logo,

$$2\,I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\,dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)}\,dx = \int_0^a dx = a.$$

[6] Usemos [5] para calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 - 2\,x + 2}\,dx$.

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 - 2\,x + 2}\,dx = 2\int_0^2 \frac{x^2}{2\,x^2 - 4\,x + 4}dx = 2\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + (x-2)^2}\,dx = 2.$$

Consideramos $f(x)=x^2$ em [5].

[7] Calcule $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (2t^2-t+1)dt$.

A função $f(t)=2t^2-t+1$ é contínua em $\mathbb{R}$; pelo teorema anterior:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (2t^2-t+1)dt = 2x^2-x+1.$$

[8] Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ se $y=\displaystyle\int_3^{x^2}(5t+7)^{25}dt$.

Como $f(t)=(5\,t+7)^{25}$ é contínua em $\mathbb{R}$; $\alpha(x)=x^2$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $Im(\alpha)\subset Dom(f)$, pelo corolário anterior:

$$\frac{dy}{dx}=f(\alpha(x))\,\alpha'(x)=2\,x\,f(x^2)=2\,x\,(5\,x^2+7)^{25}.$$

[9] Calcule y' se $y=\displaystyle\int_{-x}^{0}\sqrt{t^2+1}dt+\int_0^{3x+2}\sqrt{t^2+1}dt$.

Como $f(t)=\sqrt{t^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$, $\alpha_1(x)=-x$ e $\alpha_2(x)=3\,x+2$ são funções deriváveis tais que $Im(\alpha_1),\ Im(\alpha_2)\subset Dom(f)$, então pelo corolário anterior:

$$y'=-f(\alpha_1(x))\,\alpha_1'(x)+f(\alpha_2(x))\,\alpha_2'(x)=\sqrt{x^2+1}+3\,\sqrt{(3\,x+2)^2+1}.$$

[10] A função:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

é chamada **função erro**. Calcule a derivada de:

i) $x\,erf(x)$.

ii) $erf(\sqrt{x})$.

i) Pela regra do produto:

$$\frac{d}{dx}\big(x\,erf(x)\big)=erf(x)+x\,\frac{d}{dx}erf(x)=erf(x)+\frac{2\,x}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}.$$

ii) $f(t)=e^{-t^2}$ e $\alpha(x)=\sqrt{x}$; então, $f(\alpha(x))=e^{-x}$ e $\alpha'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Logo:

$$\frac{d}{dx}\,erf(\alpha(x))=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,f(\alpha(x))\,\alpha'(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi\,x}}.$$

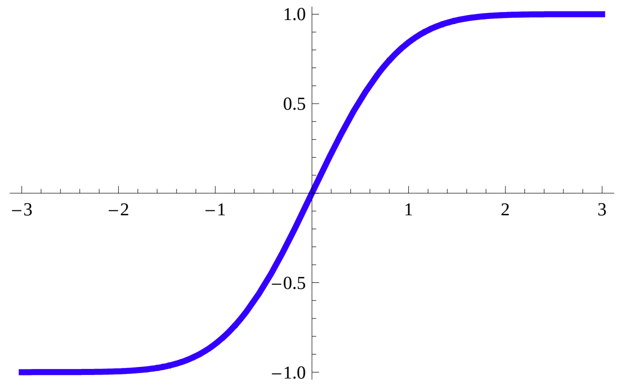


Figura 11.11: Gráfico de $erf(x)$.

[11] Calcule g' se $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

Denotemos por $f(t) = e^{-t^2}$ e $\alpha(x) = x^2$; então, $f(\alpha(x)) = f(x^2) = e^{-x^4}$; logo: $g'(x) = 2\,x\,e^{-x^4}$.

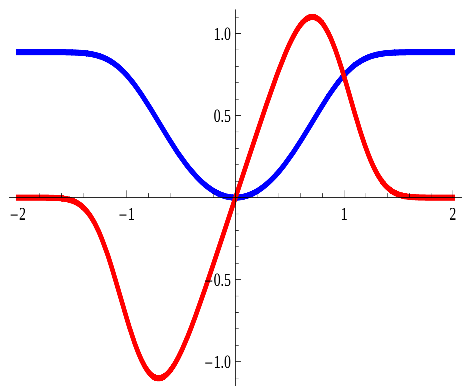


Figura 11.12: Gráfico de g e g'.

Proposição 11.2.

Seja f uma função integrável sobre $[-a, a]$. Se f é uma função par:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx}$$

Se f é uma função ímpar:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

De fato:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Façamos a seguinte substituição $u=-x$, então:

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du.$$

Se f é uma função par, segue a) e se f é uma função ímpar, segue b).

Exemplo 11.4.

[1] Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^{11}}{x^6+4\,x^4+1}\,dx$.

A função $f(x)=\dfrac{x^{11}}{x^6+4\,x^4+1}$ é ímpar, logo: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^{11}}{x^6+4\,x^4+1}\,dx=0$.

[2] Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} (20\,x^6+x^4+1)\,dx$.
A função $f(x)=20\,x^6+x^4+1$ é par, logo:

$$\int_{-1}^{1} (20\,x^6+x^4+1)\,dx = 2\int_0^1 (20\,x^6+x^4+1)\,dx = \frac{284}{35}.$$

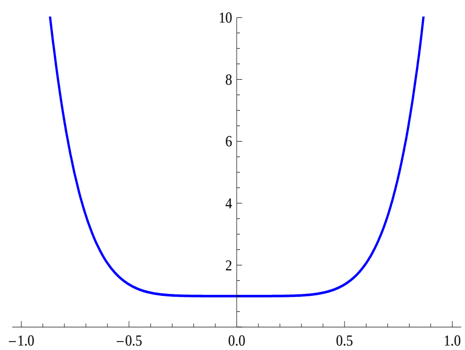


Figura 11.13: Gráfico da função $f(x)=20\,x^6+x^4+1$.

11.5 Cálculo de Áreas

O cálculo da área de uma região plana pode ser feito via integral definida. A seguir, estudaremos as situações mais comuns.

Teorema 11.6.
Sejam $f,\,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funções contínuas. A área de uma região plana R delimitada pelo gráfico das funções contínuas $y=f(x)$, $y=g(x)$ e pelas retas $x=a$ e $x=b$ é:

$$\boxed{A(R)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx}$$

Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$\boxed{A(R) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

onde:

$$\boxed{R = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}}$$

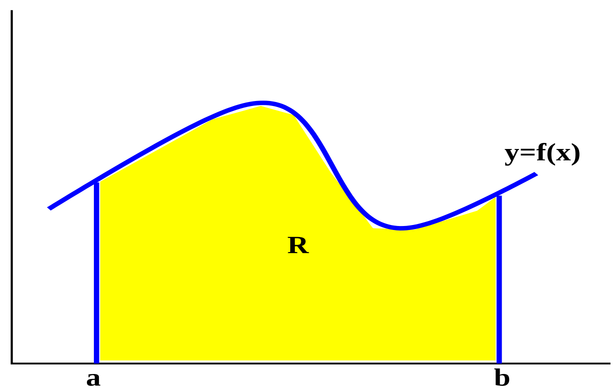


Figura 11.14: $R = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Se $f(x) \leq 0$ e $g(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$\boxed{A(R) = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

onde

$$\boxed{R = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}}$$

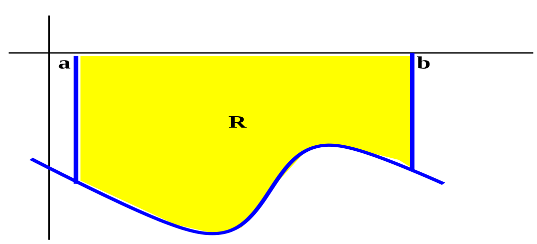


Figura 11.15: $R = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$

Se $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$\boxed{A(R) = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,dx}$$

onde

$$\boxed{R = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}}$$

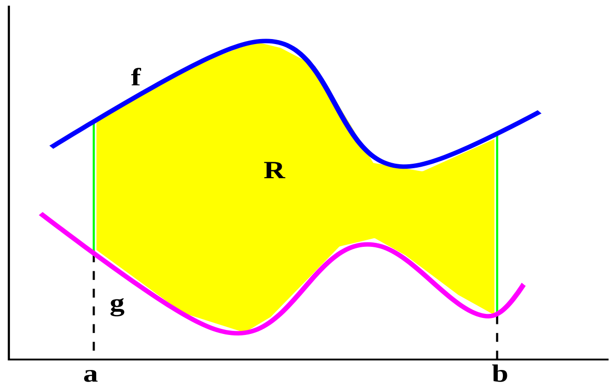


Figura 11.16: $R = \{(x,y) \,/\, a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$.

Se $f(x) \ge g(x)$, $a \le x \le c$ e $g(x) \ge f(x)$, $c \le x \le b$; então, $R = R_1 \cup R_2$, onde:

$$\boxed{R_1 = \{(x,y) \,/\, a \le x \le c,\ g(x) \le y \le f(x)\}} \quad \text{e}$$

$$\boxed{R_2 = \{(x,y) \,/\, c \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}}$$

$$\boxed{A(R) = \int_a^c \big[f(x) - g(x)\big]\,dx + \int_c^b \big[g(x) - f(x)\big]\,dx}$$

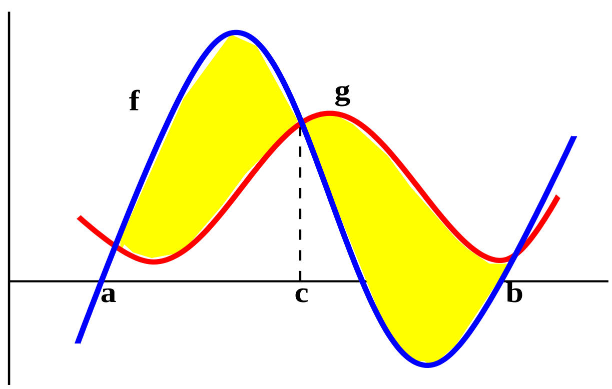


Figura 11.17: $R = R_1 \cup R_2$.

11.5.1 Exemplos

[1] Se em 1970, foram utilizados 20.3 bilhões de barris de petróleo no mundo todo e se a demanda mundial de petróleo cresce exponencialmente a uma taxa de 9% ao ano, então a demanda $A(t)$ anual de petróleo no tempo t é $A(t) = 20.3\,e^{0.09t}$ ($t = 0$ em 1970). Se a demanda continua crescendo a uma taxa de 9% ao ano, qual será a quantidade de petróleo consumida entre os anos de 1970 e 2010?

A quantidade de petróleo utilizada nesse período de tempo é a área sob a curva de demanda entre $t = 0$ e $t = 40$.

$$20.3 \int_0^{40} e^{0.09t}\,dt = 225.56\,e^{0.09t}\Big|_0^{40} = 8029.38.$$

Logo, foram consumidos, aproximadamente, 8029 barris de petróleo.

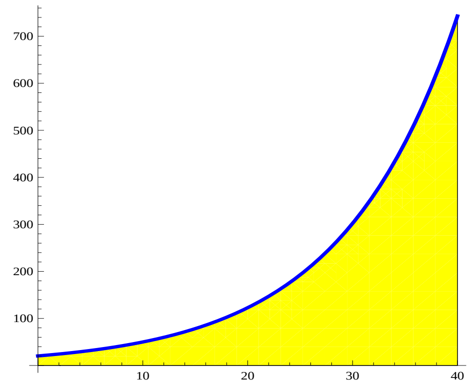


Figura 11.18: A região do exemplo [1].

[2] Calcule a área da região limitada pelo eixo dos x e pelo gráfico de $y = 4 - x^2$. Neste problema $g = 0$ e não são dados claramente os intervalos de integração; mas, as interseções com os eixos são os pontos: $(0,4)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$.

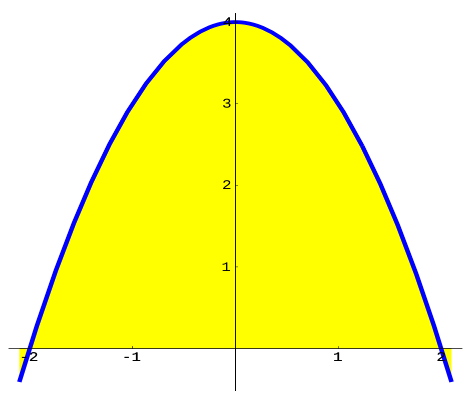


Figura 11.19: A região do exemplo [2].

Logo:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 4 - x^2\}.$$

Usando o fato de que a função é par:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 2\,(4\,x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{32}{3}\,u.a.$$

[3] Calcule a área da região limitada pelo eixo dos x e pelo gráfico de $y = 4\,x^4 - 5\,x^2 + 1$. Determinemos a interseção da curva com os eixos coordenados:

i) Fazendo $x = 0$; então, $y = 1$; o ponto de interseção é $(0, 1)$.

ii) Fazendo $y = 0$; então, $4\,x^4 - 5\,x^2 + 1 = 0$, clarametente $x = -1$ e $x = 1$ são raízes do polinômio; logo, $4\,x^4 - 5\,x^2 + 1 = (x - 1)\,(x + 1)\,(4\,x^2 - 1)$; os pontos de interseção são $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$.

É fácil verificar que $x = 0$ é ponto de máximo local e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}$ são pontos de mínimo local de f. Logo, $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ onde:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \le x \le -\frac{1}{2}, \quad 4\,x^4 - 5\,x^2 + 1 \le y \le 0\};$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \quad 0 \le y \le 4\,x^4 - 5\,x^2 + 1\} \text{ e}$$
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{2} \le x \le 1, \quad 4\,x^4 - 5\,x^2 + 1 \le y \le 0\}.$$

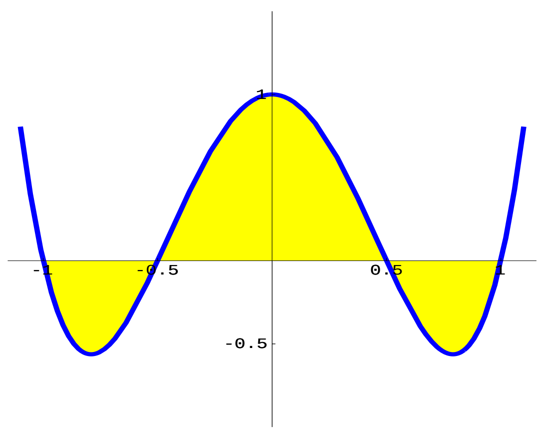


Figura 11.20: Gráfico de $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

Logo:

$$A = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (4\,x^4 - 5\,x^2 + 1)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4\,x^4 - 5\,x^2 + 1)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4\,x^4 - 5\,x^2 + 1)\,dx.$$

A função y é par. Usando a simetria da região, calculamos a área da região no primeiro e quarto quadrantes e multiplicamos o resultado por 2:

$$A = 2\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}} (4\,x^4 - 5\,x^2 + 1)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4\,x^4 - 5\,x^2 + 1)\,dx\right] = 1\,u.a.$$

[4] Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x + 2$.

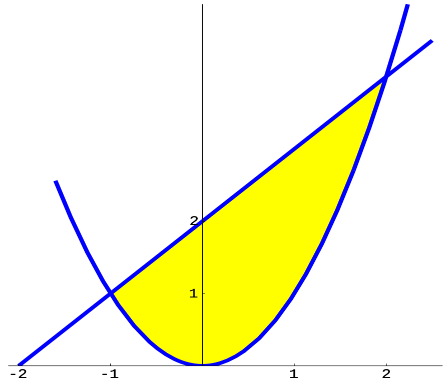


Figura 11.21: A região do exemplo [4].

Novamente neste problema não são dados, claramente, os intervalos de integração.
i) Calculemos as interseções dos gráficos; em outras palavras, resolvamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y = & x+2 \\ y = & x^2, \end{cases}$$

ou seja, resolvamos $x^2 - x - 2 = 0$; temos: $x = -1$ e $x = 2$. Os pontos de interseção são $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.
ii) Notemos que $x + 2 \geq x^2$ se $x \in [-1, 2]$; logo:

$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \Big[\frac{x^2}{2} + 2\,x - \frac{x^3}{3}\Big]\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\, u.a.$$

[5] Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2 - x^4$ e $y = x^2 - 1$.

