Minicurso de Combinatória de Contagem

Márcia R. Cerioli
IM-UFRJ e COPPE-UFRJ

Petrucio Viana
IME-UFF

II Colóquio de Matemática da Região Sul
24 a 28 de abril de 2012,
Universidade Estadual de Londrina
Londrina, SC

Prefácio

Este texto descreve em linhas gerais nossa abordagem para enfrentar o desafio de ensinar – e aprender – Combinatória para futuros e atuais professores de Matemática. Diferente dos demais textos de Combinatória de Contagem disponíveis, nosso objetivo aqui é o de fornecer um material que descreve os métodos de contagem básicos, através de uma abordagem teórica, e ilustrar, na oficina que o complementa, a forma de aplicá-lo na resolução de problemas. O texto também descreve o que chamamos de Didática dos Princípios de Contagem que tem sido por nós aplicada.

Concordamos que para aprender Combinatória, e Matemática de uma maneira geral, é necessário resolver uma grande quantidade de problemas. No entanto, tomamos a liberdade de indicar e utilizar o material já existente em língua portuguesa para suprir a falta de exercícios neste texto. Nosso foco aqui é o de estabelecer e descrever com mais detalhes os princípios básicos de contagem, as configurações clássicas, e a maneira de utilizar os princípios para a efetiva contagem do número de possibilidades, do um ponto de vista mais formal. Com um livro a disposição, por exemplo [1, 2, 3, 4], é possível praticar amplamente a abordagem aqui descrita.

Agradecemos a Comissão Organizadora do II Colóquio de Matemática da Região Sul pela possibilidade de apresentar este material nesta ocasião; a Renata de Freitas pela leitura cuidadosa do texto e pelas inúmeras sugestões para a sua melhoria; e aos nossos alunos de Licenciatura em Matemática e de Especialização em Ensino de Matemática de nossas respectivas universidades que, com suas dúvidas, dificuldades e insistentes pedidos, nos motivaram a escrever este material.

Uma versão prévia deste texto e sua oficina foram apresentados no I Colóquio de Matemática da Região Sudeste, de 4 a 8 de abril de 2011, na UFSJ, São João del-Rei, MG. Agradecemos, em particular, aos alunos daquela oficina pela boa acolhida que deram às nossas ideias de como se pode estudar e ensinar Combinatória.

Os autores.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A didática que é usualmente adotada no ensino de análise combinatória é a *Didática da Classificação dos Problemas*, DCP. Esta didática é baseada em uma metodologia que consiste, essencialmente, em resolver os problemas de contagem aplicando o seguinte critério:

I. Tentar aplicar o *princípio multiplicativo*, também chamado de *princípio fundamental da contagem*;

   Se a tentativa for infrutífera, então:

II. Classificar o problema em *problema de arranjo*, *problema de permutação* ou *problema de combinação*;

III. Em seguida, aplicar a *fórmula* correspondente para resolver o problema.

Reconhecer situações que envolvem o princípio multiplicativo e permutações é a parte mais fácil da DCP. A parte mais difícil é determinar se um problema é "de arranjo" ou "de combinação" e utilizar a fórmula correspondente de maneira adequada para resolvê-lo. Neste contexto, é usual que os estudantes de combinatória recorram à duas alternativas.

A primeira consiste em analisar os enunciados dos problemas para decidir se o problema é do tipo em que "a ordem importa" ou do tipo em que "a ordem não importa". No primeiro caso, o problema é "de arranjo", no segundo é "de combinação".

Por exemplo, consideremos o seguinte problema típico:

Problema 1

> Quantos números com 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, de modo que os algarismos estejam em ordem crescente?

Início de tentativa de resolução do Problema 1

Como os algarismos estão em ordem crescente, podemos formar números como 1234 mas não podemos formar números como 2134. Assim, a ordem importa, portanto este deve ser um problema "de arranjo".

A questão agora se resume em como utilizar a fórmula de arranjo para resolver o problema. Mas isto não é uma tarefa fácil, pois como veremos adiante, com as técnicas utilizadas neste texto, a solução do Problema 1 é imediata e a resposta — de um certo modo surpreendente para quem classifica este problema como problema "de arranjo" — é $C(9,4)$, o *número de combinações de* 9 *elementos tomados* 4 *a* 4.

Já a segunda alternativa consiste em examinar listas de problemas já resolvidos, na tentativa de se familiarizar com os conceitos e técnicas utilizados na disciplina. Neste caso, não é raro que o estudante se depare com soluções como as seguintes:

Problema 2

Quantos números distintos com 4 algarismos diferentes, podemos formar com: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Solução do problema 2

$N = A(10,4) - A(9,3) = 5.040 - 504 = 4.536.$

Problema 3

Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que sempre comecem pela letra A?

Solução do problema 3

$$N = C(1,1) \times C(9,3) = 1 \times \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84.$$

Problema 4

Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares 1, 3, 5, 7, 9, desde que estejam sempre juntos os algarismos 1 e 3?

Solução do problema 4

$N = 2 \times P(4) = 2 \times 24 = 48.$

A tentativa de resolução e as soluções típicas apresentadas acima deixam entrever que, muitas vezes, os autores das soluções de problemas de contagem passam para o leitor, implícita, a idéia de que a resolução dos problemas se obtém pela aplicação consciente do princípio multiplicativo em conjunto com uma das fórmulas: ou a de permutação, ou a de arranjo ou a de combinação. Esta é a essência da DCP.

É fácil perceber que, apesar de se perpetuar por vários anos e ser amplamente empregada, a DCP é uma metodologia de pouca aplicabilidade. Isto decorre do fato de que muitos problemas, por exemplo os que são abordados nos contextos nos quais a combinatória de contagem é desenvolvida de maneira um pouco mais aprofundada, não podem ser classificados de acordo com o critério acima ou não podem ser resolvidos pela aplicação diligente de uma única fórmula.

Por exemplo, tente resolver o problema abaixo, usando o princípio fundamental da contagem. Se não conseguir, tente classificá-lo como um problema de arranjo, combinação ou permutação. Caso tenha conseguido, tente aplicar a fórmula correspondente para resolvê-lo. Voltaremos a esta questão mais tarde.

Problema 5

> (IME-RJ) Cinco rapazes e cinco moças devem posar para uma fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

Como é amplamente ilustrado na história da matemática, a classificação de problemas e a aplicação de fórmulas é uma das maneiras mais organizadas de se pensar e escrever matemática. Portanto, não é por ser baseada na classificação de problemas e na aplicação de fórmulas que a DCP é problemática. O problema com a DCP é que ela é aplicada indiscriminadamente — como proposto em quase todos os livros didáticos em que a análise combinatória é abordada. Além disso, estas aplicações são feitas de maneira simplificada, não levando em conta o *raciocínio combinatório* intrínseco ao problema. Este não é apenas *sintético* (aplicação de fórmulas), mas também é *analítico*, no qual se deve:

1. determinar com exatidão os elementos que se quer contar;

2. procurar exemplos "concretos" destes elementos;

3. analisar as suas características;
4. entender e descrever como eles são formados;
5. e, só a partir daí, elaborar uma estratégia para efetivamente contá-los, possivelmente, até usando as fórmulas de arranjo, combinação ou permutação, além de outras.

Neste texto, como um primeiro passo na direção de reverter o estado de coisas descrito e apresentar uma abordagem analítica para a resolução de problemas de contagem, apresentamos uma alternativa para a DCP, que chamamos de *Didática dos Princípios de Contagem*, DPC.

A DPC, elaborada pela primeira autora e desenvolvidada por ela e pelo segundo autor, objetiva a quem quer resolver problemas de contagem dos tipos abordados no Ensino Médio — e até problemas mais avançados — fazê-lo de forma segura e com um mínimo de possibilidade de erro. Na resolução dos problemas são utilizados cinco princípios básicos de contagem que prescindem do uso de fórmulas de maneira essencial (mas que não excluem o uso de fórmulas). Em sua essência, a DPC consiste do seguinte:

I. Em primeiro lugar, ler com cuidado o problema proposto, buscando identificar os diversos elementos (descritos abaixo) que serão essenciais para a sua resolução. Esta leitura deve levar, em princípio, a uma reformulação mais enxuta do problema, através de uma nova redação (ou esboço de redação) mais simples e objetiva.

   Este primeiro exame crítico dos problemas é necessário, na medida em que, se o enunciado de uma questão contém informações desnecessárias ou implícitas, o estudante pode ser guiado a interpretações diversas daquelas pretendidas pelo autor do problema. E isso poderá levar a soluções diversas daquela que o problema realmente propõe.

II. Na releitura do problema, o primeiro passo é reconhecer os objetos que se quer contar, chamados de *configurações*, e certos *objetos básicos* a eles associados.

III. Em seguida, deve-se entender como as configurações são formadas a partir dos objetos básicos, como descrito no enunciado do problema, ressaltando suas “características estruturais internas”.

IV. Após compreender como as configurações são formadas, o próximo passo é elaborar uma descrição, tão formal quanto seja necessário, da maneira como uma configuração é formada a partir de objetos básicos. Esta descrição deve levar em conta a natureza dos objetos usados na formação, a repetição ou não destes objetos, a ordem ou não em que estes objetos são usados, etc.

Esta descrição deve ser elaborada de modo que todas as configurações, e somente elas, possam ser formadas a partir dos objetos básicos por sua aplicação.

V. Finalmente, utilizar a descrição obtida para elaborar uma estratégia de aplicação dos princípios básicos de contagem, que fornecerá no final o número total de configurações, que é a solução do problema proposto.

Do ponto de vista da didática da matemática, a DPC enfatiza a utilização de um método baseado no conceito de *configuração* e na aplicação de cinco *princípios básicos de contagem*. Estes são conceitos didáticos primitivos, que são usualmente empregados na resolução de problemas de contagem, mas que não são colocados em primeiro plano, durante a resolução de um problema. *Configurações* são os objetos que se quer contar. E os *princípios de contagem* são os seguintes, quando descritos em suas versões mais simples, onde $|A|$ denota o número de elementos de um conjunto A:

1. **Princípio da Bijeção:** É o princípio que nos permite contar o número de elementos de um conjunto X de maneira indireta, através de um conjunto A do qual sabemos: (1) determinar o número de elementos; e (2) que tem o mesmo número de elementos que X. Neste caso, temos:
$$|X| = |A|.$$

2. **Princípio Aditivo:** É o princípio que nos permite contar o número de elementos de um conjunto X de maneira indireta, atravé da "classificação" de seus elementos em vários subconjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n$, de modo que: (1) sabemos determinar o número de elementos de A_1, o número de elementos de A_2, ..., o número de elementos de A_n; (2) quaisquer dois subconjuntos dentre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ não possuem elementos em comum; e (3) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ "exaurem" todos os elementos de X. Neste caso, temos:
$$|X| = |A_1| + |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

3. **Princípio Multiplicativo:** É o princípio que nos permite contar o número de elementos de um conjunto X, quando reconhecemos que cada elemento de X, e somente estes, pode ser formado após a tomada em sequência de k decisões, $d_1, d_2, \ldots d_k$, sendo que: (1) sabemos determinar de quantas maneiras a decisão d_1 pode ser tomada; (2) sabemos determinar de quantas maneiras a decisão d_2 pode ser tomada e este número é o mesmo para cada maneira como a decisão d_1 pode ser tomada; (3) sabemos determinar de quantas maneiras a decisão d_3 pode ser tomada e este número é o mesmo para cada maneira como as decisões d_1 e d_2 podem ser tomadas, nesta ordem; ...; e (k) sabemos determinar de quantas maneiras a decisão d_k pode ser tomada e este número é o mesmo para cada maneira como as decisões d_1, d_2, ..., d_{k-1} podem ser tomadas, nesta ordem. Sendo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ o número de maneiras que as decisões $d_1, d_2, \ldots d_k$ podem ser tomadas, respectivamente, temos:

$$|X| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

4. **Princípio k para 1:** É o princípio que nos permite contar o número de elementos de um conjunto X de maneira indireta, através de um conjunto A, do qual sabemos: (1) determinar o número de elementos; (2) que o número de elementos de A é um divisor (ou um múltiplo) do número de elementos de X; (3) determinar o fator (ou divisor) k que relaciona o número de elementos de X com o número de elementos de A. Nestes casos, temos:

$$|X| = k|A| \text{ ou } |X| = \frac{|A|}{k}.$$

5. **Princípio da Inclusão-Exclusão:** É o princípio que nos permite contar o número de elementos de um conjunto X de maneira indireta, através da "separação" de seus elementos em vários subconjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n$, de modo que: (1) sabemos determinar o número de elementos de A_1, o número de elementos de A_2, ..., o número de elementos de A_n; (2) para quaisquer k subconjuntos $A_{i1}, A_{i2}, \ldots A_{ik}$ dentre $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sabemos determinar quantos elementos $A_{i1}, A_{i2}, \ldots A_{ik}$ possuem em comum; e (3) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ "exaurem" todos os elementos de X. Neste caso, a solução é um pouco mais complicada e, de acordo

com as notações usuais da Teoria dos Conjuntos, temos que:

$$\begin{aligned}|X| \;=\; & |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| - \\ & |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\ & \ldots + \\ & (-1)^{n+1}\, |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Enunciados e explicações mais detalhadas sobre estes princípios serão dados nos Capítulos 4, 5, 6, 8 e 10.

Como veremos, através de exemplos e da resolução de problemas, a noção de configuração em conjunto com os princípios de contagem, quando aplicados de maneira sistemática, levam à consistência e à exatidão da contagem; e possibilitam uma redação adequada das resoluções das questões, desenvolvendo a lógica argumentativa daqueles que as resolvem.

Neste texto, enunciamos os cinco princípios básicos tanto de maneira informal quanto formal, e apresentamos vários exemplos de sua aplicação, tanto isolados como em conjunto. Esperamos com isso que o estudante de combinatória se familiarize com os princípios de contagem e se sinta motivado a tentar aplicar a Didática dos Princípios de Contagem na resolução de problemas, de maneira segura e correta.

Os únicos pré-requisitos necessários para a leitura deste texto são os conhecimentos e a maturidade adquiridas nas disciplinas de matemática do *Ensino Básico*.

1.1 Sumário do texto

Este texto está organizado do seguinte modo.

O Capítulo 2 explica em linhas gerais o que é combinatória e o que é combinatória de contagem. Nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar para o estudante que o conteúdo de combinatória que é, usualmente, abordado no Ensino Médio é apenas uma parte de uma disciplina maravilhosa e abrangente. Neste capítulo, apresentamos também os conceitos fundamentais de estrutura e configuração.

O capítulo 3 descreve os primeiros passos a serem dados na aplicação do método dos princípios de contagem. A descrição e aplicação do passo final, que é o uso dos princípios de contagem, tanto isoladamente quanto em conjunto, na resolução dos problemas é feita nos capítulos que seguem.

Os Capítulos 4, 5, 6, 8 e 10 contém a apresentação e exemplos de aplicações dos princípios da bijeção, da adição, da multiplicação, k para 1 e da inclusão-exclusão, respectivamente.

Os Capítulos 7 e 9 tratam da aplicação dos princípios de contagem na determinação das fórmulas para a contagem de arranjos completos, arranjos simples, permutaçõs simples, permutações circulares e combinações imples.

1.2 Algumas palavras sobre a nomenclatura

Finalmente, fixamos alguns conceitos e notações sobre conjuntos e sequências que serão essenciais na resolução de problemas de contagem. Outros conceitos são introduzidos e/ou revisados quando necessário. O leitor que não tiver familiaridade com estes temas pode consultar, por exemplo, as primeiras páginas de [2] ou [4].

Usamos a notação

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

para especificar o conjunto finito que possui os n elementos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Esta notação não leva em conta nem a repetição de objetos nem a ordem em que eles estão listados. Por exemplo, $\{1, 2, 3\} = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$.

Como é usual, usamos a notação

$$\emptyset$$

para especificar o conjunto que possui 0 elementos, também chamado *conjunto vazio*. Por exemplo, $\emptyset$ é o conjunto dos números ímpares divisíveis por 2.

Usamos a seguinte notação para especificar o conjunto formado por todos os elementos do conjunto universo U, que satisfazem a propriedade P:

$$\{x \in U : P\}.$$

Por exemplo,

$$\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 1.000 \text{ e } x \text{ é divisível por } 2\}$$

é o conjunto dos números naturais pares entre 1 e 1.000, inclusive.

Se A é um conjunto e a um objeto qualquer, escrevemos

$$a \in A$$

para afirmar que a é um elemento de A. Por exemplo, $2 \in \{1, 2, 3\}$ e $4 \in \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 1.000$ e x é divisível por $2\}$.

Aassumimos conhecimento operacional das relações de igualdade e inclusão entre conjuntos, denotadas por $=$ e $\subseteq$, respectivamente; bem como das operações de união, interseção e complementação de conjuntos, denotadas por $\cup$, $\cap$ e $\overline{}$, respectivamente.

A notação mais importante que vamos usar em nossos estudos de combinatória é a seguinte:

> Dado um conjunto finito, A, denotamos por $|A|$ o número de elementos em A.
>
> Assim, $|\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}| = n$.

Por exemplo, $|\emptyset| = 0$; $|\{1\}| = 1$; $|\{1, 2\}| = 2$; $\ldots$; $|\{1, 2, 3, \ldots, n\}| = n$, onde n é um número natural.

Usamos a notação

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

para especificar a sequência finita que possui os n termos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, listados nesta ordem. Além de levar em conta a ordem, esta notação leva em conta a repetição de objetos na sequência. Por exemplo, $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1) \neq (1, 2, 2, 3, 3, 3)$.

Capítulo 2

Estruturas, especificações e configurações

Neste capítulo, descrevemos em linhas gerais o que é combinatória (nas Seções 2.1 e 2.2); especificamos um pouco mais detalhadamente o que é combinatória de contagem (na Seção 2.3); e apresentamos o princípio da contagem direta (na Seção 2.4).

2.1 O que é combinatória

De uma maneira geral, podemos dizer que

> *combinatória* é o ramo da matemática que estuda as estruturas discretas, suas propriedades e interrelações.

Sendo assim, para ter uma ideia mais precisa do que é combinatória, devemos responder, pelo menos, às seguintes questões:

– o que é uma *estrutura*?

– Quando uma estrutura é *discreta*?

– Quais são as *propriedades das estruturas discretas* e as *interrelações entre estruturas discretas* que são investigadas em combinatória?

Como é de se esperar, por serem relativas às partes fundamentais de uma disciplina, estas perguntas não têm uma resposta fácil. Por esta razão, nos limitaremos a dar uma idéia geral do que os termos 'estrutura' e 'estrutura discreta' significam, bem como uma descrição sucinta dos principais problemas estudados em combinatória.

Estruturas

Na base dos estudos de combinatória está a noção de estrutura:

> Uma *estrutura* é um objeto matemático complexo, que consiste essencialmente dos seguintes itens:
>
> – Um ou mais conjuntos de objetos;
>
> – Uma ou mais operações sobre objetos destes conjuntos;
>
> – Uma ou mais relações entre objetos destes conjuntos.