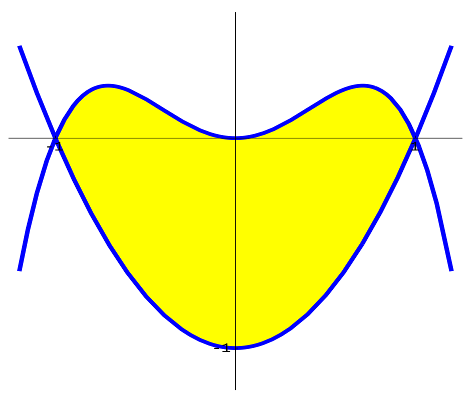


Figura 11.22: A região do exemplo [5].

i) Calculemos as interseções dos gráficos; em outras palavras, resolvamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y & = x^2 - x^4 \\ y & = x^2 - 1, \end{cases}$$

ou seja, resolvamos $x^4 - 1 = 0$; temos: $x = -1$ e $x = 1$. Os pontos de interseção são $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

ii) Notemos que $x^2 - x^4 \geq x^2 - 1$ se $x \in [-1, 1]$; utilizando a simetria da região:

$$A = \int_{-1}^{1} (-x^4 + 1)\, dx = 2 \int_{0}^{1} (-x^4 + 1)\, dx = \frac{8}{5}\, u.a.$$

[6] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das seguintes curvas: $y^2 = a\,x$, $a\,y = x^2$, $y^2 = -a\,x$ e $a\,y = -x^2$ se $a > 0$. As curvas são parábolas.

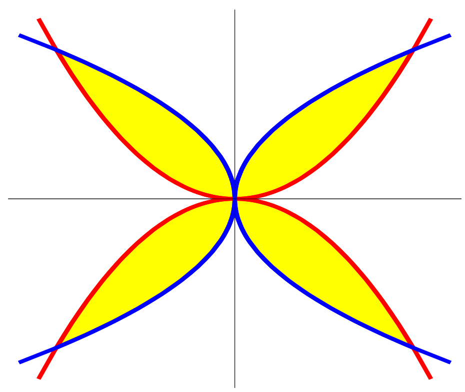


Figura 11.23: A região do exemplo [6].

Pela simetria da região, podemos calcular a área da região situada no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por 4.

i) Observemos primeiro que $y^2 = a\,x$ não é função de x.

ii) Calculemos a interseção das curvas, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y^2 & = a\,x \\ x^2 & = a\,y. \end{cases}$$

Então, $x^4 = a^2\,y^2$; logo $x^4 - a^3\,x = 0$, cujas raízes: $x = 0$ e $x = a$ são os limites de integração.

iii) A região no primeiro quadrante, cuja área queremos calcular é limitada superiormente pela função $y = \sqrt{a\,x}$ e inferiormente por $y = \dfrac{x^2}{a}$, logo:

$$A = 4 \int_{0}^{a} \left[\sqrt{a\,x} - \frac{x^2}{a}\right] dx = 4 \left[\frac{2\sqrt{a^2\,x^2} - x^3}{3\,a}\right]\Bigg|_{0}^{a} = \frac{4\,a^2}{3}\; u.a.$$

Observação Importante

Muitas vezes os problemas ficam mais simples de resolver se integramos em relação a y e não em relação a x. Podemos repetir o processo de partição num intervalo que fica no eixo dos y e a obtenção das somas de Riemann.

Seja R a região plana limitada pela direita pela função $x = M(y)$, pela esquerda por $x = N(y)$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$.

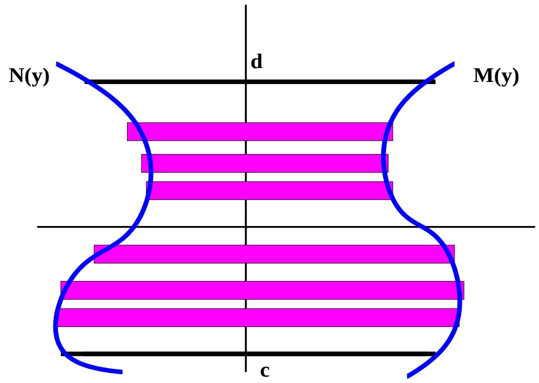


Figura 11.24: .

Não é difícil provar que se as funções $M(y)$ e $N(y)$ são contínuas em $[c, d]$, então:

$$\boxed{A = \int_c^d \big[M(y) - N(y)\big]\, dy}$$

Por isso, para resolver os problemas de área é sempre indicado fazer o desenho da região correspondente.

Exemplo 11.5.

[1] Calcule a área da região limitada pelas curvas $y^2 = 2\,x$ e $y = x - 4$.

i) As interseções das curvas são $(2, -2)$ e $(8, 4)$.

ii) Sejam $x = M(y) = y + 4$ e $x = N(y) = \frac{y^2}{2}$.

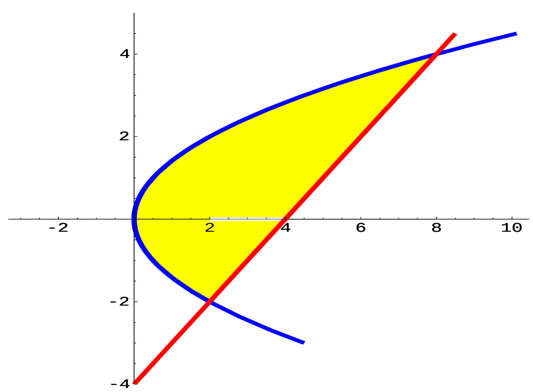


Figura 11.25: A região do exemplo [1].

Então:

$$A = \int_{-2}^{4} \big[y + 4 - \frac{y^2}{2}\big]\, dy = \big[\frac{y^2}{2} + 4\,y - \frac{y^3}{6}\big]\Big|_{-2}^{4} = 18\,u.a.$$

Sugerimos ao aluno fazer este problema integrando em relação a x, para "sentir"as dificuldades.

[2] Calcule a área da região limitada pelas curvas $2\,y^2 = x + 4$ e $y^2 = x$.

i) As interseções das curvas são $(4, 2)$ e $(4, -2)$.

ii) Sejam $x = M(y) = y^2$ e $x = N(y) = 2\,y^2 - 4$.

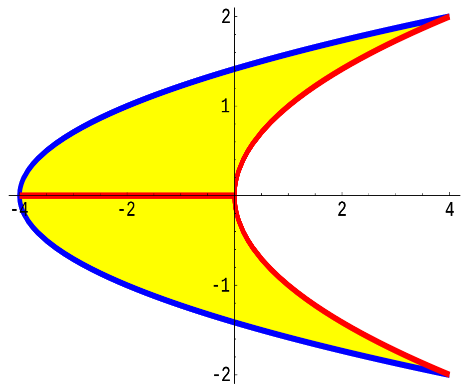


Figura 11.26: A região do exemplo [2].

Então, pela simetria:

$$A = \int_{-2}^{2} [4 - y^2]\,dy = 2\int_{0}^{2} [4 - y^2]\,dy = \frac{32}{3}\,u.a.$$

Exemplos Diversos

[1] Calcule a área da região limitada pelas curvas: $y = x^2 - x^4$ e $y = x - x^4$.

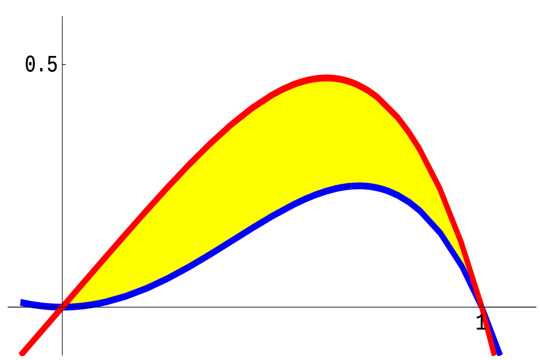


Figura 11.27: A região do exemplo [2].

Determinemos o intervalo de integração, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - x^4 \\ y = x - x^4. \end{cases}$$

Logo, $x=0$ e $x=1$; então, o intervalo de integração é $[0,1]$.

$$A=\int_0^1\big[x-x^4-\big(x^2-x^4\big)\big]\,dx=\int_0^1\big[x-x^2\big]\,dx=\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]\Big|_0^1=\frac{1}{6}\,u.a.$$

[2] Calcule a área da região limitada pelas curvas: $x=2\,y-y^2$ e $y-x-2=0$.

Determinemos o intervalo de integração, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x-2\,y+y^2= & 0\\ y-x-2= & 0.\end{cases}$$

Então, $y=-1$ e $y=2$. A interseção das curvas ocorre em $(-3,-1)$ e $(0,2)$.

$$A=\int_{-1}^{2}(y-y^2+2)\,dy=\Big[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+2\,y\Big]\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}\,u.a.$$

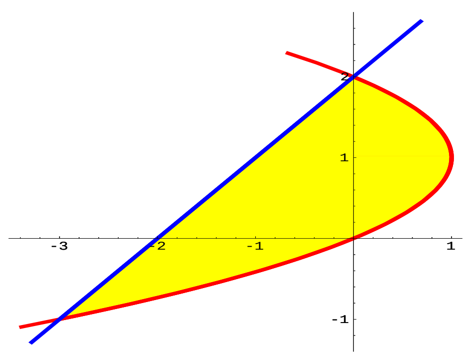


Figura 11.28: A região do exemplo [4].

[3] Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas: $y=7\,x^2-6\,x-x^3$ e $y=4\,x$.

Primeiramente:

$$y=7\,x^2-6\,x-x^3=x\,(1-x)\,(x-6);$$

curva intersecta o eixo dos x nos pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(6,0)$. Por outro lado, considerando $y=7\,x^2-6\,x-x^3$, temos $y'=14\,x-6-3\,x^2$ e $y''=14-6\,x$; então, os pontos críticos $\dfrac{7+\sqrt{31}}{3}$ e $\dfrac{7-\sqrt{31}}{3}$ são, respectivamente, de máximo local e de mínimo local. Para obter as interseções das curvas, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y= & 7\,x^2-6\,x-x^3\\ y= & 4\,x;\end{cases}$$

logo, $7\,x^2-10\,x-x^3=-x\,(x-2)\,(x-5)=0$; as curvas se intersectam nos pontos de abscissas $x=0$, $x=2$ e $x=5$.

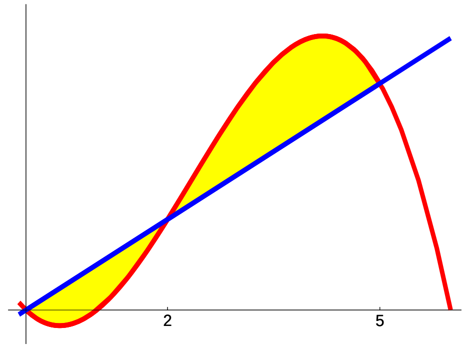


Figura 11.29: A região do exemplo [5].

A região é subdividida em duas regiões R_1 e R_2, onde:

$$R_1 = \{(x,y)\,/\,0 \le x \le 2,\; 7\,x^2 - 6\,x - x^3 \le y \le 4\,x\},$$
$$R_2 = \{(x,y)\,/\,2 \le x \le 5, 4\,x \le y \le \; 7\,x^2 - 6\,x - x^3\}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (10\,x - 7\,x^2 + x^3)\,dx + \int_2^5 \left[7\,x^2 - 10\,x - x^3\right]dx \\ &= 5\,x^2 - \frac{7\,x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 - 5\,x^2 + \frac{7\,x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\bigg|_2^5 = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}\,u.a. \end{aligned}$$

[5] Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas: $y = x^2 - 4\,x + 4$ e $y = 10 - x^2$.

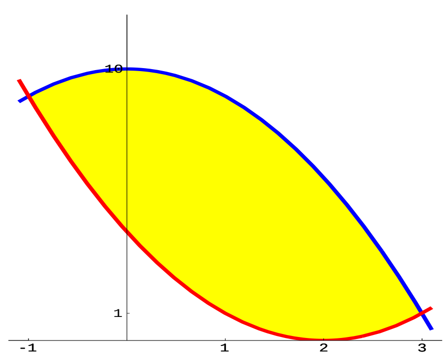


Figura 11.30: A região do exemplo [6].

As curvas se intersectam nos pontos de abscissas $x = -1$ e $x = 3$; então:

$$A = \int_{-1}^{3} (10 - x^2 - x^2 + 4x - 4)\,dx = \int_{-1}^{3} (6 + 4\,x - 2\,x^2)\,dx = \frac{64}{3}\,u.a.$$

11.6 Definição de Logaritmo Natural

Definição 11.3. *A função* $ln:\ (0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ *é definida por:*

$$\boxed{ln(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}}$$

$ln(x)$ *é chamado logaritmo natural de* x.

Proposição 11.3. *Das propriedades da integral definida e do Teorema Fundamental do Cálculo, segue que:*

1. $ln(1)=0$
2. $ln(x)<0$ *se* $0<x<1$
3. $ln(x)>0$ *se* $x>1$
4. $[ln(x)]'=\dfrac{1}{x}$
5. *A função logarítmica é crescente.*

11.6.1 Logaritmo como Área

Seja H_x a região limitada pelo gráfico da função $f(t)=\frac{1}{t}$, o eixo dos x e as retas $t=1$ e $t=x$.

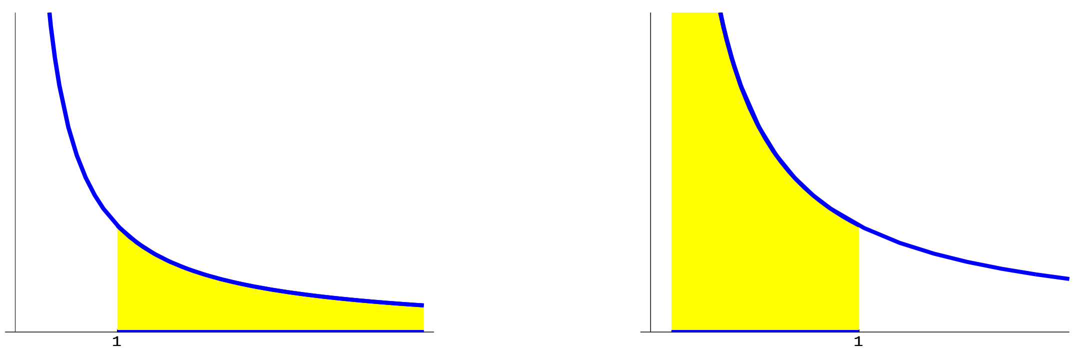


Figura 11.31: A região H_x.

Geometricamente, $ln(x)$ é definido por

$$ln(x)=\begin{cases}\text{área}(H_x) & \text{se} \quad 1\leq x\\ -\text{área}(H_x) & \text{se} \quad 0<x<1.\end{cases}$$

Se $x=1$, H_x é um segmento de reta; logo, a área$(H_x)=0$ e $ln(1)=0$. Por outro lado, verifiquemos que $ln(x\,y)=ln(x)+ln(y)$, para todo $x,\ y\in(0,+\infty)$. De fato:

$$ln(x\,y)=\int_1^{x\,y}\frac{dt}{t}=\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_x^{x\,y}\frac{dt}{t}=ln(x)+\int_x^{x\,y}\frac{dt}{t}.$$

Fazendo $t=x\,s$, tem-se, $dt=x\,ds$ e:

$$\int_x^{x\,y}\frac{dt}{t}=\int_1^y\frac{ds}{s}=ln(y).$$

$ln(x^\alpha) = \alpha\, ln(x);\ x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato $ln(x^\alpha) = \int_1^{x^\alpha} \frac{dt}{t}$. Fazendo $t = s^\alpha$, tem-se, $dt = \alpha\, s^{\alpha-1}\, ds$ e:

$$\int_1^{x^\alpha} \frac{dt}{t} = \alpha \int_1^{x} \frac{ds}{s} = \alpha\, ln(x).$$

Em particular, $ln\big(\frac{x}{y}\big) = ln(x) - ln(y);\ x,\ y > 0.$

$$ln\big(\frac{x}{y}\big) = ln\big(x\, y^{-1}\big) = ln(x) + ln(y^{-1}) = ln(x) - ln(y).$$

Podemos agora definir a função exponencial assim: $y = e^x$ se, e somente se $x = ln(y)$. Todas as propriedades da função exponencial podem ser demonstradas a partir desta definição.

11.7 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais usando o método de substituição:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt{2\,x+3}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} (2\,x-1)^{100}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{2\,x+3}$

(f) $\displaystyle\int_{2}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{ln(x)}}$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{(3\,x^2-12\,x+1)^4}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,e^{x^3}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

2. Calcule as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,e^{-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^4\,e^{-x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{2}^{4} x\,ln(\sqrt{x})\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{1}^{4} ln(\sqrt{x})\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^2-1)\,e^x\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{1}^{4} e^{\sqrt{x}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{1}^{e} ln^3(x)\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,ln(x)\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\,\sqrt{x+1}\,dx$

3. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,5^x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^5}}$

(c) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{(x^2+2\,x)\,dx}{x^3+3\,x^2-4}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(x-3)\,dx}{(x^2+4\,x+3)^2}$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{(x^4+1)\,dx}{x\,(x^2+1)}$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{(x+1)^3}$

(g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{4\,x^2+12\,x-7}$

(h) $\displaystyle\int_1^3 \frac{(2\,x+3)\,dx}{x^3+3\,x}$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

(j) $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,(x-1)\,dx$

(k) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{dx}{\sqrt{2\,x+3}}$

(l) $\displaystyle\int_2^4 \frac{(2\,x^2+1)dx}{(x+1)^2\,(x+2)}$

(m) $\displaystyle\int_0^a x\,\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx$

4. Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (t^2+1)^{\frac{1}{3}}\,dt$

(b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t\,ln(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt$

(d) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{e^x} \sqrt{1+t^2}\,dt$

(e) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (2^t+t^2)\,dt$

(f) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$

5. Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e suponha que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x$, para todo $x \in [a,b]$. Determine f e a.

6. O número:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

é chamado valor médio da função f no intervalo $[a,b]$. Calcule o valor médio das funções nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = ln(x)$; $[1,2]$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; $[0,1]$

(c) $f(x) = x^2\,e^x$; $[0,1]$

7. Diga qual das integrais é maior, sem calculá-las:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ ou $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ ou $\displaystyle\int_1^2 e^x\,dx$.

8. Seja $a > 0$ e suponha que f é uma função contínua no intervalo $[-a, a]$. Defina g em $[-a, a]$ por:
$$g(x) = \int_0^{-x} f(t)\, dt + \int_0^{x} f(-t)\, dt,$$
para todo $x \in [-a, a]$.

(a) Verifique que $g'(x) = 0$, para todo $x \in [-a, a]$.

(b) Use a parte a) para verificar que $g(x) = 0$, para todo $x \in [-a, a]$.

(c) Conclua que: $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\, dt = \int_0^{x} f(-t)\, dt$.

9. Calcule as seguintes integrais sem utilizar métodos de integração:

$$(a) \quad \int_{-10}^{10} \left(x^5 - 6\,x^9 + \frac{x^3}{(x^6 + x^4 + x^2 + 1)^4} \right) dx, \quad (b) \quad \int_{-2}^{2} \frac{(\sqrt[3]{x^7 + x^5 + x^3})}{x^4 + 10}\, dx$$

10. Seja $g(x) = \displaystyle\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(t)\, dt$, onde $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha_i : J \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis ($i = 1,\, 2$); I e J intervalos tais que $\alpha_i(J) \subset I$. Verifique que:
$$g'(x) = f(\alpha_2(x))\, \alpha_2^{'}(x) - f(\alpha_1(x))\, \alpha_1^{'}(x).$$

11. Calcule $g'(x)$ se $g(x) = \displaystyle\int_{x^2+1}^{x^2+x} 2^{-t^2}\, dt$.

12. Calcule $g'(\frac{1}{2})$ se $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{t}\, dt$.

13. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sabendo que $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)\, dt = 4$, calcule $\displaystyle\int_{1}^{4} f(5 - 2\,x)\, dx$

14. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^2}}{1 + t^2}\, dt$. Verifique que f é uma função contínua ímpar e que $f(x) \geq x$, para todo $x > 0$.

15. Esboce o gráfico de $f(x) = \displaystyle\int_0^x 2\, t\, e^{-t^2}\, dt$

Áreas

Calcule a área sob o gráfico de $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, esboçando cada região, se:

1. $f(x) = 1 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$
2. $f(x) = x^3 - x$, $x = -1$, $x = 1$
3. $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$, $x = 0$, $x = 2$
4. $f(x) = \frac{x - x^3}{3}$, $x = -1$, $x = 1$
5. $f(x) = ln(x)$, $x = 1$, $x = e$
6. $f(x) = 2\,\sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 10$
7. $f(x) = x\,(x-5)^2$, $x = 0$, $x = 1$
8. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$, $x = 0$, $x = 5$
9. $f(x) = x\,\sqrt{4\,x^2 + 1}$, $x = 0$, $x = 2$
10. $f(x) = |x|$, $x = -2$, $x = 6$
11. $f(x) = (x+1)^3 + 1$, $x = -2$, $x = 0$
12. $f(x) = x^2 + 2\,x$, $x = -1$, $x = 3$
13. $f(x) = x^4 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$

Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas:

1. $y = x^2$, $y = 2x + \frac{5}{4}$
2. $y = -x^2 - 4$, $y = -8$
3. $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$
4. $x = y^2$, $y = x + 3$, $y = -2$, $y = 3$
5. $y^3 = x$, $y = x$
6. $y = -x^2 - 1$, $y = -2x - 4$
7. $x = y^2 + 1$, $y + x = 7$
8. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 14$
9. $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$
10. $y = x^2$, $y = x^4$
11. $x = y^2 - 2$, $x = 6 - y^2$
12. $y = x|x|$, $y = x^3$
13. $y = x + 4$, $y = \frac{x^2}{2}$
14. $y^2 - y = x$, $y - y^2 = x$
15. $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$
16. $y = x^2$, $y = -x + 2$
17. $y = |x|$, $y = (x+1)^2 - 7$, $x = -4$
18. $y = ln(|x|)$, $|y| = 3$
19. $y = ln(x)$, $x = 1$, $y = 4$
20. $y = x^4 - 2\,x^2$, $y = 2\,x^2$
21. $y = e^x$, $y = e^{2x-1}$, $x = 0$
22. $2\,y\,(1 + y^2)^3 - x = 0$, $y = 0$, $y = 1$
23. $y = \frac{8}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, $x > 0$
24. $y = x\,(x-3)$, $y = x\,(3-x)$
25. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$
26. $y\,(x^2 + 4) = 4(2 - x)$ e os eixos coordenados
27. $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ e o eixo dos x
28. $x - \sqrt{4y^2 - y^4} = 0$ e o eixo dos y
29. $y = \frac{1}{(2x+1)^2}$, $x = 1$, $x = 2$
30. $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x = 0$, $x = 4$
31. $y = e^{-x}$, $y = x + 1$, $x = -1$
32. $y = e^{-x}$, $y = \sqrt{x+1}$, $x = 1$
33. $y = e^x$, $y = 10^x$, $y = e$
34. $y = -x^3 + 2\,x^2 + 3\,x$, $y = -5\,x$
35. $x^2\,y = 3$, $4\,x + 3\,y - 13 = 0$
36. $x = y\,(y-3)^2$, $x = 0$
37. $y = x^4 - 3\,x^2$, $y = x^2$
38. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$

39. $y = x\,e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = c$, onde c é a abscissa do ponto de inflexão da curva

40. $y = x\,e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = c$, onde c é o máximo

41. $y = \frac{ln(x)}{x}$, $y = 0$, $x = c$, onde c é o máximo

42. $x^2 - 2\,y + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

43. $x = 3\,y$, $x + y = 0$ e $7\,x + 3\,y = 24$

44. $x^2 = 4\,y$, $y = \frac{8}{x^2+4}$

Logaritmo

1. Verifique que: $ln(x) = \displaystyle\int_0^{x-1} \frac{du}{u+1}$.

2. Verifique que: $ln(x) = L(x) + Res(x)$, onde $L(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}\,(x-1)^3$ e

$$Res(x) = \int_0^{x-1} \frac{u^3}{u+1} du.$$

3. Se $x > 1$ e $0 \leq u \leq x - 1$, mostre que: $Res(x) \leq \dfrac{1}{4}\,(x-1)^4$. ($Res(x)$ do exercício anterior).

4. Usando os exercícios anteriores conclua que: $ln(x) \simeq L(x)$ com

$$E(x) = |ln(x) - L(x)| \leq \frac{1}{4}\,(x-1)^4.$$

Equivalentemente, $L(x)$ aproxima $ln(x)$ superiormente, com erro $E(x)$ não superior a $\dfrac{1}{4}\,(x-1)^4$.

5. Calcule aproximadamente $ln(1.2)$ e $E(1.2)$.

6. Repita os exercícios 2, 3, 4 e 5 escrevendo: $\dfrac{1}{u+1} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \dfrac{u^5}{u+1}$.

7. Verifique que: $ln(x) \leq x - 1$. Quando vale a igualdade?

8. Verifique que $\dfrac{x}{1+x} \leq ln(x+1) \leq x$, para todo $x \geq 1$.

Capítulo 12

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

12.1 Introdução

Na definição de integral definida, consideramos a função integranda contínua num intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

Funções definidas em intervalos do tipo $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ou $(-\infty, +\infty)$, ou seja para todo $x \geq a$ ou $x \leq b$ ou para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

A função integranda é descontínua em um ponto c tal que $c \in [a, b]$.

As integrais destas funções são chamadas **integrais impróprias**.

As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

12.2 Integrais Definidas em Intervalos Ilimitados

Antes de enunciar as definições estudemos o seguinte problema:

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico da função:

$$f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e o eixo dos x.

Primeiramente note que a região R é **ilimitada** e não é claro o significado de "área"de uma tal região.

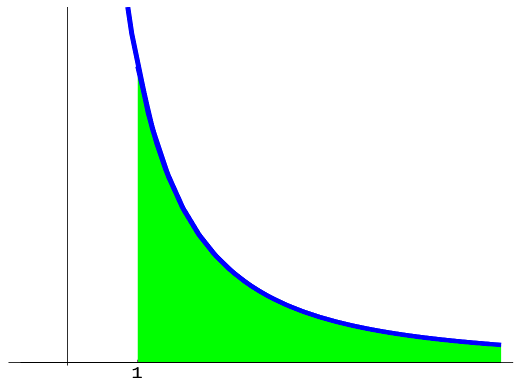


Figura 12.1: Gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$.

Seja R_b a região determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$ e $1 \leq x \leq b$, acima do eixo dos x.

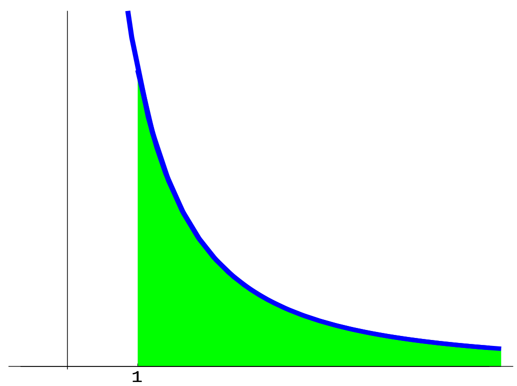


Figura 12.2: Gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq b$.

A área de R_b é:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

É intuitivo que para valores de b muito grandes a região **limitada** R_b é uma boa aproximação da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b),$$

quando o limite existe. Neste caso:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1\, u.a.$$

É comum denotar $A(R)$ por:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Esta integral é um exemplo de **integral imprópria** com limite de integração infinito. Motivados pelo raciocínio anterior temos as seguintes definições:

Definição 12.1.

1. *Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

3. *Se f é uma função integrável em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,dx}$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário são ditas divergentes.

Exemplo 12.1.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx.$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

[2] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx.$

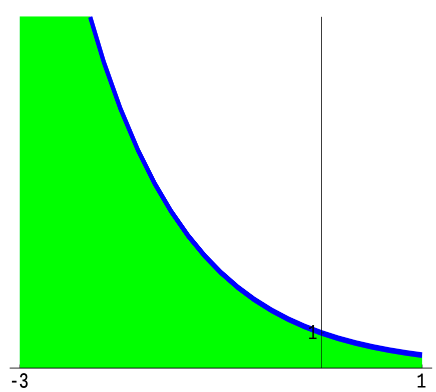


Figura 12.3: Gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-x}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}(-e^{-x})\bigg|_a^0 + 1 = +\infty.$$

[3] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

Seja $u = x^2+1$; logo $du = 2\,x\,dx$: $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2\,u} = -\frac{1}{2\,(x^2+1)}$. Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = 0.$$

[4] Calcule a área da região, no primeiro quadrante, determinada pelo gráfico de $y = 2^{-x}$, o eixo dos x e à direita do eixo dos y.

Figura 12.4: Gráfico de $y = 2^{-x}$.

$$A(R) = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{2^x} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{2^x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2^{-x}}{ln(2)}\right)\bigg|_0^b = \frac{1}{ln(2)}\ u.a.$$

[5] Seja $p\in\mathbb{R}$. Calcule:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}.$$

Note que:

$$\int_1^b\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\,(b^{1-p}-1),\ \ p\neq 1$$

a) Se $p>1$ temos: $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = 0$; logo,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

b) Se $p<1$ temos: $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = \infty$; logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty.$$

c) Se $p = 1$, temos: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} ln(b) = \infty$. Em geral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{se} \quad p > 1. \end{cases}$$

Portanto, a integral converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

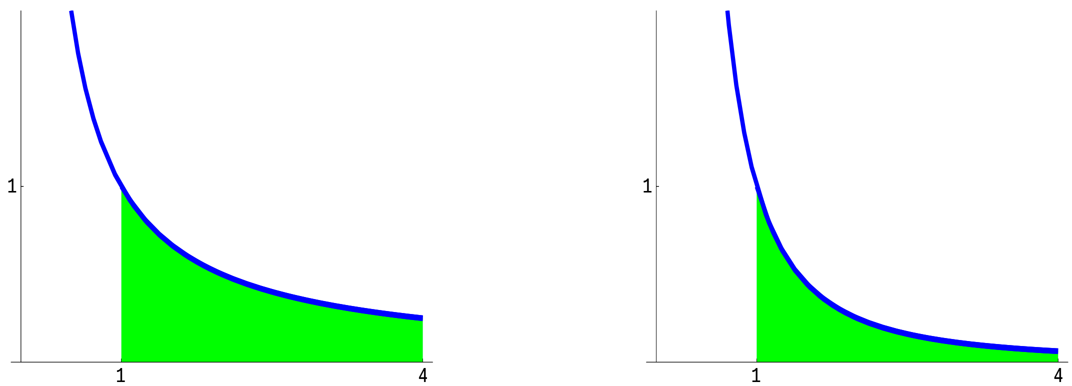


Figura 12.5: Gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$, para $x > 0$.

Muitas vezes não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria, mas, podemos indagar se uma integral imprópria converge ou diverge.

Proposição 12.1. *Sejam f e g funções integráveis em $[a, +\infty)$ tais que $f(x) \geq g(x) > 0$ para todo $x \geq a$.*

1. *Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge.*

2. *Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.*

Seja $f(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Para mostrar a convergência da integral de f, é preciso que f seja menor que uma função cuja integral converge. Para mostrar a divergência da integral de f, é preciso que f seja maior que uma função cuja integral diverge.

Exemplo 12.2.

[1] Analise a convergência da integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

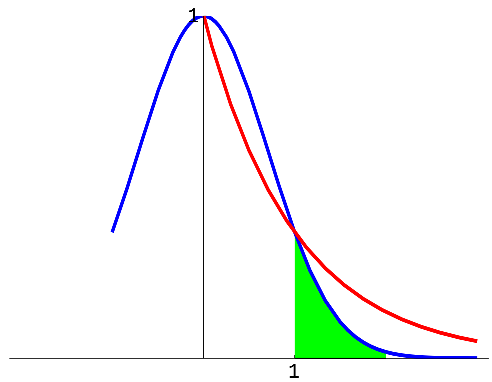


Figura 12.6: Gráfico de e^{-x^2} em azul e de e^{-x} em vermelho, respectivamente.

Claramente $\dfrac{1}{e^{x^2}} \leq \dfrac{1}{e^x}$, para todo $x \geq 1$; então, como

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = \frac{1}{e},$$

temos que a integral dada converge.

12.2.1 Função Gama

Se $x > 0$, a função Gama é definida e denotada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt.$$

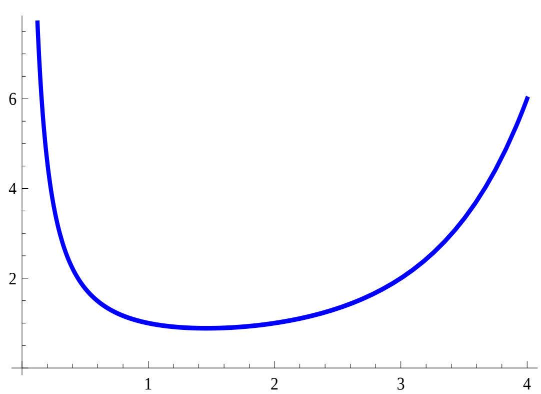


Figura 12.7: Gráfico de $\Gamma[x]$, $x > 0$.

Utilizando integração por partes, temos:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = n\,(n-1)\,\ldots 2 \times 1 \times \Gamma(1).$$

Como:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Logo, se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Se $\nu \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\nu+1) &= (n+\nu)\,\Gamma(n+\nu) \\
&= (n+\nu)\,(n+\nu-1)\,\Gamma(n+\nu-1) \\
&\vdots \\
&= (n+\nu)\,(n+\nu-1)\ (n+\nu-2)\ldots\ldots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $x > 0$ temos:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Definamos primeiramente a função Γ, para $-1 < x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-0.2) = -\frac{1}{0.2}\,\Gamma(-0.2+1) = -\frac{1}{0.2}\,\Gamma(0.8).$$

Logo, podemos definir a função Γ, para $-2 < x < -1$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-1.2) = -\frac{1}{1.2}\,\Gamma(-1.2+1) = -\frac{1}{1.2}\,\Gamma(-0.2) = \frac{1}{0.2}\,\frac{1}{1.2}\,\Gamma(0.8).$$

Continuando este processo, podemos definir a função Γ, para $x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

12.3 Integrais de Funções Descontínuas

Como antes, iniciamos o parágrafo, com um problema:

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico da função:

$$f : (0, 9] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, e o eixo dos x.