Como casos extremos de estruturas, admitimos aquelas que não possuem nem operações nem relações. Nestes casos, temos apenas um ou mais conjuntos cujos elementos estão à nossa disposição. Por outro lado, também existem outras noções de estrutura mais elaboradas do que a que apresentamos acima, mas estruturas consistindo de conjuntos, operações e relações são suficientes para os nossos estudos de combinatória.

Exemplo 1 Uma das estruturas mais estudadas em matemática e que desempenha um papel fundamental nos estudos de combinatória é a *estrutura dos números naturais*, que consiste

– do conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ dos números naturais e seus diversos subconjuntos;

– das operações $+$ e $\cdot$, de adição e multiplicação de números naturais;

– das relações $=$, $\leq$ e $|$, de igualdade, de ordem e de divisibilidade, entre números naturais.

Lembramos que, dados a e b números naturais, $a|b$ significa que a é um *fator* de b, ou seja, que existe um natural c, tal que $b = ca$.

Exemplo 2 Uma estrutura interessante, não só do ponto de vista da combinatória, como se pode ver, consiste

– dos conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{América}, \text{Americano}, \text{Boavista}, \text{Flamengo}, \\ &\quad \text{Nova Iguaçu}, \text{Resende}, \text{Vasco}, \text{Volta Redonda}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &= \{\text{Botafogo}, \text{Fluminense}, \text{Bangu}, \text{Olaria}, \\ &\quad \text{Madureira}, \text{Cabofriense}, \text{Macaé}, \text{Duque de Caxias}\}, \end{aligned}$$

dos dois grupos do Campeonato Carioca de 2011;

– da operação (,), que quando aplicada a dois times de futebol t_1 e t_2 pertencentes a um mesmo grupo, forma um par ordenado (t_1, t_2), constituido pelos dois times t_1 e t_2, nesta ordem.

Estruturas como estas são amplamente empregadas na construção das tabelas de jogos dos diversos campeonatos esportivos.

Uma estrutura é *discreta* se todos os conjuntos, operações e relações são finitos ou, no pior caso, podem ser dados como uma lista infinita de elementos.

Uma estrutura é *finita* se todos os conjuntos, operações e relações envolvidas são finitos.

Exemplo 3 A estrutura que aparece no Exemplo 1 é discreta mas não é finita. A estrutura que aparece no Exemplo 2 é discreta e finita.

Como as operações e as relações definidas sobre conjuntos finitos são finitas, todas as estruturas finitas são discretas.

A estrutura dos números naturais apresentada no Exemplo 1 é usada como uma estrutura subjacente em todos os estudos de combinatória. Por outro lado, a investigação de suas propriedades e interrelações com outras estruturas não faz parte propriamente do domínio da combinatória, mas de uma outra disciplina chamada *teoria dos números*. Vamos supor que as propriedades básicas dos números naturais são conhecidas e só nos ocuparemos com aspectos combinatórios das estruturas finitas.

Especificações e configurações

A partir de estruturas finitas, podemos construir objetos, de acordo com certas *especificações*.

Exemplo 4 A partir dos grupos A e B e da operação (,) dados no Exemplo 2, podemos construir objetos mais complexos, que chamamos de *rodadas*.

Uma *rodada* consiste de dois conjuntos de pares ordenados de times, onde cada conjunto é obtido pela aplicação sucessiva da operação (,) aos times de um mesmo grupo, **dois de cada vez e tomando o cuidado de não aplicar a operação a times aos quais ela já foi aplicada anteriormente**.

Por exemplo, de acordo com esta especificação, podemos construir os conjuntos

$$C_1 = \{(\text{América}, \text{Americano}), (\text{Boavista}, \text{Flamengo}), \\ (\text{Nova Iguaçu}, \text{Resende}), (\text{Vasco}, \text{Volta Redonda})\};$$

$$C_2 = \{(\text{Botafogo}, \text{Fluminense}), (\text{Bangu}, \text{Olaria}), \\ (\text{Madureira}, \text{Cabofriense}), (\text{Macaé}, \text{Duque de Caxias})\}.$$

e formar a rodada que consiste dos conjuntos C_1 e C_2.

Uma *configuração* é um objeto obtido por um *número finito de aplicações de certas regras* envolvendo os objetos, operações e relações de uma estrutura finita.
Configurações são, usualmente, dadas por:

– uma estrutura finita, ou seja, uma especificação de quais são os objetos básicos usados na formação das configurações e de que recursos estão disponíveis para esta formação;

– uma especificação de como os objetos básicos podem ser combinados para formar as configurações.

Assim, configurações são *objetos finitos*, obtidos a partir de *estruturas finitas*, por meio de um *número finito de aplicações de certas regras*.

No sentido estrito, que abordaremos neste texto,

> *combinatória* é o ramo da matemática que estuda as configurações construídas a partir de estruturas finitas.

Para que possam ser consideradas como objetos de estudo da combinatória, as configurações devem ser *descritas/especificadas*, pelo menos em tese, de alguma maneira objetiva. Para descrever as configurações, devemos descrever os conjuntos, as operações e as relações que podem ser aplicadas na sua construção; bem como especificar as regras que dizem exatamente como esses objetos devem ser utilizados para formar as configurações. Na prática, alcançar esta precisão é uma tarefa muito difícil e o melhor que podemos esperar é que os problemas estejam enunciados de modo a podermos entender claramente de que estruturas e regras estamos falando. Voltaremos a este ponto, mais adiante.

2.2 Principais problemas

Podemos agora dar uma idéia geral de quais são os principais problemas estudados em combinatória.

– **Problemas de existência:** *existe alguma configuração* satisfazendo a uma dada especificação?

  A resposta para este problema pode ser *sim* ou *não*. Em certos casos, podemos também exigir que ao menos uma configuração seja exibida, quando a resposta é afirmativa.

– **Problemas de contagem:** *quantas configuração existem*, satisfazendo a uma dada especificação?

  A resposta para este problema pode ser *exata* ou *aproximada*. No primeiro caso, a resposta é o número de configurações; no segundo, a resposta pode ser um par de expressões fornecendo limites inferiores e superiores para o número de configurações.

– **Problemas de enumeração:** *listar todas as configurações*, que correspondem a uma dada especificação.

  A resposta para este problema pode ser uma *lista*, contendo todas as configurações, dadas em uma certa ordem; ou, quando isto é impraticável, um *método* que, quando aplicado, nos permite obter as configurações em uma dada ordem.

– **Problemas de otimização:** *qual é a melhor configuração* (de acordo com um critério dado), satisfazendo a uma dada especificação?

  Neste caso, espera-se que a configuração seja exibida, ou que se forneça um *método* que, quando aplicado, nos permite obter a melhor configuração.

O foco deste texto é a resolução de problemas básicos de contagem. Assim, só mencionaremos os problemas de existência, enumeração ou otimização quando for necessário esclarecer alguns pontos da teoria.

2.3 Combinatória de contagem

> *Combinatória de contagem* é a parte da combinatória que trata da resolução dos problemas de contagem.

Exemplo 5 Por exemplo, dados os grupos A e B e a operação $(\ , \ )$, do Exemplo 2, quantas rodadas são possíveis?

É claro que as limitações físicas (tempo e espaço) que regulam o contexto no qual uma configuração está inserida podem limitar o número de configurações que podemos realmente formar, de acordo com uma dada especificação. No entanto, em problemas de contagem, a pergunta é quantas configurações é <u>possível</u> construir e não quantas são <u>efetivamente</u> construídas. A falta em notar esta distinção faz com que a leitura de muitos problemas de contagem não tenha o menor sentido.

Exemplo 6 Um problema típico pergunta

> A partir de um grupo de 12 pessoas, quantos comitês de 5 pessoas podem ser formados?

Neste problema, os objetos básicos são as 12 pessoas e as configurações são os comitês de 5 pessoas, tomadas entre as 12.

Se o enunciado do problema é interpretado como perguntando quantas configurações podemos <u>efetivamente</u> formar, a resposta para o problema é:

> 2 comitês e ainda sobram 2 pessoas.

O que não faz nenhum sentido, em se tratando de um problema de contagem. Neste caso, o que queremos saber é quantos comitês é possível formar, em teoria, reutilizando as pessoas para formar os comitês, é claro.

2.4 Princípio da contagem direta

Combinatória de enumeração é a parte da combinatória que trata da resolução dos problemas de enumeração.

À primeira vista, parece que, se podemos enumerar um certo tipo de configuração, podemos também dizer simplesmente quantas elas são. De fato, se sabemos listar todas as configurações de um certo tipo, aparentemente basta contar quantos termos esta listagem possui para determinar o número de configurações em questão.

Do que foi dito acima, podemos considerar que todo problema de contagem tem uma resolução trivial:

Princípio da contagem direta, PCD:

Para determinar o número de configurações satisfazendo a uma dada especificação, basta listar, uma a uma, de maneira organizada, todas elas e contar diretamente quantas elas são.

Podemos utilizar esta técnica para determinar de maneira direta o número de elementos de alguns conjuntos.

Exemplo 7 (a) Conjunto M dos resultados possíveis no arremesso de uma moeda. Como os resultados possíveis são cara e coroa, que representamos por K e C, respectivamente, temos que $|M| = 2$.

(b) Conjunto D dos resultados possíveis no arremesso de um dado. Como os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos que $|D| = 6$ elementos.

(c) Conjunto N dos numerais decimais. Como os numerais decimais são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, temos que $|N| = 10$.

(d) Conjunto L das letras minúsculas do alfabeto da língua portuguesa. Como as letras são a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, e z, temos que $|L| = 26$.

(e) Conjunto B das cartas de um baralho normal, onde as cartas são classificadas de acordo com quatro *naipes*, $\heartsuit$ (copas), $\spadesuit$ (espadas), $\diamondsuit$ (ouros) e $\clubsuit$ (paus); e dentro de cada naipe são classificadas de acordo com os rótulos em *números*, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e 10; ou *figuras*, A (ás), J (valete), Q (dama) e K (rei).

Como as cartas são

$$\begin{array}{l} A\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit, \\ A\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\spadesuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, J\spadesuit, Q\spadesuit, K\spadesuit, \\ A\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, J\diamondsuit, Q\diamondsuit, K\diamondsuit, \\ A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, \end{array}$$

temos que $|B| = 52$.

A aplicação do PCD pressupõe duas coisas: *organização* e *tempo*. Organização, porque quando o processo para gerar as configurações é muito complicado, precisamos de um *método sistemático* para gerá-las, de modo a garantir que todas foram geradas e que nenhuma foi gerada mais de uma vez. Tempo, porque quando o número de configurações é muito grande, qualquer *método sistemático* que apliquemos para gerá-las, vai ser demorado. Quando estes recursos estão em questão, a listagem de um conjunto de configurações pode ser uma tarefa extremamente difícil e sutil e esta dificuldade que torna a combinatória de enumeração uma matéria fascinante.

Exemplo 8 Considere um conjunto

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

de pessoas e a operação $\{\ ,\ \}$ de formar pares não ordenados de pessoas, que quando aplicada a duas pessoas X e Y em P, forma o par não ordenado $\{X, Y\}$. Observe que este é igual ao par $\{Y, X\}$.

Um *pareamento* de P é um conjunto obtido pela aplicação sucessiva da operação $\{\ ,\ \}$ aos elementos de P, **dois de cada vez e tomando o cuidado de não aplicar a operação a pessoas às quais ela já foi aplicada anteriormente**.

Por exemplo, a partir de P, podemos formar o pareamento

$$\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}, \{G, H\}\}.$$

Outros pareamento são possíveis, por exemplo

$$\{\{A, D\}, \{B, E\}, \{C, F\}, \{G, H\}\},$$

e ainda outros.

Podemos, então, considerar o seguinte problema de contagem: quantos pareamentos de P são possíveis?

Utilizando a idéia expressa no PCD, uma maneira de resolver o problema de contagem dos pareamentos acima é listar todos os pareamentos e contá-los. Se você tentar fazer isso, verá que esta não é uma tarefa tão trivial. Na verdade, existem 105 pareamentos. Voltaremos a esta questão mais tarde.

Finalmente, podemos enunciar o principal objetivo da combinatória de contagem, que é:

o desenvolvimento de técnicas para a resolução de problemas de contagem, que permitem determinar o número de configurações satisfazendo a uma dada especificação, sem que seja necessário listá-las uma a uma e contá-las diretamente.

Capítulo 3

O Método dos Princípios de Contagem

Neste capítulo, descrevemos e exemplificamos, em linhas gerais, o Método dos Princípios de Contagem, sobre o qual se fundamenta a Didática dos Princípios de Contagem. Inicialmente, descrevemos o método de maneira resumida (na Seção 3.1) e, posteriomente, detalhamos as partes do método que não se referem aos princípios de contagem (nas Seções 3.2, 3.3, e 3.4). As partes do método que fazem referência aos princípios de contagem são apenas mencionadas neste capítulo (na Seção 3.5) e ocupam todo o restante do texto.

3.1 Descrição geral do método

Vamos agora iniciar a descrição de um método para a resolução de problemas de contagem, que pode ser aplicado na resolução de vários problemas, inclusive todos aqueles que são usualmente abordados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

O método que vamos descrever consiste, essencialmente, dos seguintes passos:

I. Ler e reler atentamente o enunciado do problema.

II. Identificar os objetos básicos e as configurações em questão.

III. Introduzir uma notação matemática adequada para descrever de maneira precisa as configurações.

IV. Compreender como tais configurações podem ser formadas a partir dos objetos básicos.

V. Obter uma especificação de como as configurações podem ser formadas a partir dos objetos básicos, de maneira que:

   1. todas as configurações em questão podem ser formadas da maneira descrita;
   2. somente as configurações em questão podem ser assim formadas;
   3. cada configuração pode ser formada de uma única maneira, a partir dos objetos básicos, de acordo com esta especificação.

VI. Aplicar os princípios básicos de contagem — que serão introduzidos nos próximos capítulos — de acordo com a especificação obtida, para obter o número de configurações possíveis.

Observe que os passos III e IV estão completamente interligados e foram descritos separadamente apenas para facilitar a apresentação. De fato, para elaborar uma notação adequada para descrever as configurações, temos também que entender a maneira como elas são formadas a partir dos objetos básicos. Por outro lado, para entender a maneira como as configurações são formadas, podemos também utilizar uma notação matemática adequada.

O passo V também está diretamente relacionado aos passos III e IV. Como veremos adiante, em muitos casos, se utilizamos a notação matemática padrão, a especificação de como as configurações são formadas tem muito a ver com a maneira como elas são denotadas.

Finalmente, observe que o método foi descrito sucintamente em 6 passos e que apenas no último passo se fez menção à contagem das configurações.

Neste capítulo e nos próximos, vamos tratar de cada um destes passos em detalhes, aplicando-os na resolução e na redação da resolução de vários problemas.

3.2 Análise de enunciados

Um *problema de contagem* tem, usualmente, o seguinte formato:

1. são dados:

   – um ou mais conjuntos de objetos básicos,

   – algumas operações e relações entre estes objetos,

   – uma especificação de como as configurações são fomadas a partir dos objetos dados,

2. e pergunta-se:

   – quantas configurações é possível formar a partir dos objetos básicos, de acordo com a especificação dada.

A resolução de problemas de contagem tem dois inimigos declarados:

1. a falta da análise do enunciado do problema;

2. a pressa em contar, mesmo nos casos raros em que a análise do enunciado é feita.

A falta de análise, usualmente, leva o estudante de combinatória a não saber por onde começar a resolver o problema. A pressa em contar, usualmente, leva o estudante a não saber como terminar a resolução do problema.

Assim, o primeiro passo na resolução de problemas de contagem é ler e reler o problema com atenção, de modo a distinguir o que são *os dados do problema* do que é *a questão do problema*. Muitas vezes, os problemas estão enunciados de maneira que a identificação das palavras que realmente fazem parte da pergunta é um pouco confusa.

Não entraremos em detalhes sobre a questão da ambiguidade nos enunciados, mas este é outro ponto que dificulta a resolução de problemas de contagem.

Exemplo 9 Considere o seguinte problema:

> (Unirio-RJ) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?

Observe que, apesar do que está escrito no enunciado, não estamos interessados nas formas como o fiscal pode organizar as visitas (através de sorteio, de algum critério variável, etc.) mas, sim, nos resultados da organização. Assim, a questão é *determinar quantas são as ordens de visita.* A outra parte do enunciado são os dados do problema. Assim, temos:

Questão: quantas ordenações das cinco empresas são possíveis?

Exemplo 10 Considere o seguinte problema:

> (U.F. de Viçosa-MG) Para controlar o estoque de um produto, uma empresa usa etiquetas formadas por uma parte literal e outra numérica, nesta ordem. A parte literal é formada de três letras do nosso alfabeto, incluindo k, y, w, e a parte numérica é formada por quatro algarismos de 0 a 9. Sabendo-se que pode haver repetição das letras e dos algarismos, a quantidade do produto que pode ser etiquetada sem que haja coincidência de etiquetas é?

Claramente, neste problema, a questão é *determinar quantas são as etiquetas*. A outra parte do enunciado são os dados do problema. Assim, temos:

Questão: quantas etiquetas com uma parte literal de três letras e uma parte numérica de quatro algarismos são possíveis?

Exemplo 11 Considere o seguinte problema:

> (Fuvest-SP) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que *não* têm algarismos adjacentes iguais?

Claramente, neste problema, a questão é *determinar quantos são os números naturais de cinco algarismos que não possuem algarismos adjacentes iguais*. O interessante é que o enunciado não especifica os dados do problema deixando para o senso comum, a explicação de <u>a partir do que</u> e <u>como</u> esses números são formados. Assim, temos:

Questão: quantos números naturais de cinco algarismos, sem algarismos adjacentes iguais, são possíveis?

Exemplo 12 Considere o seguinte problema:

> (Fatec-SP) Dispomos de 10 produtos para a montagem de cestas básicas. O número de cestas que podemos formar com 6 desses produtos, de modo que um determinado produto seja sempre incluído, é?

Claramente, neste problema, a questão é *determinar quantas são as cestas básicas formadas por* 6 *produtos que possuem um certo produto incluído*. A outra parte do enunciado são os dados do problema. Assim, temos:

Questão: quantas cestas básicas formadas por 6 produtos
que possuem um certo produto incluído são possíveis?

Exemplo 13 Considere o seguinte problema:

(Unifesp-SP) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

Observe que, apesar do que está escrito no enunciado, não estamos interessados nas maneiras como são escohidos o síndico e o conselho fiscal (através de sorteio, através da eleição, etc.) mas, sim, nos resultados da escolha. Assim, a questão é *determinar quantas configurações síndico-conselho fiscal podem ser formadas.* A outra parte do enunciado são os dados do problema. Assim, temos:

Questão: quantas configurações com um síndico e um
conselho fiscal são possíveis?

3.3 Objetos básicos e configurações

Tendo determinado a questão do problema, o segundo passo na resolução de problemas de contagem é identificar com clareza os objetos que estão sendo contados. Para isto, devemos distinguir quais são os objetos básicos e as configurações de que trata o problema.