Notamos que a região R é **ilimitada** pois a função f não é definida no ponto $x = 0$.

Seja R_ε a região determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $\varepsilon \leq x \leq 9$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

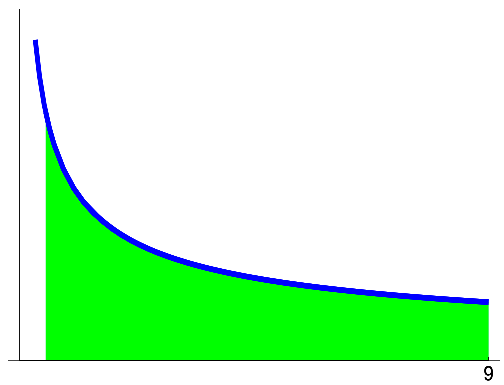


Figura 12.8: A região R_ε.

A área de R_ε é:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^9 = \big(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\big)\, u.a.$$

É intuitivo que para valores de ε muito pequenos a região **limitada** R_ε é uma boa aproximação da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} A(R_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\big) = 6\, u.a.$$

$\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é um exemplo de integral **imprópria** com integrando ilimitado. Motivados pelo raciocínio anterior, temos as seguintes definições:

Definição 12.2.

1. *Se f é uma função integrável em $(a, b]$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $[a,b)$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

3. *Se f é uma função integrável em $[a,b]$ exceto em c tal que $a < c < b$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx}$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário, são ditas divergentes. Se f é uma função integrável em $(a,b]$; então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}$$

Se f é uma função integrável em $[a,b)$; então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} \int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx}$$

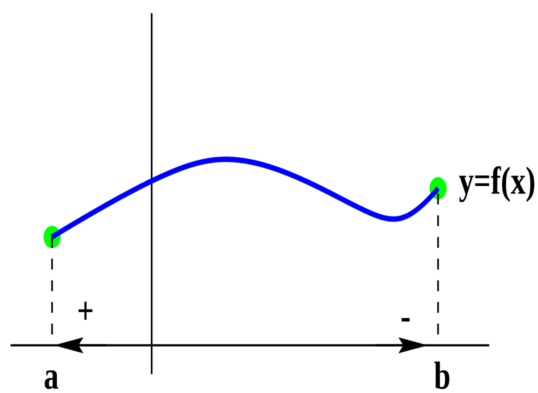


Figura 12.9:

Exemplo 12.3.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_{-4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

Observe que a função integranda não é definida em $-2 \in [-4, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{-4}^{-2-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{-2+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} (x+2)^{\frac{2}{3}} \Big|_{-4}^{-2-\varepsilon_1} + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} (x+2)^{\frac{2}{3}} \Big|_{-2+\varepsilon_2}^{1} \\
&= \frac{3}{2} \big[\lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} (-\sqrt[3]{4} + \varepsilon_1^{\frac{2}{3}}) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} (\sqrt[3]{9} - \varepsilon_2^{\frac{2}{3}}) \big] \\
&= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}).
\end{aligned}$$

[2] Calcule a área limitada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, e pelas retas $x = 2$ e $x = 5$.

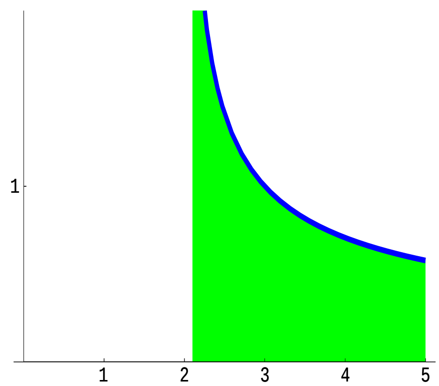


Figura 12.10: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

$$A = \int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon \to 2^+} \int_{\varepsilon}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2 \lim_{\varepsilon \to 2^+} \sqrt{x-2} \Big|_{\varepsilon}^{5} = 2\sqrt{3}\, u.a.$$

Numa integral imprópria com limite superior infinito e cuja função integranda não é definida no limite inferior, procedemos assim: Se f é integrável em $(a, +\infty)$ então

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_{\varepsilon}^{c} f(x)\, dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx}$$

onde $a < c$; analogamente nos outros casos.

12.4 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,e^{-x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln(x)}$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,5^{-x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ln(x)}{x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2\,x-3)^2}$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2\,x+5}$

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$

(k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln^3(x)}$

(n) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

(o) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln^2(x)}$

2. Calcule a área das regiões determinadas por:

$(a)\quad y=(e^x+e^{-x})^{-1}$ $\qquad (b)\quad y=x^{-2},\ y=e^{-2x}$ e $x\geq 1$

$(c)\quad y=\dfrac{1}{x^4+1}$ e o eixo dos x.

3. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\,\sqrt[7]{(ln(x))^2}}$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$

(e) $\displaystyle\int_4^{5} \frac{dx}{\sqrt[5]{(5-x)^2}}$

(f) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\,x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,ln^2(x)}$

(i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,\sqrt{ln(x)}}$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\,\sqrt[3]{ln(x)}}$

4. Determine o valor de s tal que as seguintes integrais impróprias sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,t\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,e^{t}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-st}\,dt$

Capítulo 13

INTEGRAIS DEFINIDAS E ECONOMIA

13.1 A Integral Definida como Variação Total

Neste capítulo estudaremos o problema inverso do estudado na Análise Marginal.

Suponha que desejamos determinar o custo marginal resultante do aumento da produção de x_0 unidades para x_1 unidades. Se conhecemos a função de custo $C = C(x)$ basta calcular $C(x_1) - C(x_0)$. Por outro lado, se não conhecemos a função de custo, mas conhecemos o custo marginal, podemos determiná-la utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo. De fato:

$$\int_{x_0}^{x_1} CM_g(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dC}{dx}\, dx = C(x_1) - C(x_0).$$

Desta forma, a integral definida da taxa de variação da função de custo pode ser vista como variação total da função de custo.

Analogamente para a receita e o lucro:

$$\int_{x_0}^{x_1} RM_g(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dR}{dx}\, dx = R(x_1) - R(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} LM_g(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dL}{dx}\, dx = L(x_1) - L(x_0).$$

Exemplo 13.1.

[1] Determine a variação total do custo $C = C(x)$, quando o número x de unidades produzidas de um certo produto aumenta de 1000 para 1003, se seu custo marginal é:

$$CMg(x) = \frac{3500}{x^2}.$$

Calculamos diretamante:

$$\int_{1000}^{1003} \frac{3500}{x^2}\, dx = -\frac{3500}{x}\bigg|_{1000}^{1003} = \frac{21}{2006} \cong 0.01046.$$

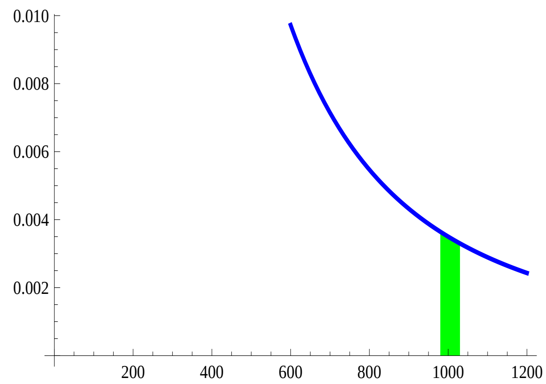


Figura 13.1: Gráfico de $CMg = CMg(x)$.

[2] Determine a variação total da receita $R = R(x)$, quando o número x de unidades produzidas de um certo produto aumenta de 100 para 101 unidades, se sua receita marginal é dada por:

$$RMg(x) = 1.3\,(32 - \sqrt{x + 10}).$$

Utilizando o método de substituição, fazemos $u = x + 10$, logo $du = dx$, se $x = 100$, $u = 110$ e se $x = 101$, $u = 111$, então:

$$\int_{100}^{101} 1.3\,(32 - \sqrt{x + 10})\,dx = \int_{110}^{111} 1.3\,(32 - \sqrt{u})\,du = 41.6\,x - 0.86(u)^{3/2}\Big|_{110}^{111} \cong 27.93.$$

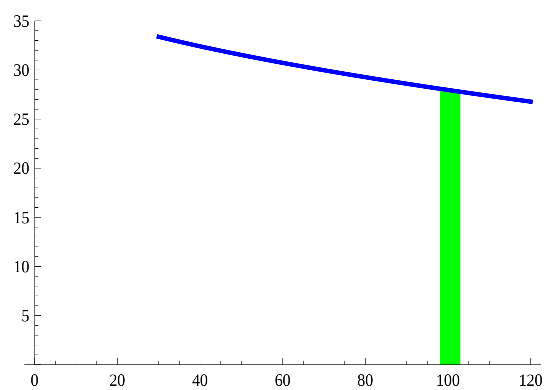


Figura 13.2: Gráfico de $RMg = RMg(x)$.

[3] Determine a variação do lucro $L = L(x)$, quando o número x de unidades produzidas de um certo produto, aumenta de 125 para 128 unidades, se seu lucro marginal é dado por:

$$LMg(x) = 11.2\left[50 - \frac{x\,\sqrt{x + 1}}{100}\right].$$

Devemos calcular:

$$\int_{125}^{128} 11.2\left[50 - \frac{x\,\sqrt{x + 1}}{100}\right] dx = 560\int_{125}^{128} dx - 0.112\int_{125}^{128} x\,\sqrt{x + 1}\,dx.$$

Resolvemos a última integral por substituição, fazendo $u = x + 1$, então $du = dx$ e $x = u - 1$, se $x = 125$, $u = 126$ e se $x = 128$, $u = 129$; logo:

$$\int_{125}^{128} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{126}^{129} \sqrt{u}\,(u-1)\,du = \frac{2\,u^{5/2}}{5} - \frac{2\,u^{3/2}}{3}\bigg|_{126}^{129}.$$

Logo:

$$\int_{125}^{128} 11.2\left[50 - \frac{x\sqrt{x+1}}{100}\right] dx = 1200.05.$$

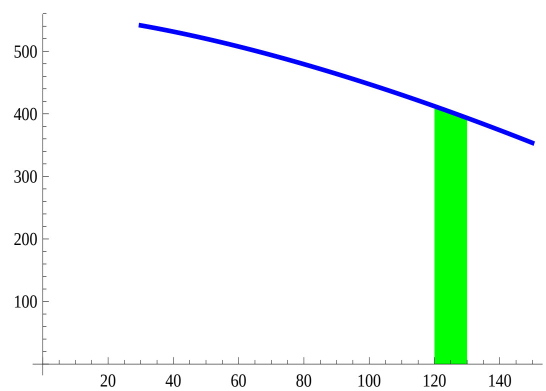


Figura 13.3: Gráfico de $LMg = LMg(x)$.

13.2 Valor Médio de uma Função

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. **O valor médio de** f **em** $[a,b]$ é denotado e definido por:

$$VM(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 13.2.

[1] O custo unitário $C = C(x)$ para produzir um certo artigo num período de 10 anos é dado por $C(x) = 25 - 0.2\,x + 0.5\,x^2 + 0.03\,x^3$, onde x é o tempo em meses. Determine o custo unitário médio durante o período.

Note que $0 \le x \le 120$, logo:

$$VM(C) = \frac{1}{120}\int_0^{120}\left[25 - 0.2\,x + 0.5\,x^2 + 0.03\,x^3\right] dx = 15373.$$

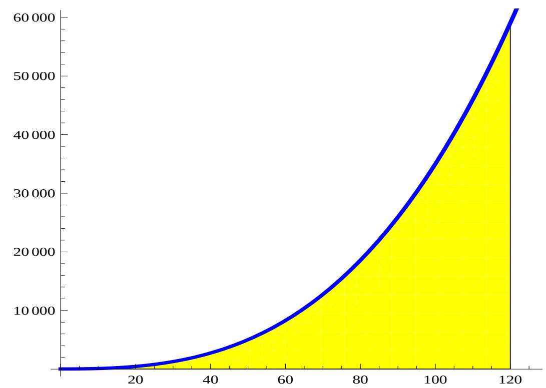


Figura 13.4: Exemplo [1].

[2] Uma distribuidora estoca 24000 caixas de seu principal produto para as vendas de natal. Em geral, as vendas são baixas no início do mês de dezembro e à medida que se aproxima o dia 24, as vendas aumentam de tal modo que após x dias desde primeiro de dezembro o estoque é dado por $e(x) = 24000 - 3\,x^3$, $1 \le x \le 20$. Determine o número médio de caixas disponíveis no período de 20 dias.

Neste caso $a = 1$ e $b = 20$, logo:

$$VM(R) = \frac{1}{19}\int_1^{20}\Big[24000 - 3\,x^3\Big]\,dx = \frac{70737}{4} \cong 17684.3.$$

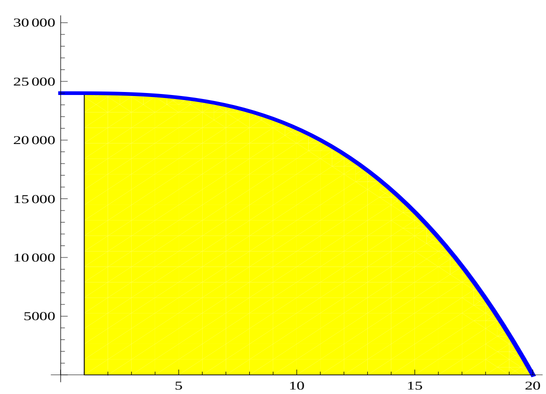


Figura 13.5: Exemplo [2].

[3] A receita de uma empresa com a venda de um certo produto foi modelada pela seguinte função $R(x) = 0.06\,x^2\sqrt{365 - x} + 500$ no período de um ano, onde x são os dias do ano. Determine a receita média diária do produto dutante um ano.

Note que $0 \le x \le 365$, logo:

$$VM(R) = \frac{1}{365}\int_0^{365}\big[0.06\,x^2\sqrt{365 - x} + 500\big]\,dx.$$

Calculemos a seguinte integral, utilizando substituição:

$$\int_0^{365} x^2 \sqrt{a-x}\, dx$$

Fazemos $u = a-x$, então $-du = dx$, $x = a-u$ e $x^2\sqrt{a-x} = (a-u)^2\sqrt{u} = a^2\sqrt{u} - 2\,a\sqrt{u^3} + \sqrt{u^5}$, onde $a = 365$; logo:

$$\begin{aligned}\int_0^a \left[x^2\sqrt{a-x}\right] dx &= -\left[a^2\int_a^0 \sqrt{u}\, du - 2\,a\int_a^0 \sqrt{u^3}\, du + \int_a^0 \sqrt{u^5}\, du\right]\\ &= -\left[\frac{2\sqrt{u^7}}{7} - \frac{4\,a\sqrt{u^5}}{5} + \frac{2\,a^2\sqrt{u^3}}{3}\right]_a^0\\ &= \left[\frac{2\sqrt{u^7}}{7} - \frac{4\,a\sqrt{u^5}}{5} + \frac{2\,a^2\sqrt{u^3}}{3}\right]_0^a\\ &= \frac{16\sqrt{a^7}}{105}.\end{aligned}$$

Logo,

$$VM(R) = \frac{1}{365}\int_0^{365} \left[0.06\,x^2\sqrt{365-x} + 500\right] dx = 23270.94 + 500 = 23770.9\, u.m.$$

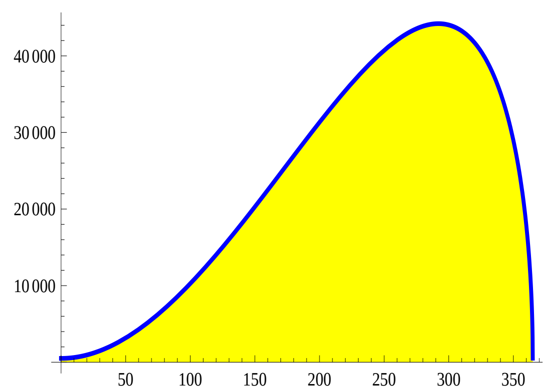


Figura 13.6: Exemplo [3].

13.3 Processos Contínuos

Diversos problemas em Economia e Administração podem ser tratados como processos contínuos. A seguir, apresentaremos alguns destes.

13.3.1 Valor Atual de um Fluxo de Renda

Se a função $P = P(t)$ representa o fluxo contínuo de renda de uma empresa, em u.m./ano,onde t é o tempo transcorrido em anos e se denotamos por s a taxa de juros anual, capitalizados continuamante, **o valor atual da receita** no intervalo de tempo $[a, b]$ é denotado e definido por:

$$VA = \int_a^b P(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Se a receita continua indefinidamente, **o valor atual total** da renda é:

$$V = \int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Exemplo 13.3.

[1] Uma empresa espera que sua receita nos próximos 10 anos seja $P(t) = 10^8\, t$. Se existe uma taxa de inflação de 10% ao ano, qual é o valor atual da receita.

Neste caso $a = 0$, $b = 10$ e $s = 0.1$, então:

$$VA = 10^8 \int_0^{10} t\, e^{-0.1t}\, dt = -10^9\, (10 + t)\, e^{-0.1t}\Big|_0^{10} = 2.64241 \times 10^9\, u.m.$$

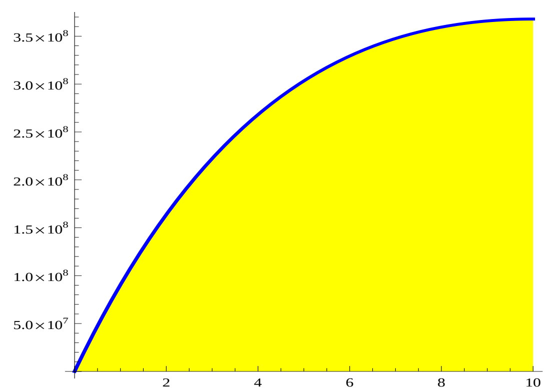


Figura 13.7: Exemplo [1].

[2] Uma empresa espera que sua receita decresça continuamente segundo $P(t) = 1000\, 2^{-t}$. Determine o valor atual se estes recursos são aplicados a uma taxa anual de 8%, continuamente.

Devemos calcular:

$$V = 1000 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-0.08t}}{2^t}\, dt.$$

Primeiramente, utilizando integração por partes, calculemos:

$$\mathbf{I} = \int_0^b \frac{e^{-0.08t}}{2^t}\, dt.$$

Fazemos $u = 2^{-t}$ e $dv = e^{-0.08t}\, dt$, então $du = -ln(2)\, 2^{-t}\, dt$ e $v = -\dfrac{e^{-0.08t}}{0.08}$ então:

$$\mathbf{I} = -\frac{e^{-0.08t}}{0.08\, 2^t}\Big|_0^b - \frac{ln(2)}{0.08} \int_0^b \frac{e^{-0.08t}}{2^t}\, dt = -\frac{1}{0.08\, 2^b\, e^{0.08b}} + \frac{1}{0.08} - \frac{ln(2)}{0.08}\, \mathbf{I},$$

donde:

$$\mathbf{I}\left[\frac{0.08+ln(2)}{0.08}\right]=-\frac{1}{0.08\,2^b\,e^{0.08b}}+\frac{1}{0.08}.$$

Logo:

$$\mathbf{I}=\frac{0.08}{0.08+ln(2)}\left[-\frac{1}{0.08\,2^b\,e^{0.08b}}+\frac{1}{0.08}\right]=\frac{1}{0.08+ln(2)}\left[-\frac{1}{2^b\,e^{0.08b}}+1\right].$$

Finalmente:

$$V=1000\int_0^{+\infty}\frac{e^{-0.08t}}{2^t}\,dt=\frac{1000}{0.08+ln(2)}\cong 1293.40\,u.m.$$

13.3.2 Valor Futuro de um Fluxo de Renda

Se a função $P=P(t)$ representa o fluxo contínuo de renda de uma empresa, em u.m./ano, t é o tempo transcorrido em anos e se denotamos por s a taxa de juros anual, capitalizados contínuamante, e T é o tempo da anuidade em anos, **o valor futuro do fluxo de renda** é denotado e definido por:

$$VF=e^{sT}\int_0^T P(t)\,e^{-st}\,dt.$$

Exemplo 13.4.

[1] Se se deposita anualmente 1500 reais numa conta que rende 2% de juros ao ano, capitalizados continuamente, qual é valor futuro do fluxo de renda após 10 anos?

$T=10$, $s=0.02$; logo:

$$VF=e^{0.2}\int_0^{10}1500\,e^{-0.02t}\,dt=16605.2\,u.m.$$

[2] Um certo produto gera para uma empresa uma renda contínua de 250.000 reais por ano. Tal renda é aplicada diariamente a uma taxa anual de 10%,capitalizados continuamente. Qual é valor futuro do fluxo de renda após 20 anos?

$T=20$, $s=0.1$; logo:

$$VF=e^{2}\int_0^{20}250.000\,e^{-0.1t}\,dt=15972750.25\,u.m.$$

13.3.3 Investimento e Formação de Capital

Se $K=K(t)$ representa o montante existente do capital de uma empresa em cada instante t e $I=I(t)$ representa a taxa de investimento líquido por período de tempo, então:

$$K(t)=\int I(t)\,dt$$

é o montante existente ou fluxo do montante no instante t; logo, o montante acumulado no intervalo $a\le t\le b$:

$$\int_a^b I(t)\,dt=K(b)-K(a).$$

Exemplo 13.5.

[1] Sendo $I(t) = 5\,t^{2/5}$, dado em milhões de reais e $K(0) = 100$, determine o fluxo do montante existente.

$$K(t) = 5\int t^{2/5}\,dt = \frac{25\,t^{7/5}}{7} + c.$$

Por outro lado, $100 = K(0) = c$, logo $K(t) = \dfrac{25\,t^{7/5}}{7} + 100.$

[2] Sendo $I(t) = 4\,t^{5/2}$, dado em milhões de reais por ano, determine o montante do capital no final de 5 anos.

Note que $1 \le t \le 5$, logo:

$$K(t) = 4\int t^{5/2}\,dt = \frac{8\,t^{7/5}}{7} + c.$$

$$4\int_1^5 t^{5/2}\,dt = \frac{8\,t^{7/2}}{7}\bigg|_1^5 \cong 318.29\,\text{milhões de reais.}$$

13.4 Excedentes

13.4.1 Excedente do Consumidor

Muitas vezes o preço que um consumidor paga por um produto ou serviço é menor do que realmente estaria disposto a pagar para não ficar sem ele.

A sobra ou **excedente do consumidor** é a diferença entre o preço que um consumidor estaria disposto a pagar por uma determinada quantidade de um produto e/ou serviço e o que realmente deve pagar por determinação do mercado.

O excedente do consumidor representa o benefício que o consumidor obtém quando paga um preço inferior ao que realmente estaria disposto a pagar. Utilizando o excedente do consumidor como medida de conforto do consumidor, se o excedente é grande, maior é o conforto do consumidor.

Para fixar idéias, consideremos que a função da demanda de um certo produto, produzido por uma empresa, é dada por $p = f(x)$, onde p é o preço unitário quando x unidades são demandadas. Denote por p_0 o preço de mercado do produto e x_0 a quantidade correspondente.

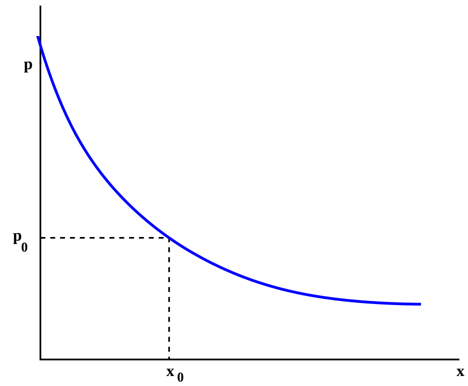


Figura 13.8: Gráfico da função $p = f(x)$.

Em geral, p_0 não é o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelo produto; para preços mais altos ainda existe demanda naturalmente menor que x_0. O **excedente do consumidor** é a área entre a curva $p = f(x)$ e a reta $p = p_0$. Isto é:

$$EC = \int_0^{x_0} \big[f(x) - p_0\big]\, dx.$$

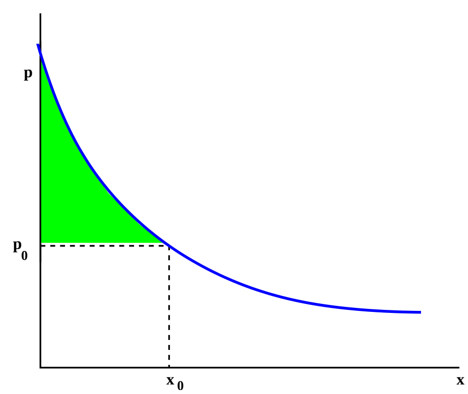


Figura 13.9: Excedente do consumidor.

De fato, o excedente do consumidor é a diferença entre o preço que o consumidor estaria disposto a pagar por uma quantidade menor do produto, para não ficar sem ele e o preço que paga pela quantidade que compra.

13.4.2 Excedente do Produtor

De forma análoga ao excedente do consumidor, existe uma sobra para o produtor. O excedente do produtor é a diferença entre o preço que o produtor estaria disposto a vender e o preço de venda imposto pelo mercado.

O excedente do produtor representa o benefício que o produtor obtém por vender seu produto a um preço superior ao que realmente estaria disposto a vender. Utilizando o excedente do produtor como medida de conforto, se o excedente é grande, maior é o conforto do produtor.

Para fixar idéias, consideremos que a função da oferta de um certo produto é dada por $p = f(x)$, onde p é o preço unitário quando x unidades são oferecidas. Denote por p_0 o preço de mercado do produto e x_0 a quantidade correspondente.

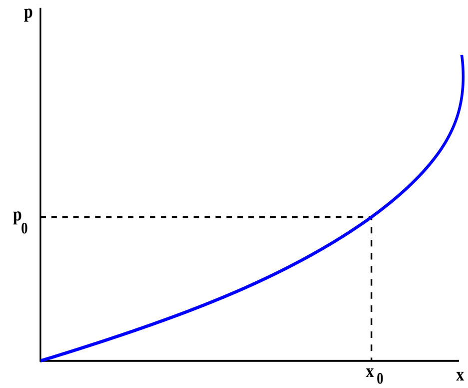


Figura 13.10: Gráfico da função $p = f(x)$.

A diferença entre o que o produtor recebe quando vende o produto pelo preço de mercado e o que receberia caso o vendesse por um preço inferior ao do mercado, é dita **excedente do produtor** e é a área entre a reta $p = p_0$ e a curva $p = f(x)$. Isto é:

$$EP = \int_0^{x_0} \big[p_0 - f(x)\big]\, dx.$$

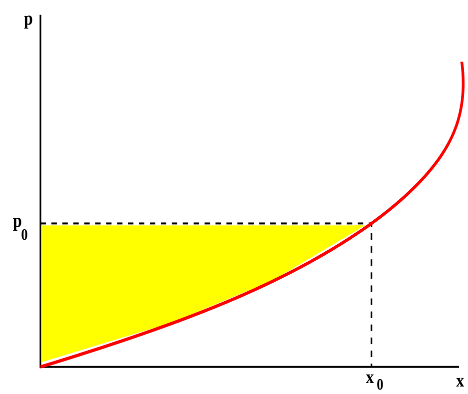


Figura 13.11: Excedente do produtor.

13.4.3 Excedente Total

O excende total da Economia de um mercado, onde o preço de mercado é o preço de equilíbrio, é a soma dos excedentes do consumidor e do produtor, isto é:

$$ET = EC + EP.$$

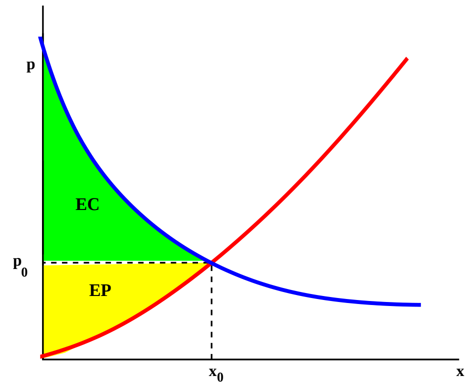


Figura 13.12: Excedente total

Logo, o excedente total de uma economia, onde o preço de mercado é o preço de equilíbrio é a área comprendida entre o gráfico da função de demanda e da função de oferta.

É comum utilizar a função de demanda e a função de oferta, afins:

$$\begin{cases} x &= -a\,p + b \\ x &= c\,p + d, \quad a,\, c > 0. \end{cases}$$

Sabemos que ponto de equilíbrio é (x_E, p_E), onde:

$$p_E = \frac{b-d}{a+c} \quad \text{e} \quad x_E = \frac{a\,d + b\,c}{a+c}.$$

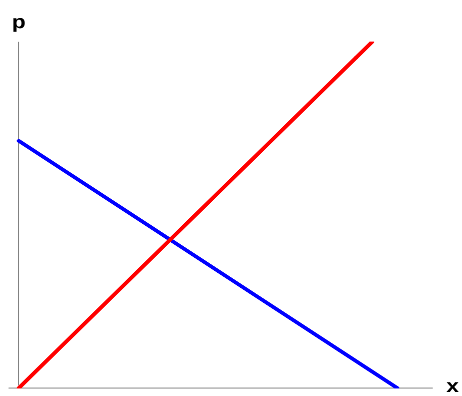


Figura 13.13: Equilibrio Linear.

Determinemos o excedente do consumidor se prevalecer o equilíbrio do mercado:

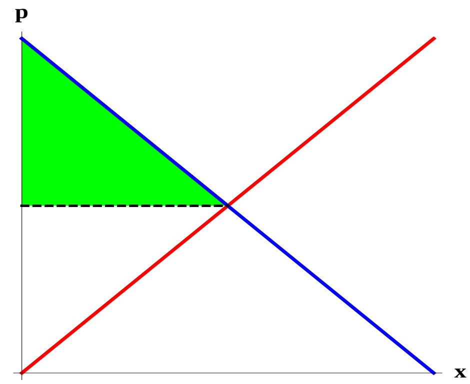


Figura 13.14: Excedente do consumidor.

$$EC = \int_0^{x_E} \left[\frac{b-x}{a} - p_E\right] dx = \int_0^{x_E} \left[\frac{b}{a} - \frac{b-d}{a+c} - \frac{x}{a}\right] dx = \frac{(b\,c + a\,d)^2}{2\,a\,(a+c)^2}.$$

Determinemos o excedente do produtor, se prevalecer o equilíbrio do mercado:

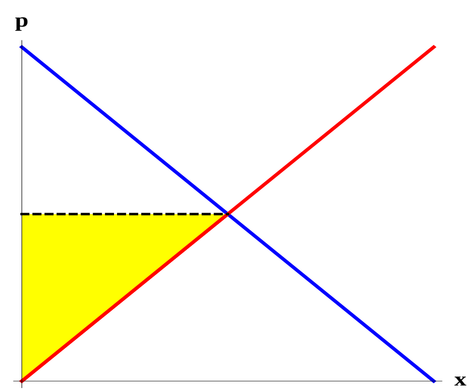


Figura 13.15: Excedente do produtor.

$$EP = \int_0^{x_E} \left[p_E - \frac{x-d}{c}\right] dx = \int_0^{x_E} \left[\frac{d}{c} + \frac{b-d}{a+c} - \frac{x}{c}\right] dx = \frac{(b\,c + a\,d)^2}{2\,c\,(a+c)^2}.$$

Logo, o excedente total da economia, no ponto de equilíbrio, é:

$$ET = EC + EP = \frac{(bc+ad)^2}{2\,a\,c\,(a+c)}.$$

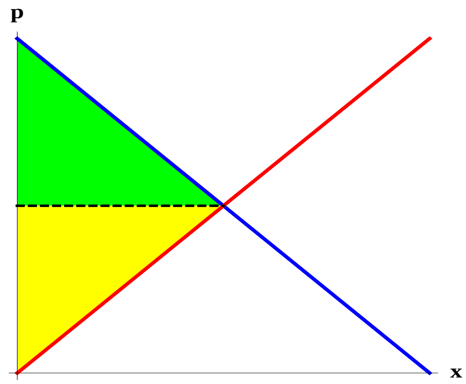


Figura 13.16: Excedente da economia.

Exemplo 13.6.

[1] Determine o excedente do consumidor de um produto que custa 20 u. m. e tem como função de demanda $f(x) = 40 - 2\,x$, se prevalecer o equilíbrio do mercado.

Note que $20 = 40 - 2\,x$, logo $x_0 = 10$ e $p_0 = 20$, logo:

$$EC = \int_0^{10} \big[20 - 2\,x\big]\,dx = 100\,u.m.$$

[2] Determine o excedente do produtor se o produto custa 30 u. m. e tem como função de oferta $f(x) = 4\,x + 10$, prevalecendo o equilíbrio do mercado.

Note que $30 = 4\,x + 10$, logo $x_0 = 5$ e $p_0 = 30$, logo:

$$EP = \int_0^{5} \big[20 - 4\,x\big]\,dx = 50\,u.m.$$

[3] Se a demanda de um certo produto é $100\,p = 1600 - x^2$ e a oferta é $400\,p = x^2 + 2400$, ache o excedente total da economia, se prevalecer o equilíbrio do mercado.