Exemplo 14 Considere novamente o problema das visitas, do Exemplo 9.

Neste problema, os objetos básicos são as 5 empresas; e as configurações são as ordenações das empresas, formando as ordens das visitas.

Exemplo 15 Considere novamente o problema das estiquetas, do Exemplo 10.

Neste problema, os objetos básicos são as 26 letras $a, b, c, \ldots, x, y, z$ e os 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$; e as configurações são as etiquetas formadas por uma parte literal e outra numérica, nesta ordem, sendo que a parte literal é formada de três letras e a parte numérica é formada por quatro algarismos.

Exemplo 16 Considere novamente o problema dos números naturais, do Exemplo 11.

O problema não explicita os objetos básicos mas, como sabemos, os números do sistema decimal são formados a partir dos algarismos decimais. Assim, neste problema, os objetos básicos são os 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$; e as configurações são os números naturais de cinco algarismos, sem algarismos adjacentes iguais, formados com estes algarismos.

Exemplo 17 Considere novamente o problema das cestas básicas, do Exemplo 12.

Neste problema, os objetos básicos são os 10 produtos; e as configurações são as cestas básicas formadas com 6 desses produtos, que possuem um certo produto.

Exemplo 18 Considere novamente o problema da escolha de síndico e conselho fiscal, do Exemplo 13.

Neste problema, os objetos básicos são os 10 moradores; e as configurações são objetos complexos, que consistem de 1 síndico e um conselho fiscal de 4 moradores, formados com os moradores.

3.4 Representação de configurações

Representar as configurações de maneira precisa, a partir da especificação dos elementos que a formam e das operações e relações que podem ser aplicadas sobre estes elementos para formá-las, é um passo extremamente importante no processo de contagem.

O terceiro e o quarto passos na resolução de problemas de contagem lidam com este problema. Para efetuar estes passos, devemos obter uma boa compreensão de como as configurações são formadas a partir dos objetos básicos e, baseados nesta compreensão, escolher uma notação adequada para descrever as configurações genericamente. Estes são os passos do processo de contagem aonde o formalismo matemático se mostra mais imprescindível.

Exemplo 19 No problema das visitas do Exemplo 9, as configurações são formadas pelas 5 empresas dispostas na ordem em que o fiscal vai visitá-las.

Além disso, de acordo com o enunciado do problema, não há repetições de empresas na formação de uma visita.

Assim, as visitas são sequências de empresas, que podem ser representadas genericamente por uma lista

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

onde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 representam as 5 empresas.

Exemplo 20 No problema das estiquetas do Exemplo 10, as configurações são formadas por uma parte literal com 3 letras e outra numérica com 4 algarismos. De acordo com o enunciado do problema, a parte literal inicia as etiquetas e esta é seguida da parte numérica. Também, não há nenhuma restrição sobre a repetição de letras e algarismos na formação das etiquetas. Além disso, não está escrito no enunciado, mas está claro de acordo com o senso comum, que a ordenação da parte literal e a ordenação da parte numérica devem ser levadas em conta.

Assim, etiquetas são sequências de letras e algarismos, que podem ser representadas genericamente por uma lista

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

onde x_1, x_2, x_3 representam letras e y_1, y_2, y_3, y_4 representam algarismos.

Exemplo 21 No problema dos números naturais do Exemplo 11, as configurações são formadas por 5 algarismos. De acordo com o enunciado do problema, algarismos adjacentes são diferentes um do outro. Também, não há nenhuma restrição sobre a não identificação de algarismos não consecutivos. Além disso, não está escrito no enunciado, mas está claro de acordo com o senso comum, que o algarismo 0 não pode iniciar a representação de um número natural e a ordenação dos algarismos na formação do número deve ser levada em conta.

Assim, números naturais sem algarismos adjacentes iguais são sequências de algarismos, que podem ser representados genericamente por uma lista

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

onde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 representam algarismos, de modo que $x_1 \neq 0$, $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, $x_3 \neq x_4$ e $x_4 \neq x_5$; ou mais resumidamente, $x_1 \neq 0$ e $x_i \neq x_{i+1}$, com $1 \leq i \leq 4$.

Exemplo 22 No problema das cestas básicas do Exemplo 12, as configurações também são formadas por 6 produtos escolhidos para formar a cesta. Além disso, o enunciado do problema não especifica nenhuma ordem entre estes produtos e deixa claro que não há repetições de produtos.

A única restrição é que um determinado produto deve sempre fazer parte da cesta.

Assim, as cestas são conjuntos especiais, cujos elementos são 6 produtos, sendo um deles um produto específico. Vamos denotar esse produto específico por p. Assim, as cestas de 6 produtos, sendo um deles p, podem ser representadas genericamente por

$$\{p, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

onde p representa um produto distinguido e x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 representam 5 produtos distintos dois a dois e distintos de p.

Exemplo 23 No problema da escolha de síndico e conselho fiscal do Exemplo 13, as configurações são formadas por duas partes: um síndico e um conselho fiscal. O síndico é um morador e um conselho fiscal é um grupo de 4 moradores. Além disso, o enunciado do problema não especifica nenhuma ordem entre estas duas partes, nenhuma ordem entre os moradores do conselho fiscal, e deixa claro que não há repetições de moradores no conselho e que o síndico não pode fazer parte do conselho fiscal.

Assim, as configurações síndico-conselho fiscal são conjuntos, cujos elementos são 1 pessoa e um conjunto de 4 pessoas, e podem ser representadas genericamente por

$$\{x_1, \{y_1, y_2, y_3, y_4\}\}$$

onde x_1, y_1, y_2, y_3, y_4 representam 5 moradores distintos dois a dois.

Exemplo 24 Considere agora o seguinte problema, adaptado do problema da escolha de síndico e conselho fiscal do Exemplo 13.

> Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros de um conselho que consiste de um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

Neste problema, a questão também é determinar o número de escolhas; os objetos básicos também são os 10 moradores; e as configurações também são as escolhas formadas por 1 síndico e um conselho de 4 moradores. Mas o que se entende por escolha aqui é ligeiramente diferente do que se entende por escolha no problema do Exemplo 13.

De fato, neste caso, as configurações também são formadas por duas partes: síndico e conselho. Mas embora continue não havendo repetições entre os moradores do conselho, o enunciado do problema afirma implicitamente que existe uma ordem entre eles, que distinguirá o presidente, o vice-presidente, o secretário e o tesoureiro.

Desta forma, as configurações são conjuntos cujos elementos são 1 pessoa e uma sequência especial de 4 pessoas. Assim, as configurações síndico-conselho fiscal devem agora ser representadas genericamente por

$$\{x_1, (y_1, y_2, y_3, y_4)\}$$

onde x_1, y_1, y_2, y_3, y_4 representam 5 moradores distintos dois a dois.

3.5 Especificação de configurações e princípios de contagem

Os dois últimos passos na resolução de problemas de contagem são a *especificação* de como as configurações são formadas a partir dos objetos básicos e a *elaboração* de uma *estratégia de contagem* cuja *implementação* nos leva à determinação do número de configurações em questão.

Para que o método que propomos faça sentido, a elaboração de uma tal estratégia deve tomar como base a especificação obtida no passo anterior. Além disso, a *implementação* da estratégia elaborada deve ser baseada nos princípios de contagem que serão apresentados e exemplificados nos capítulos seguintes.

Especificação de configurações e implementação dos métodos de contagem são os processos mais sutis na aplicação do método que estamos descrevendo. Assim, o melhor que fazemos agora é apresentar os princípios de contagem e mostrar, através da resolução de problemas simples — até a resolução de problemas mais complicados — como esses procedimentos podem ser efetuados. Isto é o que será feito daqui por diante.

Os princípios apresentados são o Princípio da Bijeção, o Princípio da Adição, o Princípio da Multiplicação, o Princípio k para 1 e o Princípio da

Inclusão-Exclusão. Em um primeiro momento, cada princípio é apresentado e aplicado isoladamente, o que faz com que os exemplos tratados sejam simples e diretos. Exemplos mais elaborados, que exigem a aplicação conjunta dos princípios são apresentados na medida em que isso se torna possível.

Capítulo 4

Princípio da bijeção

Neste capítulo apresentamos (nas Seções 4.1 e 4.2) e exemplificamos (na Seção 4.3) o princípio da bijeção, PB.

O PB é um princípio de contagem bastante simples e, aparentemente, de pouca aplicabilidade. Mas, como veremos adiante, quando usado em conjunto com os outros princípios, ele se torna uma ferramenta extremamente poderosa na resolução de problemas.

4.1 A idéia do PB

Considere o seguinte problema:

> Seja $\mathcal{L}$ o conjunto das letras maiúsculas do alfabeto da língua portuguesa. Quantos elementos $\mathcal{L}$ possui?

Resolução:

Neste problema não há distinção entre objetos básicos e configurações.

Podemos resolver este problema usando o conhecimento já adquirido no Capítulo 2. Basta observar que o conjunto $\mathcal{L}$ das letras maiúsculas e o conjunto L das letras minúsculas estão relacionados de modo que a cada letra maiúscula corresponde exatamente uma letra minúscula e que cada letra minúscula é a correpondente de exatamente uma letra maiúscula:

$$\begin{array}{cc} A & a \\ B & b \\ C & c \\ \vdots & \vdots \\ X & x \\ Y & y \\ Z & z \end{array}$$

Como já sabemos, L possui 26 elementos. Assim, $|\mathcal{L}| = 26$. □

A resolução deste problema simples ilustra a idéia principal do PB: o PB pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto X, simplesmente pela troca de X por um outro conjunto A, para o qual já sabemos determinar $|A|$. Neste caso, X era o conjunto das letras maiúsculas e A o conjunto das letras minúsculas.

Para formalizar esta idéia, usamos a noção de *bijeção entre dois conjuntos*.

4.2 Enunciado do PB

Dois conjuntos estão em bijeção quando existe uma correspondência um-a-um entre seus elementos.

> Sejam X e A conjuntos finitos.
>
> Uma *bijeção* entre X e A é uma associação dos elementos de X aos elementos de A, de modo que cada elemento de X está associado a exatamente um elemento de A e cada elemento de A está associado a exatamente um elemento de X.

Neste caso, também dizemos que cada elemento de X corresponde a exatamente um elemento de A e, reciprocamente, que cada elemento de A é o correspondente de exatamente um elemento de X.

Exemplo 25 (a) Dados $X = \{0, 1\}$ e $A = \{2, 1\}$, temos que a figura

$$\begin{array}{ccc} 0 & \Leftrightarrow & 1 \\ 1 & \Leftrightarrow & 2 \end{array}$$

estabelece uma bijeção "natural" entre X e A.

(b) Dados $X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ e $A = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, temos que a figura

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \Leftrightarrow & (0,0) \\ \{a\} & \Leftrightarrow & (1,0) \\ \{b\} & \Leftrightarrow & (0,1) \\ \{a,b\} & \Leftrightarrow & (1,1) \end{array}$$

estabelece uma bijeção "natural" entre X e A.

Exercício 1 Estabeleça uma bijeção "natural" entre os conjuntos

$$Y = \{\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a\}, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}\}$$

e

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 0)\}.$$

A ideia central na formulação do PB é a de que, se para estabelecer uma bijeção entre os conjuntos X e A, devemos corresponder os elementos de X aos elementos de A de maneira que cada elemento de X corresponda a um único elemento de A e vice-versa, então quando estabelecemos uma bijeção entre dois conjuntos, eles possuem a mesma quantidade de elementos.

Mais formalmente temos:

Princípio da Bijeção:

Seja X um conjunto finito.

Se A é um conjunto tal que existe uma bijeção entre X e A, então

$$|X| = |A|.$$

4.3 Primeiras aplicações do PB

Na prática, o PB deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, à primeira vista, determinar.
2. Transformamos, através de uma bijeção, o conjunto X em um conjunto A cujo número de elementos já sabemos determinar.
3. Aplicamos o PB e concluímos que X tem o mesmo número de elementos que A.

Como um exemplo imediato da aplicação desta estratégia, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 26 O *Theatro Municipal do Rio de Janeiro* possui 2.361 lugares. Na estreia de determinado espetáculo, no Municipal, a lotação estava esgotada. Quantas pessoas foram assistir a esta estreia?

Resolução:

Neste problema os objetos básicos são as cadeiras do Municipal e as pessoas, e as configurações são as pessoas que assistiram à estreia.

Seja X o conjunto de tais pessoas. De acordo com o PB, se encontramos um conjunto A, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre X e A, o problema está resolvido.

Seja A o conjunto das cadeiras do Municipal. De acordo com o enunciado do problema, existe uma bijeção entre X e A. Além disso, sabemos que $|A| = 2.361$.

Assim, pelo PB, $|X| = 2.361$. □

Um exemplo um pouco mais elaborado de aplicação do PB é o seguinte:

Exemplo 27 Quantos elementos tem o conjunto $\{57, 58, 59, \ldots, 723\}$?

Resolução:

Neste problema não há distinção entre objetos básicos e configurações.

Seja $X = \{57, 58, 59, \ldots, 723\}$ o conjunto dado. De acordo com o PB, se encontramos um conjunto A, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre X e A, o problema está resolvido.

Já sabemos que, se A tem a forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, então, $|A| = n$.

Existe uma maneira "natural" de "transformar" o conjunto X num conjunto da forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ através de uma bijeção: basta subtrair 56 unidades de cada elemento de X. Assim, tomando $A = \{57 - 56, 58 - 56, 59 - 56, \ldots, 723 - 56\} = \{1, 2, 3, \ldots, 667\}$, temos que $|A| = 667$.

Assim, pelo PB, $|X| = 667$. □

4.4 Exercícios

1. Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid 25 \leq x \leq 79\}$?

2. Quantos elementos tem o conjunto $\{60, 70, 80, \ldots, 540\}$?

3. Quantos elementos tem o conjunto $\{15, 18, 21, \ldots, 144\}$?

4. Quantos elementos tem o conjunto $\{17, 23, 29, \ldots, 221\}$?

5. Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid 12 \leq \sqrt{x} \leq 31\}$?

6. No *campeonato maluco de ping-pong* existem m jogadores. O campeonato é disputado em rodadas e as regras são as seguintes:

   Em cada rodada:

   – formam-se, aleatoriamente, duplas com os jogadores, exceto um jogador, também escolhido aleatoriamente, que passa para a próxima rodada sem jogar, caso o número de jogadores seja ímpar;

   – os jogadores de cada dupla jogam entre si e todos os vencedores passam para a próxima rodada;

   – todos os perdedores são excluídos da competição.

   O jogador que vencer a última partida é o *campeão.*

   Pergunta-se: quantos jogos são efetuados no campeonato maluco de ping-pong?

4.4.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 2, 5 e 6.

Resolução do Exercício 2:

Neste problema não há distinção entre objetos básicos e configurações.

Seja $X = \{60, 70, 80, \ldots, 540\}$ o conjunto dado. De acordo com o PB, se encontramos um conjunto A, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre X e A, o problema está resolvido. Isto pode ser feito em duas etapas.

Em primeiro lugar, dividindo cada elemento de X por 10, obtemos o conjunto $B = \{\frac{60}{10}, \frac{70}{10}, \frac{80}{10} \ldots, \frac{540}{10}\} = \{6, 7, 8, \ldots, 54\}$. Observe que a associar $\frac{x}{10}$ a cada elemento x de X, estabelece uma bijeção entre X e B.

Em segundo lugar, subtraindo 5 unidades de cada elemento de B, obtemos o conjunto $A = \{6-5, 7-5, 8-5 \ldots, 54-5\} = \{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Observe que a associar $x - 5$ a cada elemento x de B estabelece uma bijeção entre B e A.

Assim, pelo PB, $|X| = |B| = |A| = 49$. $\square$

Resolução do Exercício 5:

Neste problema não há distinção entre objetos básicos e configurações.

Seja $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \leq \sqrt{x} \leq 31\}$ o conjunto dado. De acordo com o PB, se encontramos um conjunto A, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre X e A, o problema está resolvido.

Elevando cada elemento de X ao quadrado, obtemos o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 144 \leq x \leq 961\} = \{144, 145, 146, \ldots, 961\}$.

Observe que a associar x^2 a cada elemento x de X estabelece uma bijeção entre X e A.

Agora, o problema pode ser resolvido por uma aplicação direta do PB. □

Resolução do Exercício 6:

Neste problema, os objetos básicos são os m jogadores e as configurações são os jogos do campeonato maluco.

Seja X o conjunto de tais jogos. De acordo com o PB, se encontramos um conjunto A, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre X e A, o problema está resolvido.

Para isto, observe que, de acordo com as regras do campeonato maluco:

– cada elemento de X é formado por uma dupla de jogadores;

– cada elemento de X tem um ganhador e um perdedor;

– cada elemento de X é jogado uma única vez.

Assim, embora não saibamos exatamente quem são os elementos de X, sabemos que existe uma bijeção entre o conjunto X dos jogos e o conjunto A dos jogadores perdedores.

Mas, de acordo com as regras do campeonato maluco, um único jogador é o campeão e todos os outros são perdedores. Assim, $|A| = m - 1$,

Logo, pelo PB, $|X| = |A| = m - 1$. □

Capítulo 5

Princípio da adição

Neste capítulo, apresentamos (nas Seções 5.1 e 5.2) e exemplificamos (na Seção 5.3) o Princípio da Adição, PA.

Da mesma forma que o PB, o PA é um princípio de contagem bastante simples e parece ser de pouca aplicabilidade. Mas, como veremos adiante, quando usado em conjunto com os outros princípios, ele também se torna uma ferramenta extremamente poderosa na resolução de problemas.

O que chamamos de PA consiste, na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $n \geq 2$. Vamos descrever inicialmente o caso em que $n = 2$ e, posteriormente, generalizar para o caso em que n é arbitrário.

5.1 A idéia do PA2

Considere o seguinte problema:

> Uma mulher possui, em seu guarda-roupas, 5 blusas e 3 saias. Uma *peça de roupa* consiste de uma blusa ou de uma saia. Quantas peças de roupa ela possui?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as blusas e as saias e as configurações são as peças de roupa, que são ou uma blusa ou uma saia. Assim, neste caso, as configurações são obtidas escolhendo-se um objeto básico, simplesmente.

Seja X o conjunto das peças de roupa.

Para determinar $|X|$, basta observar que X pode ser "quebrado" em dois subconjuntos: o conjunto A_1 das blusas e o conjunto A_2 das saias.

Isto quer dizer que cada elemento de X é ou uma blusa ou uma saia; e que nenhum elemento de X é, ao mesmo tempo, uma blusa e uma saia.

De acordo com o enunciado do problema, $|A_1| = 5$ e $|A_2| = 3$.
Assim, $|X| = 5 + 3 = 8$. □

A resolução deste problema simples ilustra a idéia principal do PA2: o PA2 pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto X, simplesmente pela troca de X por dois conjuntos menores A_1 e A_2, que possuem todos os elementos de X e que não possuem elementos em comum, para os quais sabemos determinar $|A_1|$ e $|A_2|$. Neste caso, X é o conjunto das peças de roupa, A_1 o conjunto das blusas e A_2 o conjunto das saias.

Para formalizar esta idéia, usamos a noção de *bipartição de um conjunto*.

5.2 Enunciado do PA2

Dois subconjuntos não vazios formam uma bipartição de um conjunto dado, quando cada elemento do conjunto dado pertence a exatamente um dos dois subconjuntos.

Sejam X um conjunto finito e A_1, A_2 subconjuntos não vazios de X.

(1) Dizemos que A_1 e A_2 *exaurem* X se, para cada elemento x de X, tem-se que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$, ou ambos; ou seja, se $A_1 \cup A_2 = X$.

(2) Dizemos que A_1 e A_2 são *disjuntos* se eles não possuem nenhum elemento em comum, ou seja, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(3) Dizemos que A_1 e A_2 são uma *bipartição* de X se A_1 e A_2 exaurem X e são disjuntos.

Neste caso, também dizemos que A_1 e A_2 são os *blocos* da bipartição e que a cada elemento de X corresponde a um e somente um dos blocos, A_1 ou A_2.

Exemplo 28 (a) O conjunto $X = \{1\}$ não possui bipartições.

(b) O conjunto $X = \{1, 2\}$ possui uma única bipartição: $A_1 = \{1\}$ e $A_2 = \{2\}$.

(c) O conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ possui 3 bipartições:

$$\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ \{1\} & \{2,3\} \\ \{2\} & \{1,3\} \\ \{3\} & \{1,3\} \end{array}$$

Exercício 2 Determine todas as bipartições do conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantas elas são?

A ideia central na formulação do PA2 é a de que, se para estabelecer uma bipartição de X separamos os elementos de X em dois conjuntos A_1 e A_2, de maneira que cada elemento de X está em um dos dois conjuntos e, se um elemento de X pertence a A_1 ele não pertence a A_2 e vice-versa, então quando estabelecemos uma bipartição de X nos conjuntos A_1 e A_2, a soma do número de elementos de A_1 com o número de elementos de A_2 é igual ao número de elementos de X.

Mais formalmente, temos:

Princípio da Adição para 2 conjuntos (PA2):

Seja X um conjunto finito.

Se A_1 e A_2 são subconjuntos de X tais que A_1 e A_2 são uma bipartição de X, então

$$|X| = |A_1| + |A_2|.$$

5.3 Primeiras aplicações do PA2

Na prática, o PA2 deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, à primeira vista, determinar.
2. Transformamos, através de uma bipartição, o conjunto X em dois conjuntos A_1 e A_2 cujos números de elementos já sabemos determinar.

3. Aplicamos o PA2 e concluímos que o número de elementos de X é igual ao número de elementos de A_1 mais o número de elementos de A_2.

Como um exemplo imediato da aplicação desta estratégia, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 29 Para ir trabalhar, diariamente, uma pessoa possui os seguintes recursos: pode pegar carona com um de 5 amigos ou tomar um ônibus de uma de 8 linhas. Quantas alternativas para ir trabalhar, diariamente, ela possui, dado que ela usa um destes recursos por dia?

Resolução:

Neste problema os objetos básicos são as caronas com os amigos e as linhas de ônibus, e as configurações são os recursos que a pessoa usa para ir trabalhar, que são as caronas ou as linhas de ônibus. Assim, as configurações são obtidas, simplesmente, escolhendo-se um dos objetos básicos.

Seja X o conjunto de todas as alternativas que a pessoa possui para ir trabalhar, diariamente.

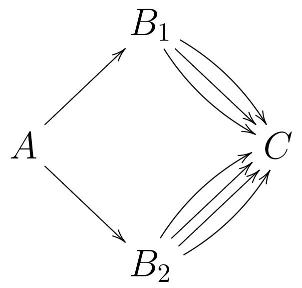
Considere os conjuntos A_1 das caronas e A_2 das linhas de ônibus. Uma alternativa para a pessoa ir trabalhar é pegar uma carona ou tomar um ônibus. Além disso, ela não pega uma carona e toma um ônibus simultaneamente. Logo, A_1 e A_2 são os blocos de uma bipartição de X. Assim, pelo PA2, se determinamos $|A_1|$ e $|A_2|$, o problema está resolvido.

De acordo com o enunciado do problema, $|A_1| = 8$ e $|A_2| = 5$.

Assim, pelo PA2, $|X| = 8 + 5 = 13$. □

Um exemplo um pouquinho mais elaborado da aplicação do PA2 é o seguinte:

Exemplo 30 Existem apenas dois modos de atingir a cidade C partindo da cidade A, conforme especificado na figura:



Uma delas é ir até uma cidade intermediária B_1 e de lá ir para C; a outra é ir até uma outra cidade intermediária B_2 e de lá ir para C. Sabendo que não existe nenhuma maneira de ir diretamente de A para C, nem de B_1 para B_2, e que existe uma estrada ligando A a B_1; três ligando B_1 a C; uma ligando A a B_2; e quatro ligando B_2 a C; determine o número de percursos diferentes que podem ser feitos para, partindo de A, atingir C.

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as maneiras diretas de ir de uma cidade para a outra, e as configurações são os percursos de A para C, que podem ser feitos passando por uma das cidades intermediárias B_1 ou B_2.

Seja X o conjunto dos percursos de A para C.

Considere o conjunto A_1 dos percursos que passam por B_1 e o conjunto A_2 dos percursos que passam por B_2.

Um percurso em X passa, necessariamente, por B_1 ou B_2. Além disso, não existem percursos em X que passam por B_1 e por B_2 simultaneamente. Logo, A_1 e A_2 são os blocos de uma bipartição de X. Assim, pelo PA2, se determinamos $|A_1|$ e $|A_2|$, o problema está resolvido.

Se partimos de A para B_1, encontramos lá, três estradas partindo de B_1 para C. Daí, temos 3 percursos partindo de A, passando por B_1, e chegando em C, ou seja, $|A_1| = 3$.

Se partimos de A para B_2, encontramos lá, quatro estradas partindo de B_2 para C. Daí, temos 4 percursos partindo de A, passando por B_2, e chegando em C, ou seja, $|A_2| = 4$.

Assim, pelo PA2, temos $|X| = 3 + 4 = 7$. □

5.4 Primeiras aplicações do PA

A resolução de alguns problemas deixa claro que a idéia acima não se limita apenas aos casos em que "quebramos" o conjunto X em exatamente 2 conjuntos.

Exemplo 31 Para ir de uma cidade A até uma cidade B, pode-se tomar avião, navio ou ônibus. Existem 3 maneiras de ir de avião, 2 de navio e 5 de ônibus. Determine o número total de maneiras diferentes de ir de A para B com os recursos disponíveis.

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as maneiras de ir de avião, de navio, ou de ônibus, e as configurações são as maneiras de ir de A para B, que podem ser feitas usando um destes recursos disponíveis.

Seja X o conjunto das maneiras de ir de A para B.

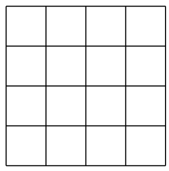
Considere o conjunto A_1 das maneiras de ir de avião, A_2 das maneiras de ir de navio e A_3 das maneiras de ir de ônibus.

Como cada maneira em X pertence a exatamente um dos conjuntos A_1, A_2 ou A_3, temos que, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_3|$, o problema está resolvido. De fato, para determinar $|X|$, basta somar $|A_1|$ com $|A_2|$ e com $|A_3|$.

De acordo com o enunciado do problema, $|A_1| = 3$, $|A_2| = 2$ e $|A_1| = 5$.

Assim, temos $|X| = 3 + 2 + 5 = 10$. □

Exemplo 32 Determine o número total de quadrados que podem ser desenhados, de modo que os lados de cada quadrado estejam sobre as linhas da figura abaixo (chamada *grade*), composta de 16 quadrados (chamados *células*).

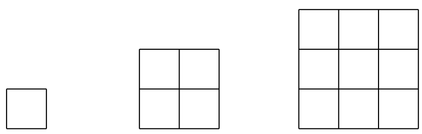


Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os seguimentos de reta sobre a grade que formam quadrados, e as configurações são os quadrados que podem ser desenhados sobre as linhas da grade.

Seja X o conjunto de todos os quadrados que podem ser desenhados sobre as linhas da grade.

Observe que cada elemento de X é um quadrado formado por 1, 4, 9 ou 16 células, respectivamente. Ou seja, a própria grade e as figuras:



Considere o conjunto A_1 dos quadrados que usam 1 célula; A_2 o conjunto dos quadrados que usam 4 células; A_3 o conjunto dos quadrados que usam 9 células; e A_4 o conjunto dos quadrados que usam 16 células.

Como cada quadrado em X pertence a exatamente um dos conjuntos A_1, A_2, A_3 ou A_4, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$ e $|A_4|$, o problema está resolvido, pois para determinar $|X|$ basta somar $|A_1|$ com $|A_2|$, com $|A_3|$ e com $|A_4|$.

De acordo com o enunciado do problema, $|A_1| = 16$, $|A_2| = 9$, $|A_3| = 4$ e $|A_4| = 1$.

Assim, temos $|X| = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$. $\square$

O que foi dito acima mostra que o PA é uma generalização simples do PA2. Para enunciá-lo de maneira formal (e correta) precisamos da noção de *partição.*

Uma coleção de subconjuntos não vazios forma uma partição de um conjunto dado, quando cada elemento do conjunto dado pertence a exatamente um destes subconjuntos.

> Sejam X um conjunto finito e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos não vazios de X.
>
> (1) Dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *exaurem* X se, para cada elemento x de X, existe i, com $1 \leq i \leq n$, tal que $x \in A_i$; ou seja, se $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = X$.
>
> (2) Dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são *disjuntos dois a dois* se, quando examinados aos pares, eles não possuem elementos em comum; ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos i, j com $1 \leq i \neq j \leq n$.
>
> (3) Dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são uma *partição* de X se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ exaurem X e são disjuntos dois a dois.

Neste caso, também dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os *blocos* da partição e que a cada elemento de X corresponde a um e somente um dos blocos A_i, onde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Observamos que toda bipartição é uma partição de um conjunto em dois blocos.

Exemplo 33 O conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 1.000\}$ pode ser particionado de maneira "natural" no bloco dos números pares e no bloco dos números ímpares:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 1.000 \text{ e } x \text{ é par}\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 1.000 \text{ e } x \text{ é ímpar}\} \end{aligned}$$

Observe que os blocos acima também podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in X \text{ e } x \text{ deixa resto 0 quando dividido por 2}\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in X \text{ e } x \text{ deixa resto 1 quando dividido por 2}\} \end{aligned}$$

Esta última observação nos leva a uma outra partição "natural" de X, obtida pelos blocos cujos elementos são os números que deixam resto 0 quando divididos por 3, os que deixam resto 1 quando divididos por 3 e os que deixam resto 2 quando divididos por 3:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in X \text{ e } x \text{ deixa resto 0 quando dividido por 3}\} \\ B_2 &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in X \text{ e } x \text{ deixa resto 1 quando dividido por 3}\} \\ B_3 &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in X \text{ e } x \text{ deixa resto 2 quando dividido por 3}\} \end{aligned}$$

Exercício 3 (a) Determine uma partição "natural" do conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 1.000\}$ em 4 blocos, de acordo com o padrão acima.

(b) Generalize esta idéia, de modo a definir uma partição "natural" do conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 1.000\}$ em k blocos, onde $2 \leq k \leq 1.000$.

Antes de continuarmos com o estudo específico do PA, observamos que há uma diferença crucial entre as noções de bipartição e partição:

– É óbvio que, quando estamos tratando de apenas dois conjuntos, os conceitos "conjuntos disjuntos" e "conjuntos disjuntos dois a dois" coincidem.

  Portanto, neste caso, afirmar que dois conjuntos são disjuntos dois a dois é o mesmo que afirmar que a interseção deles é o conjunto vazio;

– Porém, quando temos mais de dois conjuntos, o conceito "conjuntos disjuntos dois a dois" não significa o mesmo que "conjuntos cuja interseção é vazia".

  Ou seja, para $n \geq 3$, existem conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ mas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ não são disjuntos dois a dois.

Por exemplo, os conjuntos $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ são tais que $\{1,2\} \cap \{1,3\} \cap \{2,3\} = \emptyset$ mas não são disjuntos dois a dois, pois, por exemplo, $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \neq \emptyset$.

Formalmente, temos:

– Se os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos dois a dois, então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$;

– Para $n \geq 3$, existem conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ mas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ não são disjuntos dois a dois.

Voltando à discussão principal, a ideia central na formulação do PA é a de que, se separamos os elementos de X em conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de maneira que cada elemento de X está em exatamente um dos conjuntos Ai, ou seja, se estabelecemos uma partição de X nos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então a soma do número de elementos de A_1 com o número de elementos de A_2 com $\ldots$ com o número de elementos de A_n é igual ao número de elementos de X.

Mais formalmente, temos:

Princípio da Adição (PA):

Seja X um conjunto finito.

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são uma partição de X, então

$$|X| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Na prática, o PA deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, à primeira vista, determinar.

2. Transformamos, através de uma partição, o conjunto X em n subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cujos números de elementos já sabemos determinar.

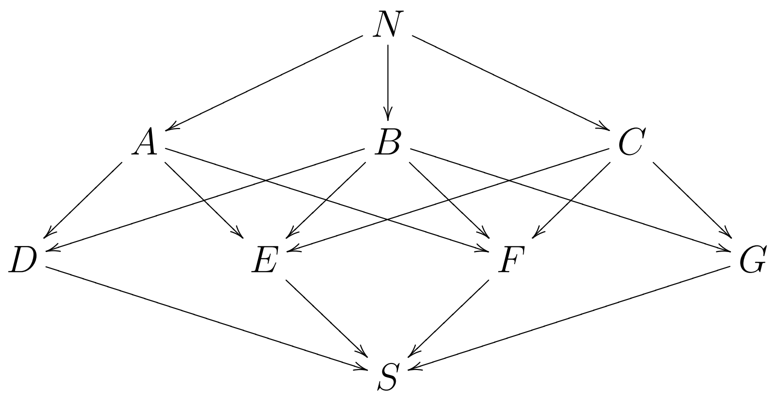
3. Aplicamos o PA e concluímos que o número de elementos de X é igual ao somatório do número de elementos dos A_i, com $1 \leq i \leq n$.

5.5 Exercícios

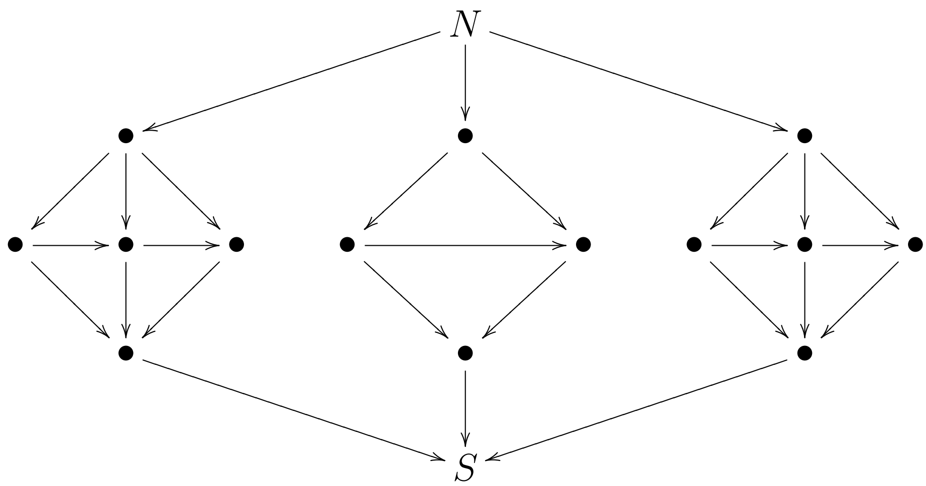
1. Uma turma possui 18 meninos e 12 meninas. De quantas maneiras um representante de turma pode ser escolhido nesta turma?

2. Cada seta na figura abaixo tem dois extremos rotulados e representa a única maneira possível de se mover do ponto rotulado que a inicia para

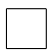
o outro ponto rotulado que a termina. Quantos maneiras existem de ir de N para S através de pontos intermediários?



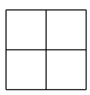
3. Cada seta na figura representa a única maneira possível de se mover do ponto que a inicia para o ponto que a termina. Quantos maneiras existem de ir de N para S através de pontos intermediários?



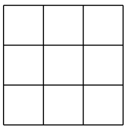
4. (a) Determine o número total de quadrados que podem ser desenhados em uma grade com 1 célula:



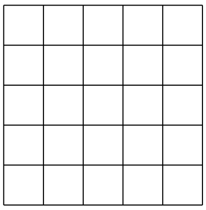
   (b) Determine o número total de quadrados que podem ser desenhados em uma grade com 4 células:



   (c) Determine o número total de quadrados que podem ser desenhados em uma grade com 9 células:



(d) Determine o número total de quadrados que podem ser desenhados em uma grade com 25 células:



(e) Elabore uma fórmula geral, em função de n, para determinar o número total de quadrados que podem ser desenhados em uma grade com n^2 células.

5. Em uma festa de casamento, estão presentes 25 casais convidados e 40 membros da família, sendo que, dentre os membros da família, 23 são mulheres. Além disso, um dos padrinhos que fazia parte dos 4 casais formados por um padrinho e uma madrinha não compareceu. De quantas maneiras podemos escolher um marido ou um familiar para substituir o padrinho faltoso?

5.5.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 1, 3 e 5.

Resolução do Exercício 1:

Neste problema, os objetos básicos são os meninos e as meninas da turma e não há distinção entre objetos básicos e configurações.

Seja X o conjunto de todos os meninos e meninas.

Considere o conjunto A_1 dos meninos e o conjunto A_2 das meninas.

Como A_1 e A_2 são uma bipartição de X, pelo PA, se determinamos $|A_1|$ e $|A_2|$, o problema está resolvido.

De acordo com o enunciado do problema, $|A_1| = 18$ e $|A_2| = 12$.

Assim, pelo PA, temos $|X| = 18 + 12 = 30$. $\square$

Resolução do Exercício 3:

Neste problema, os objetos básicos são as setas que ligam dois pontos na figura, e as configurações são as sequências de setas, que iniciam em N e terminam em S, e passam por pontos intermediários, entre N e S.

Seja X o conjunto de todas as tais sequências de setas.

Considere A_1 o conjunto dos elementos de X que passam pelo ponto imediatamente abaixo de N que fica à esquerda, na figura; A_2 o conjunto dos elementos de X que passam pelo ponto imediatamente abaixo de N que fica no centro, na figura; e A_3 o conjunto dos elementos de X que passam pelo ponto imediatamente abaixo de N que fica à direita, na figura.

Como A_1, A_2 e A_3 são uma partição de X, pelo PA, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_3|$ o problema está resolvido.

Por contagem direta, temos que $|A_1| = 6$. Também, por contagem direta, temos que $|A_2| = 3$. Para determninar $|A_3|$, basta observar que por semelhança (geométrica das figuras), existe uma bijeção entre A_1 e A_3. Assim, pelo PB, $|A_3| = |A_1| = 6$.