Primeiro observemos que o ponto de equilíbrio é $x_0 = 20\sqrt{2}$ e $p_0 = 8$. Determinemos EC:

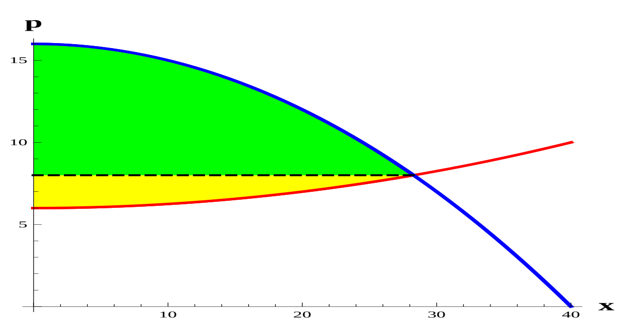


Figura 13.17: Excedente da economia.

$$EC = \int_0^{20\sqrt{2}} \left[8 - \frac{x^2}{100}\right]dx = \frac{320\sqrt{2}}{3} \cong 150.83.$$

Determinemos EP:

$$EP = \int_0^{20\sqrt{2}} \left[2 - \frac{x^2}{400}\right] dx = \frac{80\sqrt{2}}{3} \cong 37.71.$$

Finalmente:

$$ET \cong 188.54.$$

13.5 Probabilidades

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrável é chamada função de densidade de probabilidade se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Assim denotamos e definimos a probabilidade de um número x estar comprendido entre a e b ($a < b$); por:

$$P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Analogamente definimos as outras possibilidades:

$$P(a < x) = P(a \leq x) = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$
$$P(x < b) = P(x \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$$

Também podemos definir o valor esperado ou esperança do número x, como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

onde f é a função de densidade de probabilidade. Por exemplo, se f mede o lucro de uma carteira de ações, a esperança é o lucro esperado que pode propocionar tais ações.

E a variância do número x é definida por:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x - E(x)\big]^2 f(x)\, dx$$

A variável independente x é chamada variável aleatória contínua **(v.a.c.)** A variância mede a dispersão ou espalhamento dos pontos ao redor da média. Por exemplo, se temos uma carteira de ações, a variância mede o risco das ações.

Proposição 13.1.

$$V(x) = E(x^2) - \big[E(x)\big]^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x - E(x)\big]^2 f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x^2 - 2\,xE(x) + \big[E(x)\big]^2\big] f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - 2\,E(x) \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx + \big[E(x)\big]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= E(x^2) - 2\big[E(x)\big]^2 + \big[E(x)\big]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= E(x^2) - \big[E(x)\big]^2.
\end{aligned}$$

Utilizamos o fato de que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, pois f é a função de densidade de probabilidade.

O desvio padrão de uma função de densidade de probabilidade é definido e denotado por:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}.$$

σ_x fornece uma medida de dispersão da distribuição dos valores de x.

Exemplo 13.7.

1. Seja:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 > x \\ a\,x & \text{se} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ a\,(1-x) & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

(a) Determine a constante a tal que f seja uma função de densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(x \le \frac{1}{2})$ e $P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4})$.

(c) Determine $E(x)$ e $V(x)$.

(a) Devemos ter:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1;$$

logo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} a\,x\,dx + \int_{1/2}^{1} a\,(1-x)\,dx = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} = \frac{a}{4}$$

então, $\dfrac{a}{4} = 1$ e $a = 4$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 > x \\ 4\,x & \text{se} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 4\,(1-x) & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

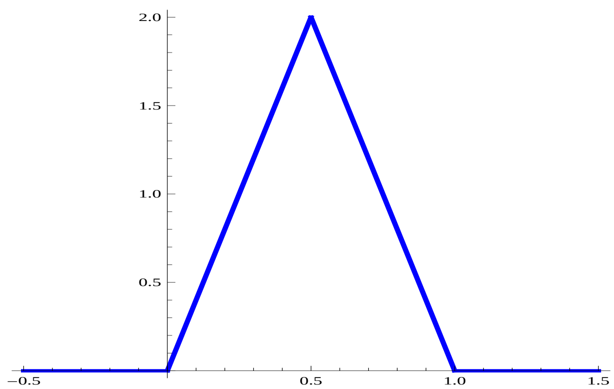


Figura 13.18: Gráfico da distribuição f.

(b) Calculamos

$$P(x \le \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 4\,x\,dx = \frac{1}{2}$$
$$P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}) = \int_{1/2}^{3/4} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{3/4} 4\,(1-x)\,dx = \frac{3}{8}.$$

(c) Calculamos:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 4\,x^2\,dx + \int_{1/2}^{1} 4\,(x-x^2)\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$
$$V(x) = E(x^2) - \big[E(x)\big]^2.$$

Determinemos:

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 4\,x^3\,dx + \int_{1/2}^{1} 4\,(x^2-x^4)\,dx = \frac{1}{16} + \frac{47}{120} = \frac{109}{240};$$

logo:

$$V(x) = \frac{109}{240} - \frac{1}{4} = \frac{49}{240}.$$

2. Se a venda de cimento (em toneladas), de uma fábrica segue a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\,(1-x^2) & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Qual é valor esperado de vendas? Determine o desvio padrão.

O valor esperado é:

$$E(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}\,(x - x^3)\,dx = \frac{3}{8} \cong 0.375.$$

Por outro lado:

$$E(x^2) = \int_0^1 \frac{3}{2}\,(x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{5} \cong 0.2;$$

logo:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{E(x^2) - \big[E(x)\big]^2} = 0.24367.$$

A fábrica venderá mais ou menos 0.244 toneladas de cimento.

13.5.1 Distribuição Uniforme

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição uniforme sobre o intervalo $[a, b]$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Observe que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1.$$

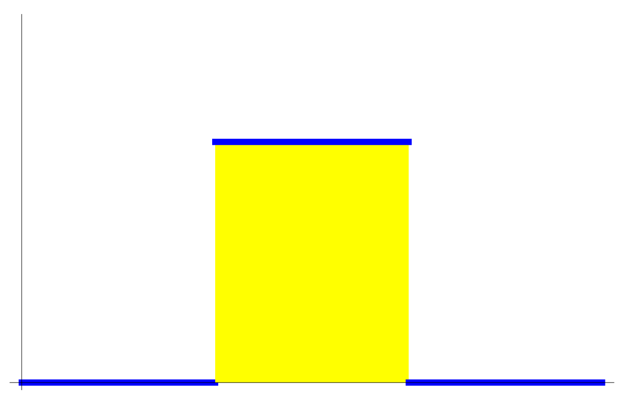


Figura 13.19: Gráfico da distribuição f.

O valor esperado do número x:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}.$$

A variância:

$$V(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

O desvio padrão:

$$\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Exemplo 13.8.

[1] Um ponto é escolhido aleatóriamente no intervalo $[0, 10]$. Determine a probabilidade que que o ponto escolhido esteja entre 8 e 8.6.

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição uniforme sobre o intervalo $[0, 10]$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{se} \quad 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Logo:

$$P(8 \le x \le 8.5) = \frac{1}{10} \int_8^{8.6} dx = \frac{0.6}{10} = 0.06.$$

[2] Suponha que a v.a.c. tem distribuição uniforme com esperança igual a 4 e a variância igual $\dfrac{4}{3}$. Determine $P(x \le 4)$ e $P(3 \le x \le 4)$.

Sabemos que $E(x) = \dfrac{a+b}{2} = 4$ e $V(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{4}{3}$, logo:

$$\begin{cases} a+b &= 8 \\ b-a &= 4. \end{cases}$$

Donde $a = 2$ e $b = 6$. Então:

$$P(x \le 4) = \int_2^4 \frac{dx}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 50\%$$
$$P(3 \le x \le 4) = \int_3^4 \frac{dx}{4} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 25\%.$$

[3] Um atacadista vende entre 100 e 200 toneladas de grãos, com distribuição uniforme de probabilidade. Sabe-se que o ponto de equilíbrio para esta operação corresponde a uma venda de 130 toneladas. Determine a esperança, a variância e a probabilidade de que o comerciante tenha um prejuízo em um determinado dia.

Note que $a = 100$ e $b = 200$, então:

$$E(x) = \frac{100+200}{2} = 150$$
$$V(x) = \frac{(200-100)^2}{12} = 833.3.$$

Como o equilíbrio (não se perde nem se ganha) acontece quando vende 130 toneladas, devemos calcular:

$$P(x < 130) = \int_{100}^{130} \frac{dx}{100} = \frac{30}{100} = 0.3.$$

Isto é, tem uma probabilidade de 30%.

13.5.2 Distribuição Exponencial

Esta função de densidade de distribuição é frequentemente utilizada para determinar a vida útil de equipamentos eletrônicos e do tempo entre ocorrências de eventos sucessivos, como por exemplo, o tempo entre chegadas de clientes a uma agência bancária.

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial de parâmetro α, por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

$\alpha > 0$. Observe que $f(x) \geq 0$, para todo x.

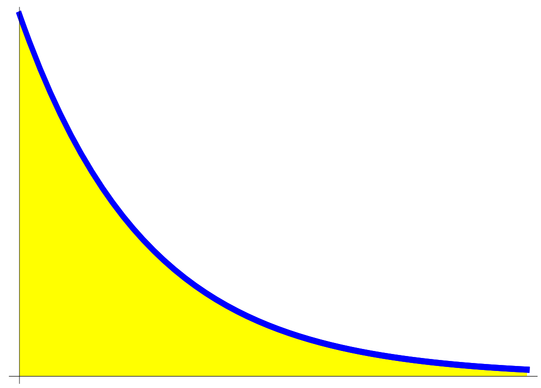


Figura 13.20: Gráfico da distribuição exponencial.

Note que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \alpha \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} (1 - e^{-\alpha b}) = 1.$$

Por outro lado, a probabilidade de que um número $x \in (a, b)$ é:

$$P(a \leq x \leq b) = \alpha \int_{a}^{b} e^{-\alpha x}\, dx = e^{-a\,\alpha} - e^{-b\,\alpha}$$

O valor esperado do número x:

$$E(x) = \alpha \int_{0}^{+\infty} x\, e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}.$$

A variância:

$$V(x) = \alpha \int_{0}^{+\infty} \big[x - \frac{1}{\alpha}\big]^2\, e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

O desvio padrão:

$$\sigma_x = \frac{1}{\alpha}.$$

Exemplo 13.9.

[1] Para determinado tipo de baterias de telefone celular, a função de densidade de probabilidade dara que x horas seja o tempo de vida útil de uma bateria escolhida aleatoriamente é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/20}}{20} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que uma bateria escolhida aleatoriamente tenha um tempo de vida útil entre 10 a 15 horas e de uma que funcione pelo menos 50 horas. Determine a esperança e a variância.

Devemos calcular $P(10 \leq x \leq 15)$ e $P(x \geq 50)$, então:

$$P(10 \leq x \leq 15) = \int_{10}^{15} \frac{e^{-x/20}}{20}\, dx = 0.134 \cong 13.4\%$$

$$P(x \geq 50) = \int_{50}^{+\infty} \frac{e^{-x/20}}{20}\, dx = 0.082 \cong 8.2\%.$$

Determinemos a esperança e a variância:

$$E(x) = 20 \quad \text{e} \quad V(x) = 400.$$

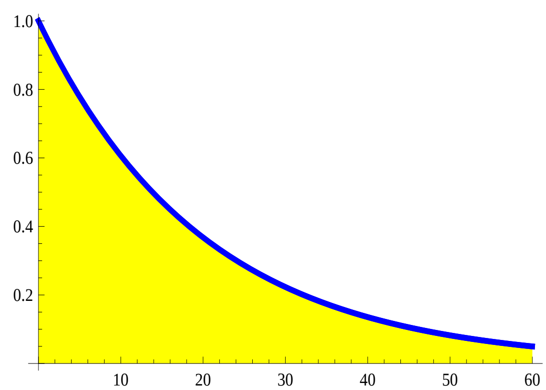


Figura 13.21: Gráfico da distribuição exponencial do exemplo [1].

[2] O tempo de espera entre o pedido de atendimento num banco é uma v.a.c. com distribuição exponencial com média igual a 10 minutos. Determine a probabilidade do tempo de espera superior a 10 minutos. Ache a esperança e a variância.

Note que:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1\, e^{-0.1x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Logo, $P(10 \leq x) = \displaystyle\int_{10}^{+\infty} 0.1\, e^{-0.1x} = e^{-1} \cong 0.368 = 36.8\%$, e:

$$E(x) = 10\, min. \quad \text{e} \quad V(x) = 100\, min.$$

13.5.3 Distribuição de Pareto

É uma distribuição frequentemente utilizada em Economia no estudo da distribuição de renda de uma população.

Definimos a função de densidade de probabilidade da distribuição de Pareto, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\,\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{se} \quad x \geq \beta \\ \\ 0 & \text{se} \quad x < \beta. \end{cases}$$

$\alpha > 1$ e $\beta > 0$. O parâmetro β pode ser interpretado como o ingresso mínimo de uma população e o parâmetro α pode ser interpretado como a dispersão dos ingressos.

Note que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{\alpha\,\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx = \lim_{m\to+\infty} -\frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha}}\bigg|_{\beta}^{m} = 1.$$

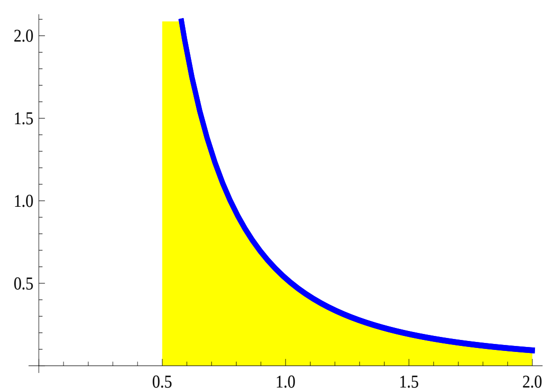


Figura 13.22: Gráfico de f, para $\alpha = 3/2$ e $\beta = 1/2$.

A esperança, a veriância e o desvio padrão, são:

$$E(x) = \alpha\,\beta^{\alpha} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{\alpha\,\beta}{\alpha - 1}$$

$$V(x) = \frac{\alpha\,\beta^{2}}{(\alpha-1)^{2}\,(\alpha-2)}$$

$$\sigma_x = \frac{\beta}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}.$$

Exemplo 13.10.

1. Uma distribuição de Pareto tem esperança e variância 2 e $\dfrac{1}{2}$, respectivamente.

(a) Determine a distribuição.

(b) Calcule $P(x \geq 10)$.

(a) Temos:

$$E(x) = \frac{\alpha\,\beta}{\alpha-1} = 2, \quad V(x) = \frac{\alpha\,\beta^2}{(\alpha-1)^2\,(\alpha-2)} = \frac{1}{2};$$

logo, da esperança: $\alpha = -\dfrac{2}{\beta-2}$; então da variância: $\beta = \dfrac{3}{2}$ e $\beta = 3$; como $\alpha > 1$ temos $\beta = \dfrac{3}{2}$ e $\alpha = 4$, e:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{81}{4\,x^5} & \text{se} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ \\ 0 & \text{se} \quad x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

(b) Calculamos:

$$P(x \geq 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{81}{4\,x^5}\,dx = \frac{81}{160000} \cong 0.00050625.$$

2. Numa população os ingressos são distribuidos segundo uma distribuição de Pareto, com $\alpha = 3$ e $\beta = 1000$.

(a) Qual é a probabilidade de que uma pessoa ganhe mais de 5000 u.m?

(b) Qual é a probabilidade de que uma pessoa ganhe entre 2000 e 3000 u.m?

(c) Qual é a probabilidade de que uma pessoa ganhe abaixo da média u.m?

(a) Calculamos:

$$P(x \geq 5000) = 3 \times 1000^3 \int_{5000}^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{125} \cong 0.008.$$

(b) Calculamos:

$$P(2000 \leq x \leq 3000) = 3 \times 1000^3 \int_{2000}^{3000} \frac{dx}{x^4} = \frac{19}{216} \cong 0.087963.$$

(c) Calculamos:

$$E(x) = 3 \times 1000^3 \int_{1000}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 1500;$$

logo:

$$P(x < 1500) = 3 \times 1000^3 \int_{1000}^{1500} \frac{dx}{x^4} = \frac{19}{27} \cong 0.703704.$$

3. Se em duas cidades, os ingressos seguem as seguintes distribuições de Pareto, respectivamente:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \times 1000^4}{x^5} & \text{se} \quad x \geq 1000 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x < 1000 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{5 \times 1200^5}{x^6} & \text{se} \quad x \geq 1200 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x < 1200. \end{cases}$$

(a) Qual é o ingresso médio de cada cidade e o desvio padrão?

(b) Em qual cidade é mais provavel que uma pessoa ganhe mais de 2000 u.m?

(c) Em qual cidade é mais provavel que uma pessoa ganhe entre 2000 e 3000 u.m?

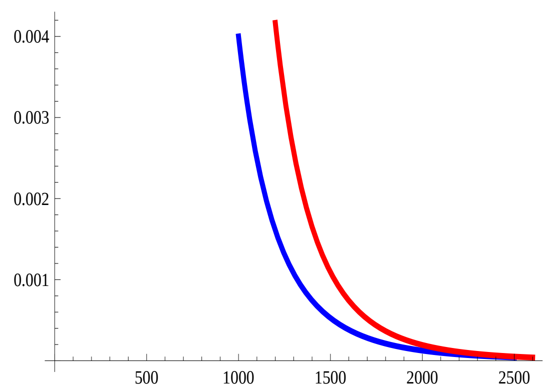


Figura 13.23: Gráfico de f_1 e f_2, respectivamente.