Logo, pelo PA, temos $|X| = 6 + 3 + 6 = 15$. □

Resolução do Exercício 5:

Neste problema, os objetos básicos são os casais convidados e os familiares presentes, e as configurações são os maridos convidados ou (exclusivo) os homens da família que estão presentes.

Seja X o conjunto de todos os homens presentes que são maridos ou (exclusivo) familiares.

Considere o conjunto A_1 dos maridos e o conjunto A_2 dos familiares.

Como A_1 e A_2 são uma bipartição de X, pelo PA, se determinamos $|A_1|$ e $|A_2|$, o problema está resolvido.

Para determninar $|A_1|$, basta observar que existe uma bijeção entre o conjunto dos casais e o conjuntos dos maridos. Assim, pelo PB, $|A_1| = 20$.

Para determninar $|A_2|$, basta observar que o conjunto F dos familiares pode ser particionado nos conjuntos A_2 dos homens e A_3 das mulheres. Assim, pelo PA, $|F| = |A_2| + |A_3|$, ou seja, $|A_2| = |F| - |A_3| = 40 - 23 = 17$.

Assim, pelo PA, temos $|X| = 20 + 17 = 37$. □

Capítulo 6

Princípio da multiplicação

Neste capítulo, apresentamos (nas Seções 6.1 e 6.2) e exemplificamos (na Seção 6.2) o princípio da multiplicação, PM.

Da mesma forma que o PB e o PA, o Princípio da Multiplicação, PM, é um princípio de contagem bastante simples. Mas, diferentemente dos outros dois, rapidamente nos damos conta de que o PM possui uma grande aplicabilidade, principalmente quando usado em conjunto com o PB e o PA.

Da mesma forma que o PA, o que chamamos de PM consiste na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $n \geq 2$. Vamos descrever inicialmente o caso em que $n = 2$ e, posteriormente, generalizar para o caso em que n é arbitrário.

6.1 A idéia do PM2

Considere o seguinte problema:

> Uma mulher possui, em seu guarda-roupas, 5 blusas e 3 saias. Uma *vestimenta* consiste de uma blusa e de uma saia. Quantas vestimentas ela pode formar?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as saias e as blusas, e as configurações são as vestimentas formadas por uma blusa e uma saia. Assim, uma vestimenta pode ser representada genericamente por um par ordenado (x, y), cujos termos representam respectivamente, uma blusa e uma saia.

Seja X o conjunto das vestimentas. Para formar uma vestimenta (x, y), a mulher pode tomar duas decisões:

$$\begin{aligned} d_1 &: \text{ escolher um blusa para ser } x; \\ d_2 &: \text{ escolher uma saia para ser } y. \end{aligned}$$

Observe que d_1 é tomada no conjunto B das blusas e d_2 é tomada no conjunto S das saias. Além disso, como não há restrições na combinação de blusas e saias, para cada elemento de B que a mulher escolher, todos os elementos de S estão disponíveis para serem escolhidos.

Apenas para visualizar um pouco melhor o que está acontecendo, vamos considerar que $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ e que $S = \{s_1, s_2, s_3\}$.

Agora, se para formar uma vestimenta, a mulher escolhe a blusa b_1, após ter escolhido esta blusa, ela pode escolher qualquer uma das três saias, s_1, s_2 ou s_3. Assim, temos as vestimentas (b_1, s_1), (b_1, s_2) e (b_1, s_3), formadas com a blusa b_1.

Analogamente, se para formar uma vestimenta, a mulher escolhe a blusa b_2, após ter escolhido esta blusa, ela pode escolher qualquer uma das três saias. Assim, temos as vestimentas (b_2, s_1), (b_2, s_2) e (b_2, s_3), formadas com a blusa b_2.

Raciocínios análogos fornecem três vestimentas formadas após a escolha de cada uma das outras blusas, b_3, b_4 e b_5.

Assim, $|X| = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

Observe que $|X|$ pode ser obtido diretamente pelo produto 5×3 dos números de maneiras em que as decisões podem ser tomadas: 5 blusas e 3 saias. □

A resolução deste problema simples ilustra a idéia principal do PM2: o PM2 pode ser usado na determinação do número de elementos de um conjunto X quando sabemos que cada elemento de X pode ser formado pela tomada de duas decisões, de modo que a primeira decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras e, <u>para cada maneira em que a decisão d_1 pode ser tomada</u>, a segunda decisão pode ser tomada de m_2 maneiras. Neste caso, X era o conjunto das vestimentas, d_1 era a escolha de uma blusa e d_2 era a escolha de uma saia.

Para entender a necessidade da frase "para cada maneira em que a decisão d_1 pode ser tomada" destacada acima, vamos examinar uma resolução alternativa para o problema das vestimentas, bem como a resolução de um outro problema.

Resolução alternativa:

Consideremos, agora, a seguinte maneira de resolver o problema das vestimentas.

Vamos raciocinar como acima, mas considerando que, para formar uma vestimenta (x, y), podemos tomar as seguintes decisões:

$$\begin{array}{lcl} d_1 & : & \text{escolher uma saia para ser } y; \\ d_2 & : & \text{escolher uma blusa para ser } x. \end{array}$$

Observe que, como na resolução anterior, uma vestimenta consiste de uma blusa e uma saia, mas agora d_1 é tomada no conjunto S das saias e d_2 é tomada no conjunto B das blusas. Além disso, como não há restrições na combinação de blusas e saias, para cada elemento de S que a mulher escolher, todos os elementos de B estão disponíveis para serem escolhidos.

Para visualizar, vamos considerar mais uma vez que $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ e que $S = \{s_1, s_2, s_3\}$.

Agora, se para formar uma vestimenta a mulher escolhe a saia s_1, após ter escolhido esta saia, ela pode escolher qualquer uma das cinco blusas. Assim, temos as vestimentas (b_1, s_1), (b_2, s_1), (b_3, s_1), (b_4, s_1) e (b_5, s_1), formadas com a saia s_1.

Analogamente, se para formar uma vestimenta, a mulher escolhe a saia s_2, após ter escolhido esta saia, ela pode escolher qualquer uma das cinco blusas. Assim, temos as vestimentas (b_1, s_2), (b_2, s_2), (b_3, s_2), (b_4, s_2) e (b_5, s_2), formadas com a saia s_2.

Um raciocínio análogo fornece cinco vestimentas formadas após a escolha da saia s_3.

Assim, $|X| = 5 + 5 + 5 = 15$.

Observe que $|X|$ pode ser obtido diretamente pelo produto 3×5 dos números de maneiras em que as decisões podem ser tomadas: 3 saias e 5 blusas. $\square$

Exercício 4 Considere o seguinte problema:

> Dispomos dos 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$ para formar palavras de dois algarismos. Uma palavra de dois algarismos é um *numeral* quando o seu primeiro termo é diferente de 0. Quantos numerais podem ser formados?

Considerando um numeral como um par ordenado (x_1, x_2) de algarismos, onde $x_1 \neq 0$, e tomando como modelo a resolução do problema das vestimentas, resolva este problema de duas maneiras:

(a) Escolhendo primeiro um algarismo para ser x_1 e depois um algarismo para ser x_2;
(b) Escolhendo primeiro um algarismo para ser x_2 e depois um algarismo para ser x_1.

Neste caso, independente da ordem das decisões, o resultado pode ser obtido diretamente pelo produto dos números de maneiras em que as decisões são tomadas?

Considere agora o seguinte problema:

> Dispomos dos 10 algarimos $0, 1, 2, \ldots, 9$ para formar sequências de dois algarismos. Uma sequência de dois algarismos é um *numeral* quando o seu primeiro termo é diferente de 0. Quantos numerais com dois algarismos diferentes podem ser formados?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os dígitos e as configurações são os numerais com dois algarismos diferentes, ou seja, os pares ordenados de dois algarismos diferentes que podem ser formadas com estes dígitos, cujo primeiro termo é diferente de 0. Assim, um numeral pode ser representado genericamente por um par ordenado (x_1, x_2), cujos termos são algarismos tais que $x_1 \neq 0$ e $x_1 \neq x_2$.

Seja X o conjunto de todos estes numerais. Para formar um elemento (x_1, x_2) de X podemos tomar duas decisões:

$$\begin{aligned} d_1 &: \text{ escolher um algarismo} \neq 0 \text{ para ser } x_1, \\ d_2 &: \text{ escolher um algarismo} \neq x_1 \text{ para ser } x_2. \end{aligned}$$

Ambas as decisões d_1 e d_2 são tomadas no conjunto dos algarismos, mas d_1 deve ser tomada no subconjunto dos algarismos diferentes de 0.

Como dispomos de 9 algarismos diferentes de 0, d_1 pode ser tomada de 9 maneiras. Além disso, para cada maneira como d_1 pode ser tomada, como dispomos de 8 algarismos diferentes de 0 ainda não escolhidos e como, agora, o 0 também pode ser escolhido, e_2 pode ser tomada de 9 maneiras.

Assim, $|X| = 9 \times 9 = 81$. □

Vejamos, agora, o que acontece quando tentamos elaborar uma resolução alternativa para este problema, simplemente trocando a ordem das decisões.

Tentativa de resolução alternativa:

A princípio, poderíamos tentar raciocinar como acima, mas considerando que para formar um elemento (x_1, x_2) de X, podemos tomar duas decisões:

$$\begin{aligned} d_1 &: \text{ escolher um algarismo para ser } x_2, \\ d_2 &: \text{ escolher um algarismo} \neq 0 \text{ e} \neq x_2 \text{ para ser } x_1. \end{aligned}$$

Agora, d_1 se refere ao conjunto de todos os dígitos e d_2 se refere ao conjunto de todos os dígitos diferentes de 0.

Se ao tomarmos d_1 escolhemos o dígito 0, após tomarmos d_1, temos os dígitos $1, 2, 3, \ldots, 9$ disponíveis e d_2 pode ser tomada de 9 maneiras.

Se ao tomarmos d_1 escolhemos um dígito diferente de 0 — por exemplo, o 1 — após tomarmos d_1, não temos 9 dígitos à nossa disposição — por exemplo, se escolhemos o 1 os dígitos à disposição são 2, 3, 4, …, 9, que perfazem um total de 8 dígitos, já que o 0 não pode ser escolhido para ser x_1 — e d_2 pode ser tomada de 8 maneiras.

Assim, nesta tentativa de resolução, não é verdade que as decisões podem ser tomadas de modo que a primeira decisão d_1 pode ser efetuada de m_1 maneiras e, para cada maneira em que a decisão d_1 pode ser tomada, a segunda decisão pode ser tomada de m_2 maneiras. De fato, neste caso, se ao tomar d_1 escolhemos o 0, temos 9 alternativas para tomar d_2, mas se escolhemos um dígito diferente de 0, temos apenas 8. Assim, não é verdade que, independente da ordem das escolhas, o resultado pode ser obtido diretamente pelo produto dos números de maneiras em que as decisões são tomadas.

Exercício 5 Resolver o problema acima, usando o PA2 e as idéias já apresentadas, de modo a obter como resposta:

$$|X| = 1 \times 9 + 9 \times 8 \times 8 = 9 + 72 = 81.$$

6.2 Enunciado do PM2

As resoluções para os problemas das vestimentas e dos algarismos apresentadas acima (excluindo a tentativa mal sucedida para o problema dos algarismos com dígitos diferentes) envolveram, cada uma, a tomada de duas *decisões* d_1 e d_2, que também chamaremos *escolhas* ou *tarefas*.

Em cada caso, o número de maneiras m_1 de tomar d_1 foi facilmente determinado a partir do enunciado do problema. Também, em cada caso, nas resoluções bem sucedidas, para cada maneira como d_1 pode ser tomada, d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras.

A ideia de que cada maneira de tomar uma decisão d_1 corresponde à mesma quantidade de maneiras de tomar uma decisão d_2 nos leva a considerar que o número de maneiras de tomar a decisão d_1 seguida da decisão d_2 é o produto do número de maneiras de tomar a decisão d_1 pelo número de maneiras de tomar a decisão d_2. De fato, o número total de maneiras é: $\underbrace{m_1 + m_1 + \ldots + m_1}_{m_2 \text{ vezes}} = m_1 \times m_2$.

Princípio da Multiplicação para dois conjuntos (PM2):

Seja X um conjunto finito.

Se cada elemento de X pode ser formado pela tomada de duas decisões d_1 e d_2, de maneira que:

– a decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras;

– para cada maneira possível em que a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras;

então:
$$|X| = m_1 \times m_2.$$

6.3 Primeiras aplicações do PM2

Na prática, o PM2 deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X, onde cada elemento de X pode ser formado pela tomada de duas decisões, d_1 e d_2.

2. Concluímos que a decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras.

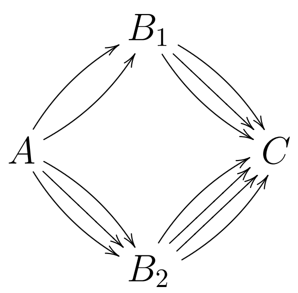
3. Concluímos que, para cada uma das maneiras em que a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras.

4. Aplicamos o PM2 e concluímos que o número de elementos de X é igual a $m_1 \times m_2$.

Na redação da resolução de certos problemas, é melhor escrever 'fazer escolhas' ou 'efetuar tarefas' ao invés de escrever 'tomar decisões'. Assim, conforme a conveniência, vamos usar as letras d, e e t para fazer referência a decisões, escolhas e tarefas, respectivamente.

Como um exemplo da aplicação desta estratégia na resolução de problemas de contagem, vamos resolver o seguinte problema, que envolve o PA2.

Exemplo 34 Existem apenas dois modos de atingir a cidade C partindo da cidade A, conforme especificado na figura:



Um deles é ir até uma cidade intermediária B_1 e de lá ir para C; o outro é ir até uma outra cidade intermediária B_2 e de lá ir para C. Sabendo que não existe nenhuma maneira de ir diretamente de B_1 para B_2, nem de A para C, e que existem duas estradas diretas ligando A a B_1; três ligando B_1 a C; três ligando A a B_2; e quatro ligando B_2 a C; determine o número de percursos diferentes que podem ser feitos para, partindo de A, atingir C.

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as estradas diretas ligando duas cidades e as configurações são os percursos de A para C, que podem ser feitos por uma das cidades intermediárias B_1 ou B_2. Assim, cada percurso pode ser representado por um par ordenado (x, y), onde x representa uma estrada direta ligando A a B_1 e y representa uma estrada direta ligando B_1 a C; ou x representa uma estrada direta ligando A a B_2 e y representa uma estrada direta ligando B_2 a C.

Seja X o conjunto dos percursos de A para C. Considere X particionado em dois conjuntos:

$$A_1 \; : \; \text{conjuntos dos percursos que passam por } B_1,$$
$$A_2 \; : \; \text{conjuntos dos percursos que passam por } B_2.$$

Como cada elemento de X pertence a exatamente um dos conjuntos A_1 ou A_2, temos que A_1 e A_2 são os blocos de uma bipartição de X. Assim, pelo PA2, se determinamos $|A_1|$ e $|A_2|$, o problema está resolvido.

Para formar um elemento de A_1, podemos tomar fazer duas escolhas:

$$\begin{aligned} e_1 &: \text{ escolher uma estrada de } A \text{ até } B_1 \text{ para ser } x, \\ e_2 &: \text{ escolher uma estrada de } B_1 \text{ até } C \text{ para ser } y. \end{aligned}$$

Temos que e_1 pode ser feita de 2 maneiras e, para cada maneira em que e_1 pode ser feita, e_2 pode ser feita de 3 maneiras. Assim, pelo PM2, $|A_1| = 2 \times 3 = 6$.

Analogamante, para formar um elemento de A_2, podemos executar duas tarefas:

$$\begin{aligned} t_1 &: \text{ escolher uma estrada de } A \text{ até } B_2 \text{ para ser } x, \\ t_2 &: \text{ escolher uma estrada de } B_2 \text{ até } C \text{ para ser } y. \end{aligned}$$

Temos que t_1 pode ser executada de 3 maneiras e, para cada maneira em que e_3 pode ser executada, t_2 pode ser executada de 4 maneiras. Assim, pelo PM2, $|A_3| = 3 \times 4 = 12$.

Assim, pelo PA2, temos $|X| = 6 + 12 = 18$.

6.4 Exercícios

1. Lembramos que o alfabeto português possui 26 letras, sendo 21 consoantes e 5 vogais.

   (a) Quantas palavras de 2 letras podemos formar?

   (b) Quantas palavras de 2 letras distintas podemos formar?

   (c) Quantas palavras podemos formar com uma consoante seguida de uma vogal?

   (d) Quantas palavras de duas letras podemos formar com uma consoante e uma vogal, em qualquer ordem?

   (e) Quantas palavras de 2 letras que não possuem vogais podem ser formadas?

   (f) Quantas palavras de 2 letras que possuem ao menos uma vogal podem ser formadas?

2. Lembramos que, no sistema decimal, os algarismos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e que os números naturais são representados por sequências finitas de algarismos, cujo primeiro termo não é 0.

   (a) Quantos números de 2 algarismos podem ser formados no sistema decimal? (Este é o Exercício 4 do texto).

   (b) Quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados no sistema decimal? (Este é o Exercício 5 do texto).

   (c) Quantos números pares de 2 algarismos podem ser formados no sistema decimal, se o 0 não é usado?

   (d) Quantos números pares de 2 algarismos podem ser formados no sistema decimal?

   (e) Quantos números pares de 2 algarismos distintos podem ser formados no sistema decimal?

3. Uma pessoa vai a uma loja comprar 1 mesa e 4 cadeiras iguais. Chegando lá, o vendedor mostra para ela vários modelos, sendo 7 modelos de mesa e 13 modelos de cadeira. Quantas possibilidades existem da pessoa efetuar a sua compra?

4. Uma pessoa possui em sua estante 25 livros de contos, 10 livros de poesia e 20 romances. Ao sair para uma viagem, pretende levar 2 livros, um de cada tipo. De quantas maneiras ela pode escolher os livros que vai levar?

5. Quantas palavras podemos formar, que possuem 5 ocorrências da letra a, 1 ocorrência da letra b e 1 ocorrência da letra c.

6. Observe que existem 2 parcelas na expansão de

$$a(x_1 + x_2)$$

como uma soma. De fato, temos:

$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2.$$

Além disso, existem 4 parcelas na expansão de

$$(a_1 + a_2)(x_1 + x_2)$$

como uma soma. De fato, temos:

$$(a_1 + a_2)(x_1 + x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_1 + a_2x_2.$$

Agora, determine o número de parcelas da expansão de

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10})$$

como uma soma.

6.4.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 1(f), 2(e), e 5.

Resolução do Exercício 1(e):

Neste problema, os objetos básicos são as letras do alfabeto português e as configurações são as palavras de 2 letras que possuem ao menos uma vogal.

Seja X o conjunto de tais palavras.

Considere A o conjunto das palavras de 2 letras do alfabeto português e B o conjunto das palavras em A que não possuem vogais.