Denotemos por E_i a média relativa á distribuição f_i; analogamente as outras quantidades.

(a) Sabemos que $E(x) = \dfrac{\alpha\,\beta}{\alpha - 1}$; logo:

$$E_1(x) = \frac{4000}{3} = 1333.33 \quad \text{e} \quad E_2(x) = 1500.$$

Por outro lado, o desvio padrão é: $\sigma_x = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha - 2}}$; logo:

$$\sigma_{1x} = \frac{1000\sqrt{2}}{3} = 471.405 \quad \text{e} \quad \sigma_{2x} = 100\sqrt{15} = 387.298.$$

Na segunda cidade é provável ganhar, em média mais.

(b)

$$P_1(2000 < x) = 4 \times 1000^4 \int_{2000}^{\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$P_2(2000 < x) = 5 \times 1200^5 \int_{2000}^{\infty} \frac{dx}{x^6} = \frac{243}{3125} = 0.07776.$$

Na segunda cidade é provável ganhar mais de 2000 u.m.

(c)

$$P_1(2000 \le x \le 3000) = 4 \times 1000^4 \int_{2000}^{3000} \frac{dx}{x^5} = \frac{65}{1296} = 0.0501543$$

$$P_2(2000 \le x \le 3000) = 5 \times 1200^5 \int_{2000}^{3000} \frac{dx}{x^6} = \frac{211}{3125} = 0.06752.$$

13.5.4 Distribuição Normal ou Gaussiana

Esta é a função de distribuição mais importante; ela está associada a erros de medidas, tempos de reação de experimentos psicológicos e indicadores econômicos.

Definimos a função de densidade de probabilidade da distribuição normal, por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\,\sigma^2}, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

onde $\mu \ge 0$ e $\sigma > 0$.

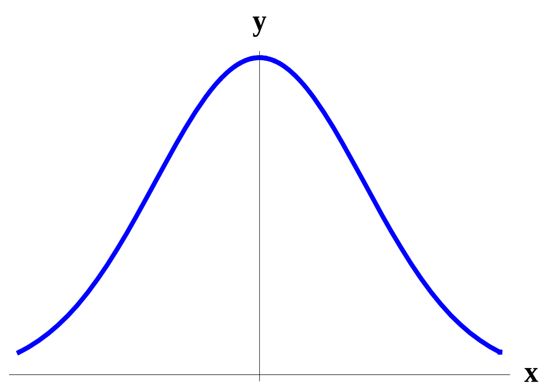


Figura 13.24: Gráfico de f, para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

A constante μ é dita média e σ é dito desvio padrão. A verificação de que esta função é uma densidade de probabilidade, fica fora dos objetivos do texto, pois é necessário utilizar integração em várias variáveis. Por enquanto ficaremos com o seguinte resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-4ac)/4a}.$$

Para ver a prova deste fato, veja o VOLUME II dos mesmos autores. Logo, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\,\sigma^2}\,dx = 1,$$

De forma análoga, é possível verificar que:

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-(x-\mu)^2/2\,\sigma^2}\,dx = \mu.$$

A variância:

$$V(x) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x-\mu\big]^2\,e^{-(x-\mu)^2/2\,\sigma^2}\,dx = \sigma^2.$$

Devido a complexidade da integral envolvida nos cálculos que devem ser feitos quando é utilizada a distribuição normal, os estatísticos criaram uma tabela, única, da chamada distribuição normal padrão; isto é, se $\sigma = 1$ e $\mu = 0$. É possível provar que qualquer distribuição normal pode ser transformada numa distribuição normal padrão, fazendo a mudança:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Finalmente, observamos que:

$$\frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \int e^{-(x-\mu)^2/2\,\sigma^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,erf\Big(\frac{\mu-x}{\sqrt{2}\,\sigma}\Big).$$

Em geral, estas integrais são calculas utilizando algum software matemático, como por exemplo, MAPLE.

Exemplo 13.11.

[1] Um certo tipo de bateria de celular tem em média, duração de 3 anos com desvio standard $\sigma = 0.5$. Se a duração das baterias é normalmente distribuida, determine a probabilidade de que uma bateria dure menos que 2.3 anos.

$\sigma = 0.5$ e $\mu = 3$, então $f(x) = 0.797885\,e^{-2\,(-3+x)^2}$:

$$P(x < 2.3) = \int_0^{2.3} f(x)\,dx = 0.0807567.$$

[2] Numa prova para concurso, a média das notas foi de 82 com desvio standard $\sigma = 5$. O número de pessoas que obtiveram notas entre 88 e 94 foi 8; determine o número de pessoas presente na prova.

$\sigma = 5$ e $\mu = 82$, então $f(x) = 0.0797885\,e^{-0.02(-82+x)^2}$. Supondo que as notas são números inteiros:

$$P(87.5 < x < 94.5) = \int_{87.5}^{94.5} f(x)\,dx = 0.129456.$$

Logo, as 8 pessoas que obtiveram notas entre 88 e 94 representam 12.95% dos alunos; então o total de alunos é aproximadamente, 62.

13.5.5 Distribuição Gama

A função $\Gamma = \Gamma(x)$ estudada nos capítulos anteriores dá origem à seguinte distribuição, que é utilizada nos fenômenos limitados, como por exemplo, os intervalos de tempo de espera numa fila de banco ou para analisar o tempo de permanência de pacientes num hospital.

A função de densidade de probabilidade Gama, de parametros $\lambda > 0$ e $\nu \in \mathbb{R}$, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} \, e^{-\lambda\,x} \, x^{\nu-1} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Note que se $\nu = 1$, temos a densidade de probabilidade exponencial. Utilizando a definição da função gama, obtemos que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,x} \, x^{\nu-1} \, dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\lambda^\nu}.$$

Donde segue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1.$$

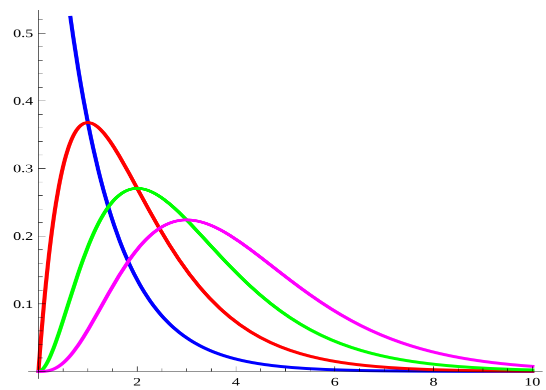


Figura 13.25: Gráfico de f, para $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ e $\lambda = 1$.

Por outro lado, é possível verificar que:

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x\, f(x) \, dx = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,x} \, x^{\nu} \, dx.$$

De fato, fazendo $t = \lambda\,x$, então $dt = \lambda\,dx$ e $x = \dfrac{t}{\lambda}$; logo:

$$E(x) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,x} \, x^{\nu} \, dx = \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \, t^{\nu} \, dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda\,\Gamma(\nu)} = \frac{\nu\,\Gamma(\nu)}{\lambda\,\Gamma(\nu)} = \frac{\nu}{\lambda}.$$

Analogamente:

$$V(x) = \frac{\nu}{\lambda^2}.$$

Exemplo 13.12.

1. O tempo, em horas, utilizado para a montagem de um carro segue a distribuição gama. Se a esperança e a variância são 2 e 1, respectivaments. Estime a probabilidade de que um carro seja montado pelo menos em uma hora.

Sabemos que $E(x) = \dfrac{\nu}{\lambda}$ e $V(x) = \dfrac{\nu}{\lambda^2}$; logo:

$$\frac{\nu}{\lambda} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\nu}{\lambda^2} = 1 \Longrightarrow \lambda = 2 \quad \text{e} \quad \nu = 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} 16\, e^{-2\,x}\, x^3 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

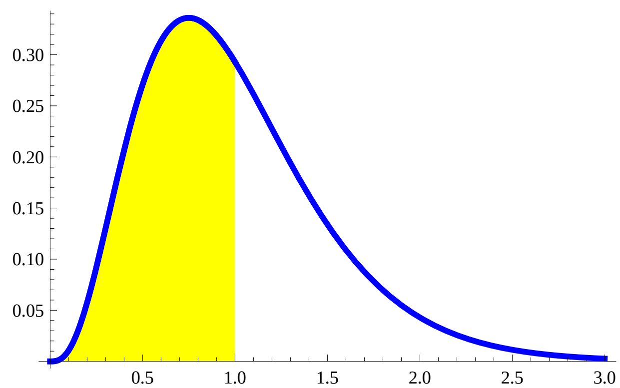


Figura 13.26: Gráfico de $P(x < 1)$.

$$P(x < 1) = 16 \int_0^1 e^{-2\,x}\, x^3\, dx \cong 0.212449.$$

2. Se o tempo de sobrevivência no mercado, em anos, de um certo tipo de microempresa segue a distribuição gama para $\lambda = 0.81$ e $\nu = 7.81$, determine:

(a) O tempo médio de sobrevivência destas microempresas.

(b) Qual é a probabilidade de que a sobrevivência seja menor que 10 anos.

$$f(x) = \begin{cases} 0.0000559896\, e^{-0.81\,x}\, x^{6.81} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

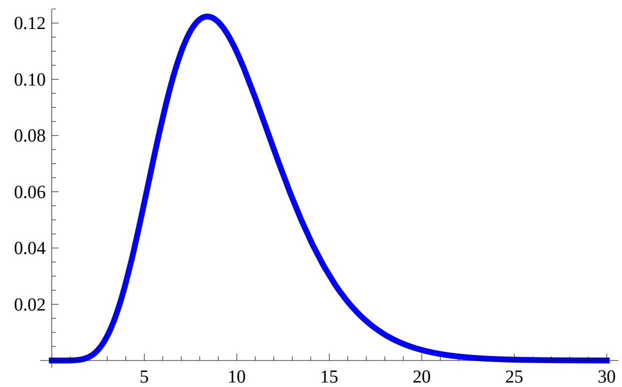


Figura 13.27: Gráfico de f.

(a) Sabemos que $E(x) = \dfrac{\nu}{\lambda} = \dfrac{7.81}{0.81} = 9.64198$; o tempo médio de sobrevivência é 10 anos.

(b)

$$P(x < 10) = 0.0000559896 \int_0^{10} e^{-0.81\,x}\, x^{6.81}\, dx \cong 0.587755.$$

É de quase 60%.

Um caso especial da distribuição gama chamada densidade de probabilidade de distribuição χ^2, é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\, e^{-x/2}\, x^{(\nu/2)-1} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

$\nu \in \mathbb{R}$. Verifiquemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x/2}\, x^{(\nu/2)-1}\, dx = 1.$$

Determinemos a integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\, x^{(\nu/2)-1}\, dx,$$

fazendo $u = \dfrac{x}{2}$, logo $2\,du = dx$ e:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\, x^{(\nu/2)-1}\, dx = 2 \cdot 2^{(\nu/2)-1} \int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{(\nu/2)-1}\, du = 2^{(\nu/2)}\, \Gamma\big(\frac{\nu}{2}\big).$$

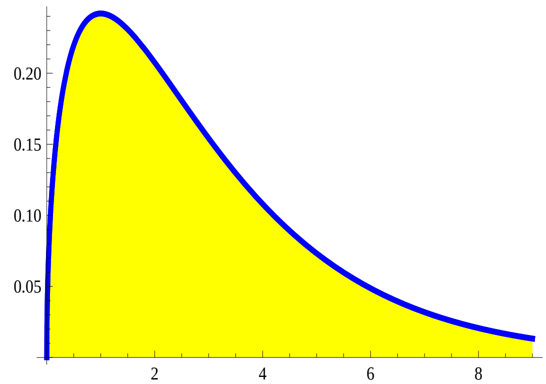


Figura 13.28: Gráfico de f, para $\nu = 3$.

Analogamente, podemos ver que:

$$E(x) = \nu \quad \text{e} \quad V(x) = 2\,\nu.$$

13.6 Exercícios

1. Seja:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 & \text{se} \quad |x| > 3 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \le 3 \end{cases}$$

   Determine a de modo que f seja função de densidade de probabilidade.

2. Determine k para que $f(t) = e^{k\,|t|}$ seja função de densidade de probabilidade.

3. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,x^{2\,n+1}\,dx = \frac{n!}{2}$; $n \in \mathbb{N}$.

4. Se o erro envolvido na medição de certos instrumentos eletrônicos tem uma distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0.00123\,(4 - x^2) & \text{se} \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Calcule $P(x > 0)$ e $P(-1 < x < 1)$.

   (c) Qual é a esperança e σ_x?

5. Se a concentração de um certo contaminante numa lagoa tem uma distribuição de probabilidade uniforme em $[0, 20]$ partes por milhão. Se considera tóxica na concentração de 8 ou mais partes por milhão, pergunta-se:

   (a) Qual é a probabilidade de coletar uma amostra em que a concentração seja tóxica?

   (b) Qual é a esperança e a variância?

   (c) Qual é a probabilidade de coletar uma amostra em que a concentração seja exatamente 10.

6. Se o consumo familiar de um certo produto tem uma distribuição de probabilidade uniforme com esperança igual a 10 e variância igual a 1, determine a probabilidade de que o consumo esteja entre 8 e 12.

7. O tempo para consertar um liquidificador tem uma distribuição de probabilidade exponencial:

$$f(x) = \begin{cases} 0.04545\,e^{-x/22} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \le 0, \end{cases}$$

   isto é, em média 22 minutos.

(a) Determine a probabilidade de que o tempo do conserto seja menor que 10 minutos.

(b) Se o custo do conserto é de 20 u. m. por cada 30 minutos ou fração de reparos; qual é a probabilidade de que um conserto custe 40 u.m?

(c) Para um planejamento futuro, quanto tempo se deve utilizar em cada conserto para que a probabilidade de que qualquer tempo de reparo maior que o tempo dado seja de 0.1?

8. Numa fábrica de circuitos impressos, a vida útil desses circuitos tem uma distribuição descrita pela densidade de probabilidade exponencial:

$$f(x) = \begin{cases} 0.002\, e^{-0.002x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Qual é a probabilidade dos circuitos funcionarem em menos de 600 horas?

(b) Qual é a probabilidade dos circuitos continuarem funcionando após 600 horas?

9. Os marcapassos funcionam com probabilidade exponencial de média de 16 anos.

(a) Qual é a probabilidade de que uma pessoa que já tenha um marcapasso deva reimplantar um novo antes de 20 anos?

(b) Se o marcapasso estivesse funcionando durante 5 anos, qual é a probabilidade de que o paciente deva reimplantar outro após 25 anos?

10. Numa população os ingressoa são distribuidos segundo uma distribuição de Pareto, com $\alpha = 5$ e $\beta = 2200$.

(a) Qual é a probabilidade de que uma pessoa ganhe mais de 1000?

(b) Qual é a probabilidade de que uma pessoa ganhe entre 1000 e 1500?

(c) Qual é a probabilidade de que uma pessoa ganhe abaixo da média?

11. Se em três cidades, os ingressos seguem as seguintes distribuições de Pareto para $\alpha = 3$, $\beta = 1200$, $\alpha = 4$, $\beta = 1300$ e $\alpha = 5$, $\beta = 1500$, respectivamente.

(a) Qual é o ingresso medio de cada cidade e o desvio padrão?

(b) Em qual cidade é mais probavel que uma pessoa ganha mais de 2000 u.m?

(c) Em qual cidade é mais probavel que uma pessoa ganha entre 2000 e 3000?

12. Numa prova de vestibular, a média das notas foi de 50 com desvio standard $\sigma = 6$. O número de pessoas que obtiveram notas entre 70 e 90 foi 120. Utilize um software matemático para determinar o número de pessoas presentes no exame.

13. Se o tempo utilizando um computador com time-sharing segue uma distribuição gama com média de20 minutos e variância de 80 minutos, pede-se:

    (a) Determine ν e λ.

    (b) Qual é a probabilidade de um usuário utilizar o computador no máximo 20 minutos?

    (c) Qual é a probabilidade de um usuário utilizar o computador entre 20 e 40 minutos?

14. Se o tempo de sobrevivência de um certo tipo de cirugia, em anos, segue a distribuição gama para $\lambda = 0.9$ e $\nu = 81$; determine:

    (a) O tempo médio de sobrevivência.

    (b) Qual é a probabilidade de sobrevivência seja menor de 5 anos.