Temos que X e B são uma bipartição de A. Assim, pelo PA, $|A| = |X| + |B|$. Ou seja, $|X| = |A| - |B|$. Assim, se determinamos $|A|$ e $|B|$, o problema está resolvido.

De acordo com o Exercício 1(a), $|A| = 676$.

Para formar um elemento de B, podemos fazer duas escolhas:

e_1 : escolher uma consoante para ser a primeira letra da palavra,
e_2 : escolher uma consoante para ser ser a segunda letra da palavra.

Temos que e_1 pode ser feita de 21 maneiras e, para cada maneira em que e_1 pode ser feita, e_2 pode ser feita de 21 maneiras. Assim, pelo PM2, $|B| = 21 \times 21 = 441$.

Logo, $|X| = |A| - |B| = 676 - 441 = 235$. □

Resolução do Exercício 2(e):

Neste problema, os objetos básicos são os algarismos e as configurações são as sequências (x, y), onde $x \neq y$, x é um algarismo diferente de 0 e y é um dos algarismos 0, 2, 4, 6, ou 8.

Seja X o conjunto de tais sequências.

Considere A_1 o conjunto de todos os elementos de X tais que $y = 0$ e A_2 o conjunto de todos os elementos de X tais que $y \neq 0$.

Temos que A_1 e A_2 são uma bipartição de X. Assim, pelo PA, se determinamos $|A_1|$ e $|A_2|$, o problema está resolvido.

Para formar um elemento (x, y) de A_1, podemos fazer duas escolhas:

e_1 : escolher o 0 para colocar no lugar de y,
e_2 : escolher um algarismo diferente de 0 para colocar no lugar de x.

Temos que e_1 pode ser feita de 1 maneira e e_2 pode ser feita de 9 maneiras. Assim, pelo PM2, $|A_1| = 1 \times 9 = 9$.

Para formar um elemento (x, y) de A_2, podemos executar duas tarefas:

t_1 : colocar um dos algarismos 2, 4, 6 ou 8 no lugar de y,
t_2 : colocar um algarismo diferente de 0 e diferente do algarismo usado em t_3 no lugar de x.

Temos que t_1 pode ser executada de 4 maneiras e t_2 pode ser executada de 8 maneiras. Assim, pelo PM2, $|A_2| = 4 \times 8 = 32$.

Logo, pelo PA, $|X| = |A_1| + |A_2| = 9 + 32 = 41$. □

Resolução do Exercício 5:

Neste problema, os objetos básicos são as letras a, b, c e as configurações são as palavras de 7 letras que possuem 5 ocorrências da letra a, 1 ocorrência da letra b e 1 ocorrência da letra c.

Seja X o conjunto de tais palavras.

Observe que cada elemento de X pode ser formado do seguinte modo:

1. consideramos a sequência *aaaaa* formada por 5 ocorrências da letra a;
2. inserimos uma ocorrência da letra b ou no início da palavra *aaaaa*, ou entre duas letras consecutivas da palavra *aaaaa*, ou no final da palavra *aaaaa*;
3. inserimos uma ocorrência da letra c ou no incício da palavra formada em 2, ou entre duas letras consecutivas da palavra formada em 2, ou no final da palavra formada em 2.

Assim, levando em conta que uma *posição* está antes da palavra, entre duas letras consecutivas da palavra ou depois da palavra, para formar um elemento de X, podemos fazer duas escolhas:

e_1 : escolher uma posição na palavra *aaaaa* para inserir o b,
e_2 : escolher uma posição na palavra formada em e_1 para inserir o c.

Temos que e_1 pode ser feita de 6 maneiras e e_2 pode ser feita de 7 maneiras. Assim, pelo PM2, $|X| = 6 \times 7 = 42$. □

6.5 Primeiras aplicações do PM

A resolução de alguns problemas deixa claro que a idéia acima não se limita apenas aos casos em que os objetos do conjunto X podem ser formados pela tomada de exatamente 2 decisões.

Para simplificar as redações das resoluções, no que segue, vamos usar a notação:

$$\#x \;=\; y,$$

para indicar que uma escolha (ou decisão, ou tarefa) x pode ser feita (ou tomada, ou executada) de y maneiras.

Exemplo 35 Considere o triângulo ABC e os pontos em destaque a, b, c, d, e, f, g, h e i, que estão localizados sobre os lados do triângulo, conforme a Figura 6.1

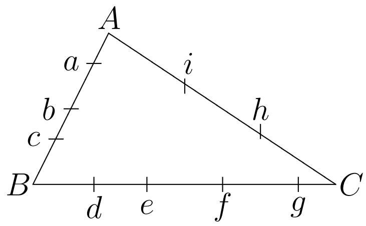


Figura 6.1: Triângulo ABC com os pontos a, b, c, d, e, f, g, h, i em destaque.

Quantos triângulos podem ser formados com vértices nos pontos em destaque, de modo que um deles está em AB, outro está em BC e outro está em AC?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os pontos em destaque e as configurações são os triângulos que podem ser formados com vértices nos pontos em destaque, de modo que um deles está em AB, outro está em BC e outro está em AC.

Seja X o conjunto de tais triângulos.

Para formar um elemento de X, podemos executar 3 tarefas:

$$\begin{array}{rcl} t_1 & : & \text{escolher um ponto em destaque em } AB, \\ t_2 & : & \text{escolher um ponto em destaque em } BC, \\ t_3 & : & \text{escolher um ponto em destaque em } AC. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#t_1 & = & 3, \\ \#t_2 & = & 4, \\ \#t_3 & = & 2. \end{array}$$

Observe que isto na verdade quer dizer: a tarefa t_1 pode ser executada de 3 maneiras; para cada maneira como a tarefa t_1 é executada, a tarefa t_2 pode ser executada de 4 maneiras; e para cada maneira como as tarefas t_1 e t_2 podem ser executadas (nesta ordem), a tarefa t_3 pode ser executada de 2 maneiras.

Assim, pelo PM, $|X| = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

Exercício 6 Quantos triângulos podem ser formados com vértices nos pontos em destaque da Figura 6.1?
Sugestão: Particione o conjunto de tais triângulos, de maneira adequada, em conjuntos de triângulos com dois vértices em um dos lados e conjunto dos triângulos com um vértice em cada lado.

Exemplo 36 Considere os dígitos 0 e 1.

Podemos formar 2 palavras de 1 dígito, usando estes dígitos, a saber, as palavras 0 e 1. Também, podemos formar 4 palavras de 2 dígitos, usando estes dígitos, a saber, as palavras 00, 01, 10 e 11. Além disso, podemos formar 8 palavras de 3 dígitos, usando estes dígitos, a saber, as palavras 000, 010, 100, 110, 001, 011, 101 e 111.

Quantas palavras de 10 dígitos podemos formar, usando estes dígitos?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os dígitos 0 e 1 e as configurações são as palavras de 10 dígitos que podem ser formadas com estes dígitos. Assim, as palavras podem ser representadas genericamente por uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10})$, onde $x_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq 10$.

Seja X o conjunto de tais palavras.

Para formar um elemento de X, podemos fazer 10 escolhas:

$$e_i \ : \ \text{escolher um dígito para ser } x_i,$$

onde $1 \leq i \leq 10$.

Temos que

$$\#e_i \ = \ 2,$$

onde $1 \leq i \leq 10$.

Observe que isto na verdade quer dizer: a escolha e_1 pode ser feita de 2 maneiras; para cada maneira como a escolha e_1 é feita, a escolha e_2 pode ser feita de 2 maneiras; para cada maneira como as escolhass e_1 e e_2 podem ser feitas (nesta ordem), a escolha e_3 pode ser feita de 2 maneiras; $\ldots$; para cada maneira como as escolhass e_1, e_2, e_3, $\ldots$, e_9 podem ser feitas (nesta ordem), a escolha e_{10} pode ser feita de 2 maneiras.

Assim, pelo PM, $|X| = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{10 \text{ vezes}} = 2^{10} = 1.024$.

Exercício 7 Já vimos na Seção 4.2 que existem bijeções naturais entre os conjuntos

$$X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad \text{e} \quad A = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\};$$

e entre os conjuntos

$$Y = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

e

$$B = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}.$$

Assim, pelo PB, podemos concluir que $|X| = |A|$ e $|Y| = |B|$.

Seja $\{c_1, c_2, \ldots, c_{20}\}$ um conjunto com 20 elementos e Z o conjunto dos seus subconjuntos. Determine $|Z|$, do seguinte modo:

(a) estabeleça uma bijeção entre Z e o conjunto C, das sequências com 20 termos, cujos termos são 0 ou 1;

(b) determine $|C|$ aplicando o PM;

(c) aplique o PB e determine $|Z|$.

Exercício 8 Generalize as idéias utilizadas no exercício anterior, de modo a determinar o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos, aplicando o PB e o PM.

O que foi dito acima mostra que o PM é uma generalização simples do PM2. Para enunciá-lo de maneira formal, basta escrevermos explicitamente as restrições que devem ser satisfeitas, sobre as tomadas das decisões em sequência:

Princípio da Multiplicação (PM):

Seja X um conjunto finito.

Se cada elemento de X pode ser formado pela tomada de k decisões, d_1, d_2, …, d_k, de maneira que:

– a decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras;

– para cada maneira como a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras;

– para cada maneira como as decisões d_1 e d_2 podem ser tomadas (nesta ordem), a decisão d_3 pode ser tomada de m_3 maneiras;

…;

– para cada maneira como as decisões d_1, d_2, …, d_{i-1} podem ser tomadas (nesta ordem), a decisão d_i pode ser tomada de m_i maneiras;

…;

– para cada maneira como as decisões d_1, d_2, …, d_{i-1}, d_i, …, d_{k-1} podem ser tomadas (nesta ordem), a decisão d_k pode ser tomada de m_k maneiras;

então,

$$|X| = m_1 \times m_2 \times m_3 \cdots \times m_i \times \cdots \times m_{k-1} \times m_k.$$

6.6 Exercícios

1. De quantas maneiras 8 pessoas podem sentar-se nas cadeiras de uma sala, se existem 20 cadeiras disponíveis?

2. Um salão tem 10 portas. De quantas maneiras:

   (a) uma pessoa pode entrar e sair deste salão, 4 vezes consecutivas?

   (b) uma pessoa pode entrar e sair deste salão, 6 vezes consecutivas, se em nenhuma das vezes ela sai pela mesma porta que entra?

   (c) este salão pode ter suas portas abertas?

3. (a) Quantos produtos podemos formar com os fatores 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, de modo que 1 sempre ocorre como fator e os outros números podem ocorrer ou não?

   (b) Quantos divisores tem o número 75.600?

4. Em uma festa estão 10 homens e 15 mulheres, sendo que 2 homens e 2 mulheres são todos irmãos, e todas as outras pessoas não possuem parentesco em comum. Quantos pares de namorados Cupido pode formar (é claro, sem que irmãos e irmãs fiquem no mesmo par)?

5. (UFCE) Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras e quatro algarismos. Considerando estas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas, iniciadas pelas letras HUI, nesta ordem, e cujo último algarismo seja ímpar.

6. (UFRJ) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, em que as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1^{a} letra da placa determina um estado deste país. Considerando um alfabeto com 26 letras, qual é o número máximo de carros que cada estado poderá emplacar?

7. (Unifor-CE) Em uma agência bancária, ao retirar-se um cartão de crédito, escolhe-se uma senha que deve ser composta de 6 dígitos, escolhidos de 1 a 9. De quantos modos pode-se escolher uma senha que tenha os três primeiros dígitos repetidos e o último dígito par?

8. (PUC-SP) Chamam-se *palíndromos* os números [naturais] que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo,

383, 4.224, 74.847). Qual o número total de palíndromos formados por cinco algarismos?

9. (PUC-MG) Determine a quantidade de números de três algarismos, maiores que 500, que podem ser formados com os algarismos 3, 5, 6, 7 e 9.

6.6.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 2(c), 3, e 8.

Resolução do Exercício 2(c):

Observe que as maneiras do salão ter suas portas abertas podem ser representadas genericamente por uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, onde x_i é uma das letras A (aberta) ou F (fechada), com $1 \leq i \leq 10$.

Ou seja, existe uma bijeção entre o conjunto das maneiras do salão ter suas portas abertas e o conjunto das sequências de 10 termos, onde cada termo é A ou F. Assim, pelo PB, se determinamos o número de tais sequências, o problema está resolvido.

Podemos, então, considerar que os objetos básicos são as letras A e F e as configurações são as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, onde x_i é uma das letras A ou F, com $1 \leq i \leq 10$.

Seja X o conjunto de tais sequências.

Raciocinando da mesma forma que no Exemplo 36, concluímos, pelo PM, que $|X| = 2^{10} = 1.024$.

Mas, aqui temos um ponto a ser levado em consideração. Se o autor do problema estipula que ter as portas abertas significa que ao menos uma das portas deve estar aberta, a resposta para o problema é $|X| = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1.023$. $\square$

Resolução do Exercício 3:

Observe que $75.600 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$. Assim, os divisores de 75.600 podem ser representados genericamente por um produto da forma $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, onde $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, $c \in \{0, 1, 2\}$ e $d \in \{0, 1\}$.

Observe também que estes produtos podem ser representados genericamente por uma sequência (a, b, c, d), onde $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, $c \in \{0, 1, 2\}$ e $d \in \{0, 1\}$.

Ou seja, existe uma bijeção entre o conjunto dos divisores de 75.600 e o conjunto das sequências (a, b, c, d), onde $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, $c \in \{0, 1, 2\}$ e $d \in \{0, 1\}$. Assim, pelo PB, se determinamos o número de tais sequências, o problema está resolvido.

Podemos, então, considerar que os objetos básicos são os elementos dos conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ e $D = \{0, 1\}$, e as configurações são as sequências (a, b, c, d), onde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e $d \in D$.

Seja X o conjunto de tais sequências.

Para formar um elemento de X, podemos fazer 4 escolhar:

$$\begin{array}{lcl} e_1 & : & \text{escolher um elemento em } A \text{ para ser } a, \\ e_2 & : & \text{escolher um elemento em } B \text{ para ser } b, \\ e_3 & : & \text{escolher um elemento em } C \text{ para ser } c, \\ e_4 & : & \text{escolher um elemento em } D \text{ para ser } d. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#e_1 & = & 5, \\ \#e_2 & = & 4, \\ \#e_3 & = & 3, \\ \#e_4 & = & 2. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. □

Resolução do Exercício 8:

Neste problema, os objetos básicos são os algarismos 0, 1, 2, ..., 9 e as configurações são os palíndromos de 5 algarismos.

Observe que os palíndromos podem ser representados genericamente por uma sequência (a, b, c, b, a), onde a, b e c são algarismos e $a \neq 0$.

Seja X o conjunto de tais sequências.

Para formar um elemento de X, podemos fazer 3 escolhas:

$$\begin{array}{lcl} e_1 & : & \text{escolher um algarismo} \neq 0 \text{ para ser } a, \\ e_2 & : & \text{escolher um algarismo para ser } b, \\ e_3 & : & \text{escolher um algarismo para ser } c. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#e_1 & = & 9, \\ \#e_2 & = & 10, \\ \#e_3 & = & 10. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 9 \times 10 \times 10 = 900$. □

Capítulo 7

Arranjos e permutações

Neste capítulo, vamos aplicar o PM na determinação de fórmulas que nos permitem contar de maneira direta algumas das configurações que ocorrem com mais frequência nos problemas de contagem. Em particular, vamos encontrar fórmulas para o número de arranjos completos (na Seção 7.1), arranjos simples (na Seção 7.3) e permutações simples (na Seção 7.5).

7.1 Arranjos completos

Considere o seguinte problema:

> Uma prova de um concurso consiste de 10 questões, cada uma com cinco opções de resposta: (a), (b), (c), (d) ou (e). Um *cartão preenchido com respostas* para esta prova consiste, essencialmente, de uma sequencia de dez letras, sendo cada uma (a), (b), (c), (d) ou (e). Quantos cartões preenchidos com respostas são possíveis?

A esta altura, já não temos mais dificuldades em resolver este problema.

Resolução

Neste problema, os objetos básicos são as letras (a), (b), (c), (d) e (e) e as configurações são os cartões preenchidos com respostas, que são sequências de dez letras, cujos termos são objetos básicos. Assim, os cartões preenchidos com respostas podem ser representados por uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, onde $x_i \in \{\text{(a), (b), (c), (d), (e)}\}$, $1 \leq i \leq 10$.

Considere X, o conjunto de todos os cartões preenchidos com respostas. Para formar um elemento de X, podemos fazer 10 escolhas:

e_i : escolher uma das letras (a), (b), (c), (d) ou (e) para ser o termo x_i,

onde $1 \leq i \leq 10$.

Temos que

$$\#e_i \;=\; 5,$$

para $1 \leq i \leq 10$.

Assim, pelo PM, $|X| = \underbrace{5 \times 5 \times \ldots \times 5}_{10 \text{ vezes}} = 5^{10} = 9.765.625$. □

> Quando, para resolver um problema de contagem, podemos aplicar o PM de modo que todas as escolhas envolvidas são feitas em um mesmo conjunto e, para cada escolha, todos os elementos do conjunto estão disponíveis, dizemos que a configuração que estamos contando é um *arranjo completo*.

No problema acima, todas as 10 escolhas são "tomar um elemento no conjunto {(a), (b), (c), (d), (e)}" e, a cada escolha, qualquer um dos cinco elementos pode ser tomado. Assim, cada lista de resposta é um arranjo completo.

Formalmente, arranjos completos são definidos do seguinte modo:

> Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$.
>
> Um *arranjo completo* dos n elementos de A, tomados k a k, é uma sequência <u>com possíveis repetições</u> de k elementos de A.

Arranjos completos de n elementos de A, tomados k a k, nada mais são do que sequências de k termos, cujos termos são elementos de A. Por essa razão, podem ser representados por $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Mas, é usual, para simplificar a notação, representar os arranjos como

$$x_1 x_2 \ldots x_k,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ representam k elementos de A, <u>não necessariamente distintos</u>.

Exemplo 37 (a) Se $A = \{a\}$, então o único arranjo completo de 1 elemento de A, tomado 1 a 1, é

$$a$$

Neste exemplo, $n = 1$ e $k = 1$.

(b) Se $A = \{a, b\}$, então os arranjos completos dos 2 elementos de A, tomados 1 a 1, são

$$a, \quad b$$

Neste exemplo, $n = 2$ e $k = 1$.

(c) Se $A = \{a, b\}$, então os arranjos completos dos 2 elementos de A, tomados 2 a 2, são

$$aa, \quad ab, \quad ba, \quad bb$$

Neste exemplo, $n = 2$ e $k = 2$.

Exercício 9 (1) Dado $A = \{a, b, c\}$, liste todos os arranjos completos de 3 elementos de A, tomados 1 a 1.

(2) Dado $A = \{a, b, c\}$, liste todos os arranjos completos de 3 elementos de A, tomados 2 a 2.

(3) Dado $A = \{a, b, c\}$, liste todos os arranjos completos de 3 elementos de A, tomados 3 a 3.

Vamos, agora, obter uma fórmula para calcular o número de arranos completos de n elementos tomados k a k. Ou seja, vamos resolver o seguinte problema:

> Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$. Quantos arranjos completos dos n elementos de A, tomados k a k, são possíveis?

Resolução:

Nesta questão, os objetos básicos são os elementos de A e as configurações são os arranjos completos dos n elementos de A, tomados k a k. Ou seja, as sequências de k termos, $x_1 x_2 \ldots x_k$, cujos termos são elementos de A.

Considere X, o conjunto de todos os arranjos completos dos n elementos de A, tomados k a k. Para formar um elemento $x_1 x_2 \ldots x_k$ de X, podemos fazer k escolhas:

$$e_i \;:\; \begin{array}{l} \text{escolher um dos } n \text{ elementos de } A \\ \text{para ser o termo } x_i, \end{array}$$

onde $1 \leq i \leq k$.

Temos que

$$\#e_i \;=\; n,$$

para $1 \leq i \leq k$.

Assim, pelo PM, $|X| = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k$. $\square$

Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$.

Vamos denotar por

$$AC(n, k)$$

o número de arranjos completos dos n elementos, tomados k a k.

O número de arranjos completos dos n elementos de A, tomados k a k, é dado pela fórmula

$$AC(n, k) = n^k.$$

Por favor, não confunda!!!

Arranjo completo é uma configuração, ou seja, um objeto que está sendo contado.

$AC(n, k)$ é um número natural, ou seja, o *número de arranjos completos que podem ser formados.*

Neste ponto, você deve estar convencido que nem a noção de arranjo completo, nem a fórmula para a determinação do número de arranjos completos são essenciais nos estudos de combinatória de contagem. De fato, como mostramos acima, podemos determinar o número de arranjos completos por uma simples aplicação do PM.

7.2 Exercícios

1. Uma *função* de $A = \{a, b, c, d\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é uma associação de elementos de A a elementos de B, de modo que cada elemento de

A está associado a um único elemento de B. Determine o número de funções de A em B.

2. (Fatec-SP) Para participar de um campeonato de futebol, o técnico da Fatec selecionou 22 jogadores, 2 em cada posição. De quantas maneiras distintas o técnico pode formar esse time de modo que nenhum jogador atue fora de sua posição?

7.2.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver o exercício 1 e dar uma dica para o 2.

Resolução do Exercício 1:

Neste problema os objetos básicos são os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e as configurações são as funções de A em B.

Seja X o conjunto de tais funções.

Para formar um elemento de X podemos efetuar 4 tarefas, uma para cada elemento de A:

$$\begin{array}{rcl} t_1 & : & \text{escolher um elemento em } B \text{ para associar ao } a, \\ t_2 & : & \text{escolher um elemento em } B \text{ para associar ao } b, \\ t_3 & : & \text{escolher um elemento em } B \text{ para associar ao } c, \\ t_4 & : & \text{escolher um elemento em } B \text{ para associar ao } d. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#t_1 & = & 6, \\ \#t_2 & = & 6, \\ \#t_3 & = & 6, \\ \#t_4 & = & 6. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1.296$.

Dica para o Exercício 2:

Compare a configuração a ser contada com as configurações contadas no Exemplo 36 e no Exercício 6.6 2(c).

7.3 Arranjos simples

Considere o seguinte problema:

> Um baralho possui 52 cartas distintas. Uma *mão* consiste de 5 cartas escolhidas sucessivamente, sem reposição das cartas já escolhidas, na ordem em que são retiradas. Quantas mãos são possíveis?

A esta altura, este é mais um problema cuja resolução não oferece maiores difuldades.

Resolução

Neste problema, os objetos básicos são as cartas do baralho e as configurações são as mãos formadas por cartas duas a duas distintas, na ordem em que são retiradas. Assim, as mãos podem ser representadas genericamente por uma sequência $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de 5 termos, cujos termos são objetos básicos, dois a dois distintos.

Seja X o conjunto de tais mãos.

Para formar um elemento de X, podemos fazer 5 escolhas:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & : & \text{escolher uma carta qualquer para ser } x_1; \\ e_i & : & \text{escolher uma carta ainda não escolhida para ser } x_i; \end{array}$$

onde $2 \leq i \leq 4$.

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#e_1 & = & 52, \\ \#e_2 & = & 51, \\ \#e_3 & = & 50, \\ \#e_4 & = & 49, \\ \#e_5 & = & 48. \end{array}$$

para $1 \leq i \leq 5$.

Assim, pelo PM, temos $|X| = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311.875.200$. □

> Quando, para resolver um problema de contagem, podemos aplicar o PM de modo que todas as escolhas envolvidas são feitas em um mesmo conjunto e, a cada escolha a ser feita, os objetos já escolhidos anteriormente não podem mais ser considerados, dizemos que a configuração que estamos contando é um *arranjo simples.*

Como, ao fazer a primeira escolha, nenhuma escolha ainda foi feita, o primeiro objeto escolhido pode ser qualquer um dos objetos disponíveis para formar a configuração. No problema acima, a primeira carta escolhida pode ser uma carta qualquer e, a partir da segunda escolha, as cartas já escolhidas não estão mais disponíveis. Assim, cada mão é um arranjo simples.

Formalmente, arranjos simples são definidos do seguinte modo:

> Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$.
>
> Um *arranjo simples* dos n elementos de A, tomados k a k, é uma sequência de k elementos distintos de A.
>
> Arranjos simples são chamados, simplesmente, de *arranjos*. Na verdade, em combinatória de contagem, só usamos a palavra "arranjo" para nos referimos a este tipo de configuração.

Arranjos são escritos como

$$x_1 x_2 \ldots x_k,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são k elementos distintos de A.

Exemplo 38 (a) Se $A = \{a\}$, então o único arranjo de 1 elemento de A, tomado 1 a 1, é

$$a$$

(b) Se $A = \{a, b\}$, então os arranjos dos 2 elementos de A, tomados 1 a 1, são

$$a \quad , \quad b$$

(c) Se $A = \{a, b\}$, então os arranjos dos 2 elementos de A, tomados 2 a 2, são

$$ab \quad , \quad ba$$

Vamos, agora, obter uma fórmula para calcular o número de arranjos de n elementos tomados k a k. Ou seja, vamos resolver o seguinte problema:

> Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$. Quantos arranjos dos n elementos de A, tomados k a k, são possíveis?

Resolução:

Nesta questão, os objetos básicos são os elementos de A e as configurações são os arranjos dos n elementos de A, tomados k a k. Ou seja, as sequências de k termos, $x_1x_2\ldots x_k$, dois a dois distintos, cujos termos são elementos de A.

Considere X, o conjunto de todos os arranjos dos n elementos de A, tomados k a k.

Para formar um elemento de X, podemos fazer k escolhas:

e_1 : escolher um dos elementos de A para formar o arranjo,
e_i : escolher um dos elementos de A, ainda não escolhido, para formar o arranjo.

$2 \leq i \leq k$.

Observe que:

– a escolha e_1 pode ser feita de n maneiras;

– após a escolha e_1 ter sido efetuada, a escolha e_2 pode ser feita de $n-1$ maneiras, pois 1 dos elementos de A já foi escolhido em e_1;

– após as escolhas e_1 e e_2 terem sido efetuadas, a escolha e_3 pode ser feita de $n-2$ maneiras, pois 2 dos elementos de A já foram escolhidos em e_1 e e_2;

– após as escolhas e_1, e_2 e e_3 terem sido efetuadas, a escolha e_4 pode ser feita de $n-3$ maneiras, pois 3 dos elementos de A já foram escolhidos em e_1, e_2 e e_3;

...

– após as escolhas e_1, e_2, ..., e_{i-1} terem sido efetuadas, a escolha e_i pode ser feita de $n-(i-1)$ maneiras, pois $i-1$ dos elementos de A já foram escolhidos em e_1, e_2, ..., e_{i-1};

...

– a última escolha e_k pode ser feita de $n-(k-1)$ maneiras, pois $k-1$ dos elementos de A já foram escolhidos em e_1, e_2, ..., e_{k-1}.

Assim, pelo PM, $|X| = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))$. $\square$

Observe que o produto acima tem exatamente k fatores. Por exemplo,

se $n = 3$ e $k = 1$, então $|X| = 3$;
se $n = 3$ e $k = 2$, então $|X| = 3 \times 2 = 6$;
se $n = 3$ e $k = 3$, então $|X| = 3 \times 2 \times 1 = 6$;
se $n = 10$ e $k = 5$, então $|X| = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30.240$.

Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$.

Vamos denotar por

$$A(n, k)$$

o número de arranjos dos n elementos de A, tomados k a k.

O número de arranjos dos n elementos de A, tomados k a k, é dado pela fórmula

$$A(n, k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Por favor, não confunda!!!

Arranjo é uma configuração, ou seja, um objeto que está sendo contado.

$A(n, k)$ é um número natural, ou seja, o *número de arranjos que podem ser formados.*

Por definição, todo arranjo é um arranjo completo.

Neste ponto, você deve estar convencido que nem a noção de arranjo, nem a fórmula para a determinação do número de arranjos são essenciais nos estudos de combinatória de contagem. De fato, como mostramos acima, podemos determinar o número de arranjos por uma aplicação direta do PM.

7.4 Exercícios

1. Dado $A = \{a, b, c\}$, liste:

   (a) todos os arranjos de 3 elementos de A, tomados 1 a 1;
   (b) todos os arranjos de 3 elementos de A, tomados 2 a 2;
   (c) todos os arranjos de 3 elementos de A, tomados 3 a 3.

2. Resolva exercícios análogos ao Exercício 1, para $B = \{a, b, c, d\}$ e $C = \{a, b, c, d, e\}$.

3. Dispomos de 8 cores para pintar uma bandeira de 6 listras, de modo que nenhuma cor seja usada mais de uma vez. De quantos modos isto pode ser feito?

4. Considere 7 cidades A, B, C, D, E, F, G, ligadas duas a duas por uma única estrada. Uma *rota* da cidade A para a cidade G é uma sequencia de estradas que passa por todas as outras cidades, passando por cada cidade uma única vez. Quantas rotas são possíveis?

5. Uma *função* de $A = \{a, b, c, d\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é *injetora* se elementos distintos de A estão associados a elementos distintos de B. Determine o número de funções injetoras de A em B.

6. Uma sala possui dez cadeiras numeradas, de 1 a 10, colocadas em fila. De quantas maneiras duas pessoas podem se sentar nestas cadeiras, uma pessoa em cada cadeira, de modo que haja ao menos uma cadeira vazia entre elas?

7. Quantos números distintos com 4 algarismos diferentes, podemos formar com: 0, 1, 2, 3, ..., 9? (Este é o Problema 2 da página 2).

7.4.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 3 e 7.

Resolução do Exercício 3:

Neste problema os objetos básicos são os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e as configurações são as funções injetoras de A em B.

Seja X o conjunto de tais funções.

Para formar um elemento de X podemos efetuar 4 tarefas, uma para cada elemento de A:

$$\begin{array}{lll} t_1 & : & \text{escolher um elemento em } B \text{ para associar ao } a, \\ t_2 & : & \text{escolher um elemento em } B\text{, diferente do já escolhido} \\ & & \text{em } t_1\text{, para associar ao } b, \\ t_3 & : & \text{escolher um elemento em } C\text{, diferente dos já escolhidos} \\ & & \text{em } t_1 \text{ e } t_2\text{, para associar ao } c, \\ t_4 & : & \text{escolher um elemento em } D\text{, diferente dos já escolhidos} \\ & & \text{em } t_1\text{, } t_2 \text{ e } t_3\text{, para associar ao } d. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#t_1 & = & 6, \\ \#t_2 & = & 5, \\ \#t_3 & = & 4, \\ \#t_4 & = & 3. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Resolução do Exercício 7:

Neste problema os objetos básicos são os algarismos 0, 1, 2, 3, ..., 9 e as configurações são as sequências (x_1, x_2, x_3, x_4) de quatro algarimos, distintos dois a dois, tais que $x_1 \neq 0$.

Seja X o conjunto de tais sequências.

Para formar um elemento de X podemos fazer 4 escolhas:

$$\begin{array}{lll} e_1 & : & \text{escolher um algarismo deferente do 0 para ser } x_1, \\ e_2 & : & \text{escolher um algarismo diferente do já escolhido em } e_1 \text{ para} \\ & & \text{ser } x_2\text{, mas observando que este algarismo pode ser o 0,} \\ & & \text{se ele ainda não foi escolhido,} \\ e_3 & : & \text{escolher um algarismo diferente do já escolhido em } e_1 \text{ e } e_2 \\ & & \text{para ser } x_3, \\ e_4 & : & \text{escolher um algarismo diferente do já escolhido em } e_1\text{, } e_2 \\ & & \text{e } e_3 \text{ para ser } x_2. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcll} \#e_1 & = & 9, & \text{pois não podemos escolher o 0} \\ \#e_2 & = & 9, & \text{pois um algarismo já foi escolhido} \\ \#e_3 & = & 8, & \text{pois dois algarismos já foram escolhidos} \\ \#e_4 & = & 7, & \text{pois três algarismos já foram escolhidos.} \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4.536$.

Compare esta resposta, ou seja, $9 \times 9 \times 8 \times 7$, com a enigmática $A(10,4) - A(10,3)$ fornecida na página 2.

7.5 Permutações simples

Considere o seguinte problema:

De quantas maneiras 7 pessoas podem formar uma fila indiana?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as 7 pessoas e as configurações são as filas indianas, que são as sequências cujos termos são os 7 objetos básicos. Assim, as filas indianas podem ser representadas por $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7$, onde cada p_i é uma pessoa distinta das anteriores, $1 \leq i \leq 7$.

Seja X o conjunto de tais sequências. Para formar uma configuração em X, podemos fazer 7 escolhas:

e_1 : escolher uma pessoa para ser p_1,
e_i : escolher uma pessoa distinta das anteriores para ser p_i.

$2 \leq i \leq 7$.

Temos que:

$$\begin{array}{lcl} \#e_1 & : & 7, \\ \#e_2 & : & 6, \\ \#e_3 & : & 5, \\ \#e_4 & : & 4, \\ \#e_5 & : & 3, \\ \#e_6 & : & 2, \\ \#e_7 & : & 1. \end{array}$$

Assim, pelo PM, temos que $|X| = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$. $\square$

Observe que uma fila indiana formada por n pessoas nada mais é do que um arranjo simples de n pessoas, tomadas n a n.

> Quando, para resolver um problema de contagem, podemos determinar o número de arranjos simples de n pessoas, tomadas n a n, dizemos que a configuração que estamos contando é uma *permutação*.

No problema acima, cada fila indiana é um arranjo simples de 7 pessoas, tomadas 7 a 7. Assim, cada fila indiana é uma permutação.

Formalmente, permutações simples são definidas do seguinte modo:

> Seja A um conjunto com n elementos.
>
> Uma *permutação simples* dos n elementos de A é uma sequência sem repetições de todos os n elementos de A.
>
> Permutações simples são chamadas, simplesmente, de *permutações*. Na verdade, em combinatória de contagem, só usamos a palavra "permutação" para nos referirmos a este tipo de configuração.

Permutações são escritas como

$$x_1 x_2 \dots x_n,$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os n elementos de A.

Exemplo 39 (a) Se $A = \{a\}$, então a única permutação de 1 elemento de A é

$$a$$

(b) Se $A = \{a, b\}$, então as permutações dos 2 elementos de A são

$$ab, \quad ba$$

(c) Se $A = \{a, b, c\}$, então as permutações dos 3 elementos de A são

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba$$

Vamos, agora, obter uma fórmula para calcular o número de permutações de n elementos. Ou seja, vamos resolver o seguinte problema:

> Seja A um conjunto com n elementos. Quantas permutações dos n elementos de A são possíveis?

Vamos fazer isto de duas maneiras.

Primeira resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os n elementos e as configurações são as sequências de n termos dos n elementos.

Considere X o conjunto de todas as permutações dos n elementos de A.

Como cada elemento de X é um arranjo simples de n elementos, tomados n a n, pela fórmula de arranjos simples, temos que

$$\begin{aligned} |X| &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(n-1)) \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-n+1) \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 \end{aligned}$$

ou seja, $|X|$ é o produto dos n números naturais $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$. $\square$

Segunda resolução:

Outra forma de chegar a este mesmo resultado é por aplicação do PM. Neste caso, para formar um elemento de X podemos fazer n escolhas:

$$\begin{aligned} e_1 &: \text{ escolher um elemento para ser } p_1, \\ e_i &: \text{ escolher um dos elementos ainda não escolhidos para ser } p_i. \end{aligned}$$

$2 \leq i \leq n$.

Temos que

$$\begin{aligned} \#e_1 &= n, \\ \#e_2 &= n-1, \\ \#e_3 &= n-2, \\ &\vdots \\ \#e_{n-2} &= 3, \\ \#e_{n-1} &= 2, \\ \#e_n &= 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo PM, temos um total de $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ permutações de A. $\square$

O número

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

é denotado por $n!$ e á chamado *fatorial de n*.

Seja A um conjunto com n elementos.

Vamos denotar por

$$P(n)$$

o número de permutações simples dos n elementos de A.

O número de permutações simples de n elementos de A é dado pela fórmula

$$P(n) = n!$$

Por favor, não confunda!!!

Permutação simples é uma configuração, ou seja, um objeto que está sendo contado.

$P(n)$ é um número natural, ou seja, o *número de permutações simples que podem ser formadas.*

Por definição, toda permutação simples é um arranjo simples.

Neste ponto, você deve estar convencido que a noção de permutação não é essencial nos estudos de combinatória de contagem. De fato, permutações são arranjos simples especiais e, como mostramos acima, podemos determinar o número de permutações através da fórmula de arranjos simples (ou através do PM). Por outro lado, o emprego da notação fatorial é interessante, na medida em que nos poupa o trabalho de escrever produtos que possuem uma quantidade muito grande de fatores.

7.6 Exercícios

1. Dado $A = \{a, b, c, d\}$, liste todas as permutações de elementos de A.
2. Dado $B = \{a, b, c, d, e\}$, explique como cada permutação de elementos de $A = \{a, b, c, d\}$ dá origem a permutações de elementos de B.
3. Considere a função que associa a cada permutação p dos elementos de $B = \{a, b, c, d, e\}$ a permutação p' dos elementos de $A = \{a, b, c, d\}$,

obtida de p pela supressão do último elemento de p. Para cada permutação p' dos elementos de A, determine quantas permutações p dos elementos de B são associadas a p' por esta função.

4. Seja p uma palavra qualquer. Um *anagrama* de p é uma palavra que possui exatamente as mesmas letras que ocorrem em p, sendo que cada letra ocorre no anagrama exatamente o mesmo número de vezes que ocorre em p.

   (a) Quantos anagramas tem a palavra LOMBRIGA?

   (b) Quantos anagramas de LOMBRIGA iniciam com vogal?

   (c) Quantos anagramas de LOMBRIGA terminam com consoante?

   (d) Quantos anagramas de LOMBRIGA iniciam com vogal e terminam com consoante?