Capítulo 14

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

14.1 Introdução

1. (a) $[0, +\infty)$ (b) $[1, +\infty)$ (c) $(-\infty, 1]$ (d) $\mathbb{R}$ (e) 0 (f) $2 \pm \sqrt{2}$ e 0 (g) $-7/2$ (h) 0 e 4

3. (a) $2\sqrt{41}$ (b) $3\sqrt{17}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{97}$ (e) $\sqrt{2}$ (f) $\sqrt{18 + 2\pi^2}$ (g) $\sqrt{337}$ (h) $\sqrt{265}$ (i) 4 (j) $3 - \sqrt{3}$

7. Pontos situados sobre a reta $x + y = 4$ ou $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 4\}$.

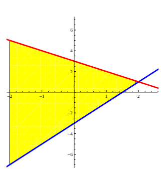
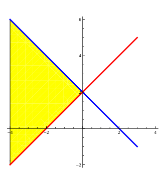
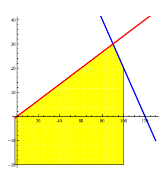
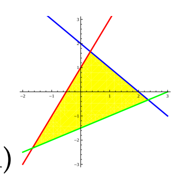
9. 10 11. $2x + 3y - 4 = 0$ 15. (a) $-3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$ (b) $k = \pm 3\sqrt{2}$

19. (a) $a = 8$, $b = -24$ (b) não existe $b \in \mathbb{R}$ (c) $a = 5$, $b = 2$ (d) $a = -13$, $b = 2$

23. $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, -1, 2/3

25. (a) $\emptyset$ (b) $\emptyset$ (c) $[-2, 8/7]$ (d) $(-\infty, -1/2]$ (e) $(-\infty, -4]$ (f) $(-2, 1)$

27.

(a)  (b)  (c)  (d) 

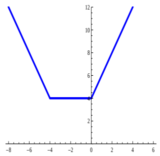
29. $(0, 4]$

31. $x < 2.79955$ e $x > 357.2$

14.2 Funções

1. (a) x^2 (b) $\frac{4\pi x^3}{3}$ (c) πx^3 (d) $\frac{10\pi x^3}{3}$

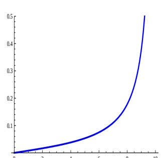
3. $f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{se} \quad x < -4 \\ 4 \quad \text{se} & -4 \le x < 0 \\ 2x + 4 & \text{se} \quad x \ge 0 \end{cases}$



5. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-7/2\}$; $f(1/x) = \frac{1-x}{2+7x}$; $(f(x))^{-1} = \frac{2x+7}{x-1}$
7. (a) $x+a$ (b) $x^2 - ax + a^2$ (c) $x+a+1$ (d) $-\frac{1}{ax}$ (e) 2 (f) $-\frac{x+a}{a^2x^2}$ (g) x^2+ax+a^2+1 (h) $-\frac{x^2+ax+a^2}{a^3x^3}$ (i) $\frac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{1+x}}{a-x}$ (j) $-\frac{(x+a)(x^2+a^2)}{a^4x^4}$
9. Não; $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ 11. (a) x^2+2x+2; $2x - x^2 - 2$; $2x^3+4x$; $\frac{2x}{x^2+2}$
13. $a = 3$; $b = -\frac{3}{4}$ ou $a = -3$ e $b = \frac{3}{2}$
15. (a) $3x+7$ (b) $\sqrt{x^2+2}$ (c) $\frac{x^2+4}{x^2+1}$ (d) $-4x^2+18x-17$ (e) $\frac{2}{x-1}$, $x \neq 1$ (f) $-2x-1$
17. $x+3n+3$ 19. (a) $[1,+\infty)$ (b) $(1,+\infty)$ (c) $\mathbb{R}-\{0\}$ (d) $(-\sqrt{3},-\sqrt{2}) \cup (0,\sqrt{2}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$
21. Sim 22. Se $f(x) = a\,x$ 29. $f(x) = -6x+8$ e $g(x) = 2x^2-7x+4$ 31. 3/11 33. $f(x) = \frac{16-x}{3}$
35. $D(t) = -2500$; $V(5) = 12500$ reais 37. 35000 reais 39. $y = -1.6x + 416,6$
41. 93804.23 reais 43. 10% 45. (a) $\frac{45.67-p}{0.0023p}$ (b) 1551

14.3 Funções na Economia

1. (a) $0 \leq p \leq 1$ (b) $p \geq 1$ (c) $p > 4$ (d) $p \geq 0$ (e) $p \geq 0$ (f) $[0,1] \cup [3,+\infty)$ (g) $p \geq 1$ (h) $0 < p \leq 2$ (i) $p > 9$ (j) $p \geq 0$
3. $-\frac{3x}{50} + 1000$ 5. (a) 0.53 u.m.; 2 u.m. ; 7.2 u. m. (b) 99.9% (c) $CM(x) = \frac{0.8x}{100-x^2}$



7. (b) $p = \sqrt{1-x^2}$; $x = \sqrt{1-p^2}$ 9. (a) $x = \frac{40 \pm 26.46}{6}$, $x = 11.07$; $x = 2.25$ (b) Terálucro: $2 < x < 11$; não terá $x > 11$ 11. (a) $C(x) = 25x + 120$ (b) $R(x) = 35x$ (c) $L(x) = 10x - 120$ (d) 262 13. $x = 0.95p + 105.5$ 15. $25000\,[1.0625]^{20} \cong 84046.33$ reais 17. 1061.36; 1346.84; 1814.02
19. (a) $\cong 1990$ (b) $\cong 3556865$ (c) $\cong 2.67362 \times 10^7$ 21. (a)$V(10) \cong 283942.1$ u.m. (b)$V(15) \cong 478458.94$ u.m. 23. $t = ln(\frac{a-y}{ab})^{-1/k}$ 25. $W(6) = 2048 \times 10^{11}$ mg.
29. (a) $\frac{166x}{131} + \frac{380}{393}$ (b) $\frac{16x}{221} + \frac{55}{221}$ 31. (a) $y = 0.969 \times (3.031)^x$ (b) $y = 0.964 \times (0.247)^x$

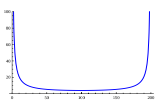
14.4 Limites e Continuidade

1. (a) -5 (b) 1 (c) 2 (d) 2 (e) $\sqrt{2}$ (f) 4 (g) $-\frac{1}{1000}$ (h) 9 (i) 1 (j) 0 (k) 2
3. (a) 4 (b) 15/11 (c) 2 (d) $-\infty$ (e)-1/a (f) -1 (g) 2 (h) 2t (i) 2 (j) -6 (k) 1/3 (l) 5/6 (m) 1/4 (n) -1/56 (o) 3 (p) 0 (q) 0 (r) $1/\sqrt{2a}$ (s) 1/9 (t) 0
5. (a) 0 (b) 3 (c) 1/3 (d) 0 (e) 1/3 (f) -1/2 (g) 0 (h) 0 (i) 0 (j) 1 (k) 0 (l) 0 (m) 1 (n) 0 (o) 0 (p) 0 (q) 0 (r) 1 (s) 0 (t) 3
7. (a) -13/6 (b) 11/6 (c) 1/3 (d) 12 (e) 1/12 (f) 4 (g) -4 (h) -1/6 (i) -85/4 (j) 0
9. (a) $+\infty$

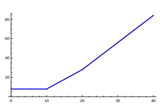
13. (a) -1 (b) 6 (c) 1 (d) 2 (e) 1 (f) 5
11. (a) sim (b) não (c) sim (d) sim
13. (a) -1 (b) 6 (c) 1 (d) 2 (e) 1 (f) 5 15. (a), (c) e (d) Sim (b) Não

14.5 Aplicações de Limites e Continuidade

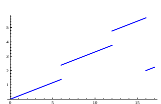
1. (a) 400/19, 100/9, 16/3, 4, -4/15 A capacidade de produção diminui com o tempo até 100 u. m.; a partir daí tende a aumentar.
(b) 4 (c) $+\infty$

(d) 

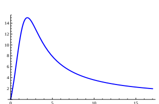
3. (a) contínua 5. (a) contínua (b) A variação do consumo não é sensível em torno de 20 m^3 de água.

(c) 

7. Limite pela direita: 1, limite pela esquerda: 3.68

(c) 

8.

(a) 

(b) termina

14.6 Derivada

1. (a) $y = 10 - 6x$ (b) $y = -1 - 2x$ (c) $y = -4 + 5x$ (d) $y = 2(-3 + x)$ (e) $y = -x$
(f) $y = (3 + x)/4$ (g) $y = 2(-3 + x)$ (h) $y = (1 + 2x)/\sqrt(3)$ (i) $y = 2(-1 + x)$ (j) $y = (3 + x)/3$
(k) $y = (3 - x)/4$
3. $x_0 = -1$, $x_0 = -2$ e $x_0 = 2/3$
5. (a) $1 + 6x + 15x^2 + 24x^3 + 25x^4 + 18x^5 + 7x^6$ (b) $3(3 + 5x^2)(x + x^4 + x^6)^2$
(c) $(-10+4x+9x^2+6x^3)/(1+3x)^2$ (d) $(x(-2+9x-12x^2-x^3+38x^4-21x^5-8x^6+5x^7))/(-3+x^2)^2$
7. (a) $5^{-1+x}ln(5)$ (b) $2^{1-2x}5^{-2x}(-1 + 10^x)(1 + 10^x)(1 + 10^{2x})ln(10)$
(c) $2/(xlog(5))$ (d) $(1 + log(x/4))/log(4)$ (e) $1/(x + x^2)$ (f) $ln(10)$ (g) $1/(xlog(x))$
9. (a) $-x^2/y^2$ (b) $(-3x^2 - 2xy)/(x^2 + 2y)$ (c) $-\sqrt{y}/\sqrt{x}$ (d) $1/(-1 + e^y)$ (e) $(1 + x + y^2)/(y(-2 + 3xy + 3y^3))$ (f) $-y/x$ (g) $(x - 2x^3 + 2xy^2)/(-y - 2x^2y + 2y^3)$ (h) y/x (i) $(-e^{2x+y} - 2x)/x$

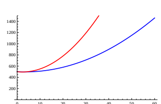
11. (a) 0 (b) 72 (c) $-9x/(3-x^2)^{5/2}$ (d) $24/(-1+x)^5$ (e) $8e^{1+2x}$ (f) $6/x^4$ (g) $e^x(7+x)$
13. (a) $(6+x)/(2\sqrt{3})$ (b) $1-2x$ (c) $(2+x)/2$ (d) x (e) $x+ln(5)$ (f) $-1+21x$
17. $l(x)=-4490+303x$, 4751.5
19. 150
23. (a) $\sqrt{3}+x/(2\sqrt{3})-x^2/(24\sqrt{3})$, $\sqrt{3}+x/(2\sqrt{3})-x^2/(24\sqrt{3})+x^3/(144\sqrt{3})$
(b) $1-2x+2x^2$, $1-2x+2x^2-(4x^3)/3$ (c) $1+x/3-x^2/9$, $1+x/3-x^2/9+(5x^3)/81$
(d) x, $x-x^3$ (e) $x-x^2/2+(8x^3)/15$, $ln(5)+x-x^2/2+(8x^3)/15$
(f) $-1+21x-189x^2$, $-1+21x-189x^2+973x^3$

14.7 Aplicações da Derivada

1. (a) sem pontos críticos (b) 3/2 (c) 1 (d) -1 (e) 0 (f) sem pontos críticos (g) $-3, 0$ (h) sem pontos críticos (i) 0
3. (a) 3/7 min (b) 2 max (c) -7 max, 1 min (d) 0 min (e) 2/9 max
(f) (g)
(h) -2 min, 2 max (i) não possui pontos extremos (j) -2 max, -4/5 min
7. (a) $-b/2a$ (b) Se $b^2-3ac>0$, $(-b+\sqrt{b^2-3ac})/3a$ mínimo relativo e $(-b-\sqrt{b^2-3ac})/3a$ máximo relativo
11. raio $8/\sqrt[3]{4\pi}$ e altura $256/\pi\,\sqrt[3]{16\pi^2}$ 13. 13.5 reais 15. $x=3$ 17. 6.07 cm

14.8 A Derivada em Economia

1. $CMg(x)=4x-1000/x^2$
3. (a) $CMg(x)=-3\,x^2+200\,x+1$; $C(0)=1$, $C(10)=1701$, $C(100)=-9999$
(c) $L(x)=-4+x^3-100\,x^2+\left(-3/2+1/2\,\sqrt{6401+4\,x^2-320\,x}\right)x$
$L'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6401+4\,x^2-320\,x}}\left((6x^2-400x-3)\sqrt{6401+4\,x^2-320\,x}++6401+8\,x^2-480\,x\right)$
5. (a) $x=3.33$ (b) $x=0$ e $x=3.33$

(c) 

7. 14.71 reais 9. (a) $CMg(x)=2x+5$, $CMe(x)=x+5+30/x$, $CMg(0)=5$, $CMg(50)=105$, $CMe(50)=55.6$ e $CMe(0)$ indefinido (b) $x=\sqrt{30}$
11. $x\cong 359$ (b) 90250 reais 13. (a) $CMg(x)=3x^2-20x+40$, $CMg(0)=40$, $CMg(100)=28040$ (b) $R(x)=200x-10x^2$, $RMg(x)=200-20x$ (c) $L(x)=160x-x^3$ (d) $x\cong 7$
15. (a) 2010 (b) 10% 17. 13.5 u. m.
19. (a) $\varepsilon_{C(x)}=(3x^3+40x^2-x)/(x^3+20x^2-x+4)$ (b) $\varepsilon_{C(100)}>1$ (c) $\varepsilon_{C(1000)}>1$

14.9 Integração Indefinida

1. (a) $x^4/4+4x^3/3+3x^2/2+c$ (c) $n\,\sqrt[n]{x^{n-1}}/(n-1)$ (e) $-1/2\,x^2+2/5\,x^{5/2}+2/3\,x^{3/2}$ (g) $\frac{2}{1287}\,x^{9/2}\left(143-234\,x+99\,x^2\right)$ (i) $\frac{10^x}{\ln(10)}$ (k) $5\,\frac{e^{ax}}{a}$ (m) $2/15\,\sqrt{x}\left(15+x^2\right)$ (o) $1/2\,x^2+1/3\,x^{-3}-2\,x^{-1}$

3. (a) $\ln(\mathrm{e}^x) - \ln(\mathrm{e}^x + 1)$
(b) $2/3\sqrt{x+1}\,(-2+x)$ (c) $-\ln(x-1) + 2\sqrt{x} + \ln(-1+\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x})$
(d) $-\frac{16}{5} + 6/5\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}x^{2/3} - 8/5\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x} + \frac{16}{5}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$
5. $1/2\left(2 - 2x^2 + x^4\right)\mathrm{e}^{x^2}$
7. (a) $\frac{(-1+x\ln(5))5^x}{(\ln(5))^2}$ (b) $-1/3\,\frac{x^2+4}{\sqrt{(x^2+4)^5}}$ (c) $1/3\,\ln\left(x^3+3x^2+4\right)$ (d) $1/2\,x^2 + \ln(x) - \ln\left(x^2+1\right)$
(e) $x - (x+1)^{-1} - 2\,\ln(x+1)$ (f) $-1/16\,\ln(2x+7) + 1/16\,\ln(2x-1)$

14.10 Integrais Indefinidas e Economia

1. 436 u. m.
3. $[(0.9 + 0.2\sqrt{x})\,x + 10]$ bilhões de u. m.
5. $x = 20$

14.11 Integrais Impróprias

1. (a) 2 (b) $ln(2)$ (c) $1/2$ (d) 1 (e) divergente (f) $-1/2ln(5)$ (g) divergente (h) $1/2$ (i) $\pi/2$ (j) $ln(\sqrt{2})$ (k) $1/4$ (l) divergente (m) $1/8$ (n) divergente (o) $1/ln(2)$
3. (a) 4 (b) $2(e^2-1)/e^2$ (c) $7(ln(2))^{5/7}/5$ (d) 0 (e) 5/3 (f) divergente (g) $51/7$ (h) divergente (i) $2\sqrt{ln(2)}$ (j) divergente

14.12 Integrais Definidas e Economia

3. $a = 1/18$ 5. (a) $P(8 \le x) = 0.6$ (b) $E = 10$, $V = 33.3$ (c) $P(x = 10) = \int_{10}^{10} f(x)\,dx = 0$
7. (a) $P(x < 10) = 1 - e^{-5/11}$ (b) $P(30 < x < 60) = e^{-15/11} - e^{-30/11}$
(c) $P(x > t) = 0.1$, então $t \cong 51$ minutos.
9. (a) $\alpha = 1/16$, $P(x \le 20) = 0.7135$ (b) $P(5 \le x \le 25) = 0.7316$

Bibliografia

[TA] Apostol, T: *Calculus*, Blaisdell Pub

[CH] Chiang, A: *Matemática para Economistas*, McGraw-Hill

[CH] Consortium Harvard: *Calculus*, John Wiley & Sons, Inc

[SB] Simon, C - Blume, L: *Mathematics for Economists*, W.W. Norton & Company Inc

[VM] Vilches, M. A: *Cálculo: Volume I*, www.ime.uerj.br/∼calculo