5. De quantas formas 5 homens e 5 mulheres podem formar uma fila indiana:

   (a) Se duas delas, Ana e Bill, devem ficam juntas na fila?

   (b) Se os homens ocupam posições consecutivas e iniciam a fila?

   (c) Se os homens ocupam posições consecutivas na fila?

   (d) Se os homens estão intercalados com as mulheres?

7.6.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 5(a), 5(b) e 5(d).

Resolução do Exercício 5(a):

Neste problema os objetos básicos são os 5 homens e as 5 mulheres, sendo um dos homens Bill e uma das mulheres Ana, e as configurações são as permutações destas 10 pessoas nas quais Ana e Bill estão juntos.

Seja X o conjunto de tais permutações.

Para formar um elemento de X podemos efetuar 2 tarefas:

t_1 : formar uma permutação, p, de Ana e Bill,
t_2 : formar uma permutação de p e das 8 pessoas restantes, considerando p como se fosse uma única pessoa.

Temos que

$$\begin{aligned} \#t_1 &= 2!, \\ \#t_2 &= 9!. \end{aligned}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 2! \times 9! = 2 \times 362.880 = 725.760$.

Resolução do Exercício 5(b):

Neste problema os objetos básicos são os 5 homens e as 5 mulheres e as configurações são as permutações destas 10 pessoas nas quais os homens ocupam posições consecutivas e iniciam a fila.

Seja X o conjunto de tais permutações.

Para formar um elemento de X podemos efetuar 3 tarefas:

t_1 : formar uma permutação, p_1, dos 5 homens,
t_2 : formar uma permutação, p_2, da 5 mulheres,
t_3 : colocar p_2 aós p_1 para formar a fila.

Temos que

$$\begin{aligned} \#t_1 &= 5!, \\ \#t_2 &= 5!, \\ \#t_3 &= 1, \quad \text{já que a fila é formada pelos homens} \\ & \qquad\quad \text{seguidos das mulheres.} \end{aligned}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 5! \times 5! = 120^2 = 14.400$.

Resolução do Exercício 5(d):

Neste problema os objetos básicos são os 5 homens e as 5 mulheres e as configurações são as permutações destas 10 pessoas nas quais os homens estão intercalados com as mulheres.

Seja X o conjunto de tais permutações.

Para formar um elemento de X podemos efetuar 4 tarefas:

t_1 : formar uma permutação, p_1, dos 5 homens,
t_2 : formar uma permutação, p_2, da 5 mulheres,
t_3 : decidir se a fila vai iniciar com um homem ou uma mulher,
t_4 : intercalar as permutações p_1 e p_2, de acordo com a decisão tomada em t_3.

Temos que

$$\begin{aligned} \#t_1 &= 5!, \\ \#t_2 &= 5!, \\ \#t_3 &= 2, \\ \#t_4 &= 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo PM, $|X| = 5! \times 5! \times 2 = 120^2 \times 2 = 28.800$.

Capítulo 8

Princípio k para 1

Neste capítulo, apresentamos (nas Seções 8.1 e 8.2) e exemplificamos (na Seção 8.3) o princípio k para 1, Pk1.

O Pk1 pode ser visto como uma generalização do PB, mas sua aplicação exige uma grande compreensão da configuração que está sendo contada. Por esta razão, neste capítulo o Pk1 é apresentado e exemplificado na resolução de problemas simples. Aplicações mais elaboradas do Pk1 são descritas na resolução de alguns exercícios, ao final do capítulo.

O que chamamos de Pk1 consiste, na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $k \geq 2$. Vamos descrever simultaneamente o caso em que $n = 2$ e a generalização para o caso em que k é arbitrário.

8.1 A idéia do Pk1

Considere o seguinte problema:

> Um ônibus escolar tem 23 assentos duplos. Um grupo de alunos está no ônibus, de modo que cada aluno está exatamente em um assento e cada assento é ocupado por exatamente dois alunos. Quantos alunos há no ônibus?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os assentos e os alunos e as configurações são os alunos.

Para resolver este problema, basta observar que o conjunto A dos alunos e o conjunto B dos assentos estão relacionados de modo que a cada aluno corresponde exatamente um assento e que cada assento é o correspondente de exatamente dois alunos. A Figura 8.1 ilustra esta situação, onde $a_1, a_2, \ldots, a_x$ representam os alunos e $b_1, b_2, \ldots, b_{23}$ representam os assentos.

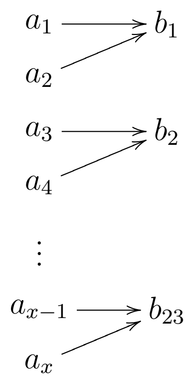


Figura 8.1: Dois alunos em cada assento.

De acordo com o enunciado do problema, $|B| = 23$ elementos. Assim, $|A| = 2 \times 23 = 46$. $\square$

Uma maneira de resumir o raciocínio usado acima é dizer: a cada 2 alunos corresponde 1 assento, e vice-versa, a cada assento correspondem dois alunos.

A resolução deste problema simples ilustra uma ideia principal na formulação do P21: o P21 pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto A, quando encontramos um outro conjunto B, para o qual já sabemos determinar $|B|$, e uma maneira de, usando B, "quebrar A em pedaços que possuem 2 elementos". Neste exemplo, A é o conjunto dos alunos e B é o conjunto dos assentos.

Considere, agora, o problema:

Quantos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 333\}$ são múltiplos de 3?

Resolução:

Neste problema os objetos básicos são os números de 1 a 333 e as configurações são os números de 1 a 333 que são múltiplos de 3.

Para resolver este problema, basta observar que $A = \{1, 2, 3, \ldots, 333\}$ e $B = \{x \in A : \ x \text{ é múltiplo de } 3\}$ podem ser relacionados de modo que a cada elemento de A corresponde exatamente um elemento de B e cada elemento de B é o correspondente de exatamente três elementos de A. A Figura 8.1 ilustra esta situação.

De acordo com o enunciado do problema, $|A| = 333$. Assim, $|B| = \dfrac{333}{3} = 111$. $\square$

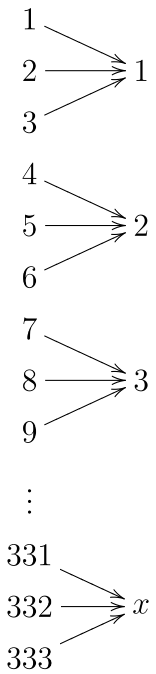


Figura 8.2: De cada três números, um é múltiplo de 3.

Uma maneira de resumir o raciocínio usado acima é dizer: de cada 3 números consecutivos, um é múltiplo de 3.

A resolução deste problema simples ilustra uma ideia principal na formulação do P31: o P31 pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto B, quando encontramos um outro conjunto A, para o qual já sabemos determinar $|A|$, e uma maneira de, usando B, "quebrar A em pedaços que possuem 3 elementos". Neste exemplo, B é o conjunto dos números de 1 a 333 que são múltiplos de 3 e A o conjunto dos números de 1 a 333 .

Para formalizar as idéias exemplificadas acima, usamos a noção de *função k para* 1 *entre dois conjuntos.*

8.2 Enunciado do Pk1

Estabelecemos uma *função k para* 1 de um conjunto A em um conjunto B quando associamos os elementos de A aos elementos de B, de modo que k elementos de A estão associados a cada elemento de BA, e cada elemento de B é o associado de exatamente k elementos de A.

> Sejam A e B conjuntos finitos.
>
> Uma *função k para* 1 de A em B associa elementos de A a elementos de B, de modo que:
>
> – Cada k elementos de A estão associados a 1 elemento de B.
>
> – Cada elemento de B é o associado de exatamente k elementos de A.

Exemplo 40 (a) No problema dos alunos nos assentos, resolvido anteriormente, vimos uma função 2 para 1 do conjunto dos alunos no conjunto dos assentos.

(b) No problema dos múltiplos de 3, resolvido acima, vimos uma função 3 para 1 do conjunto do números de 1 a 333 no conjunto dos múltiplos de 3 nesse conjunto.

Exercício 10 (a) Dados $A = \{1, 2, 3, \ldots, 400\}$ e $B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, defina uma função 4 para 1 "natural" de A em B.

(b) Seja $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Considere

$$A = \{(x, y, z) : x, y, z \text{ são elementos dois a dois distintos de } C\}$$

e B o conjunto de todos os subconjuntos de 3 elementos formados com elementos de C.

– Liste todos os elementos de A;

– Liste todos os elementos de B;

– Determine um k adequado e defina uma função k para 1 "natural" de A em B.

Uma ideia central na formulação do Pk1, que foi aplicada na resolução do problema dos alunos nos assentos, é a de que, se para estabelecer uma função k para 1 do conjunto A no conjunto B, devemos corresponder os elementos de A aos elementos de B de maneira que k elementos de A estejam associados a cada elemento de B e de modo que cada elemento de B é o associado de um único grupo de k elementos de A, então quando definimos uma função

k para 1 de A em B, podemos concluir que A possui k vezes o número de elementos de B.

Mais formalmente, temos:

Princípio k para 1:

Sejam A e B conjuntos finitos.

Se existe uma função k para 1 de A em B, então

$$|A| = k|B|.$$

Obviamente, o Pk1 também pode ser "lido na outra direção", fornecendo a versão que aplicamos na resolução do problema dos múltiplos de 3:

Princípio k para 1:

Sejam A e B conjuntos finitos e $k \neq 0$.

Se existe uma função k para 1 de A em B, então

$$|B| = \frac{|A|}{k}.$$

A escolha de qual das duas versões do Pk1 deve ser aplicada na resolução de um problema depende fortemente da análise que fazemos do problema.

8.3 Primeiras aplicações do Pk1

Na prática, o Pk1 deve ser aplicado nas seguintes situações:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, à primeira vista, determinar.

2. Se transformamos, através de uma função k para 1, o conjunto X em um conjunto A cujo número de elementos já sabemos determinar, então aplicamos o Pk1 e concluímos que o número de elementos de X é k vezes o número de elementos de A.

3. Se transformamos, através de uma função k para 1, um conjunto A cujo número de elementos já sabemos determinar no conjunto X, então aplicamos o Pk1 e concluímos que o número de elementos de X é o número de elementos de A dividido por k.

Como um exemplo imediato da aplicação desta estratégia, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 41 Quantos números no conjunto $\{1, 2, \ldots, 255, 256\}$ são pares?

Resolução:

Neste problema os objetos básicos são os números de 1 a 256 e as configurações são os números de 1 a 256 que são pares.

Seja X o conjunto de tais números pares.

De acordo com o Pk1, se encontramos um número k, um conjunto A e uma função Pk1 de A em X, o problema está resolvido.

Tomando $k = 2$ e $A = \{1, 2, \ldots, 255, 256\}$, temos que $|A| = 256$ e que a seguinte figura define uma função 2 para 1 de A em X, onde $x = |X|$:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[r] & 1 \\
2 \arrow[ur] & \\
3 \arrow[r] & 2 \\
4 \arrow[ur] & \\
5 \arrow[r] & 3 \\
6 \arrow[ur] & \\
\vdots & \\
255 \arrow[r] & x \\
256 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Assim, pelo Pk1, $|X| = \dfrac{256}{2} = 128.$

Uma maneira de resumir o raciocínio usado acima é dizer: a cada 2 elementos de A exatamente um é par.

Um exemplo um pouquinho mais elaborado de aplicação do Pk1, na mesma direção, é o seguinte:

Exemplo 42 Quantos números no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2.323\}$ são múltiplos de 5?

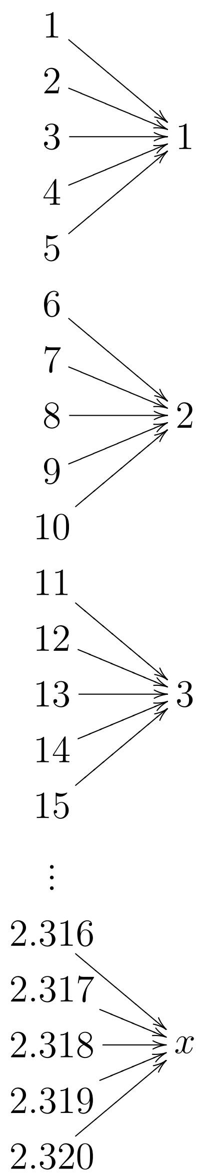
Resolução:

Neste problema os objetos básicos são os números de 1 a 2.323 e as configurações são os números de 1 a 2.323 que são múltiplos de 5.

Seja X o conjunto de tais números.

De acordo com o Pk1, se encontramos um número k, um conjunto A e uma função Pk1 de A em X, o problema está resolvido.

Mas neste caso, não podemos tomar $k = 5$ e $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2.323\}$, de maneira análoga ao que fizemos no Exemplo 41. Para resolver este problema usando o P51, temos que tomar $k = 5$ e $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2.320\}$, já que 2.321, 2.322 e 2.323 não são múltiplos de 5. De fato, neste caso, a seguinte figura define uma função 5 para 1 de A em X, onde $x = |X|$:



Assim, pelo Pk1, $|X| = \dfrac{2.320}{5} = 464.$

8.4 Exercícios

1. Quantos elementos do conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 1.234\}$ são múltiplos de 3?

2. Quantos elementos do conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2.345\}$ são múltiplos de 4?

3. Quantos elementos do conjunto $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3.456\}$ são múltiplos de 2 e de 3, simultaneamente?

4. Quantos elementos do conjunto $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 4.567\}$ são múltiplos de 4 e de 6, simultaneamente?

5. Quantos elementos do conjunto $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5.678\}$ não são múltiplos de 4 ou não são múltiplos de 6?

6. De quantas maneiras podemos decompor o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ em uma sequência de 3 subconjuntos com 2 elementos cada, de modo que os subconjuntos sejam dois a dois disjuntos?

7. De quantas maneiras podemos decompor o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ em uma partição de 3 blocos com 4 elementos cada?

8. Quantos pareamentos do conjunto $P = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ existem? (Este é o problema formulado no Exemplo 8 da página 17).

9. (IME-RJ) Cinco rapazes e cinco moças devem posar para uma fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo? (Este é o Problema 5 da página 3).

10. Considerando os dois grupos

$$\begin{aligned} A = \{&\text{América}, \text{Americano}, \text{Boavista}, \text{Flamengo}, \\ &\text{Nova Iguaçu}, \text{Resende}, \text{Vasco}, \text{Volta Redonda}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B = \{&\text{Botafogo}, \text{Fluminense}, \text{Bangu}, \text{Olaria}, \\ &\text{Madureira}, \text{Cabofriense}, \text{Macaé}, \text{Duque de Caxias}\}, \end{aligned}$$

do Campeonato Carioca de 2011, quantas rodadas são possíveis? (Este é o problema formulado no Exemplo 5 da página 15).

8.4.1 Resolução de alguns exercícios

Vamos resolver os exercícios 6 e 7.

Resolução do Exercício 6:

Neste problema os objetos básicos são os números 1, 2, 3, 4, 5, e 6, e as configurações são as sequências de 3 subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 6\}$, com 2 elementos cada, de modo que os subconjuntos são dois a dois disjuntos.

Observe que tais sequências podem ser representada genericamente por

$$(\,\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}\,),$$

onde os conjuntos $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$ e $\{c_1, c_2\}$ são uma partição de $\{1, 2, \ldots, 6\}$.

Seja X o conjunto de tais sequências

Para determinar $|X|$ vamos, primeiro, considerar o conjunto A formado por todas as permutações dos 6 números 1, 2, 3, …, 6. Já sabemos que $|A| = 6!$.

Vamos, agora, associar elementos de A a elementos de X através de uma função. Mais especificamente, a cada elemento

$$p = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$$

de A associamos o elemento

$$S = (\,\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}\,),$$

de X que corresponde a p pela separação adequada dos termos de p nos respectivos subconjuntos que formam S.

Observe que, desta forma, cada elemento de A está associado a um elemento de X, mas elementos distintos de A estão associados a um mesmo elemento de X, ou seja, cada elemento de X é o associado de vários elementos de A. Por exemplo, as permutações

$$p_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$p_2 = (2, 1, 4, 3, 6, 5)$$

e

$$p_3 = (2, 1, 4, 3, 5, 6)$$

estão todas associadas à partição

$$\{\,\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\,\}$$

por esta função.

Vamos, agora, determinar quantas permutações são associadas a cada partição, de modo a descobriri um k adequado, que mostra que a função acima é uma função k para 1 de A em X.

Para isto, dada uma sequência

$$S = (\,\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},\{c_1,c_2\}\,),$$

em X, seja B_S o conjunto de todas as permutações em A que são associadas a P pela função acima.

Para formar uma partição p em B_S, podemos efetuar 4 tarefas:

t_1 : formar uma permutação x dos 2 elementos do primeiro termo de S,
t_2 : formar uma permutação y dos 2 elementos do segundo termo de S,
t_3 : formar uma permutação z dos 2 elementos do terceiro termo de S,
t_4 : escrever x seguida de y, seguida de z, para formar p.

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#t_1 & = & 2!, \\ \#t_2 & = & 2!, \\ \#t_3 & = & 2!, \\ \#t_4 & = & 1. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|B_S| = 2! \times 2! \times 2! \times 1 = 2! \times 2! \times 2!$.

Assim, concluímos que existe uma função $2! \times 2! \times 2!$ para 1 do conjunto A no conjunto X. Daí, pelo Pk1, onde $k = 2! \times 2! \times 2!$, temos que:

$$|X| = \frac{|A|}{k} = \frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{720}{8} = 90.$$

Resolução do Exercício 6:

Neste problema os objetos básicos são os números 1, 2, 3, ..., 12 e as configurações são as partições de $\{1,2,\ldots,12\}$ em 3 bocos, cada um com 4 elementos.

Observe que tais partições podem ser representada genericamente por

$$\{\,\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{b_1,b_2,b_3,b_4\},\{c_1,c_2,c_3,c_4\}\,\},$$

onde os conjuntos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ e $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ são dois a dois disjuntos e exaurem $\{1, 2, \ldots, 12\}$.

Seja X o conjunto de tais partições.

Para determinar $|X|$ vamos, primeiro, considerar o conjunto A formado por todas as permutações dos números 1, 2, 3, ..., 12. Já sabemos que $|A| = 12!$.

Vamos, agora, associar elementos de A a elementos de X através de uma função. Mais especificamente, a cada elemento

$$p = (a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4)$$

de A associamos o elemento

$$P = \{\,\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \{c_1, c_2, c_3, c_4\}\,\},$$

de X que corresponde a p pela separação adequada dos termos de p nos respectivos blocos que formam P.

Observe que, desta forma, cada elemento de A está associado a um elemento de X, mas elementos distintos de A estão associados a um mesmo elemento de X, ou seja, cada elemento de X é o associado de vários elementos de A. Por exemplo, as permutações

$$p_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12),$$

$$p_2 = (4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9)$$

e

$$p_3 = (1, 3, 4, 2, 9, 7, 8, 6, 12, 11, 10, 9)$$

estão todas associadas à partição

$$\{\,\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{9, 10, 11, 12\}\,\}$$

por esta função.

Vamos, agora, como fizemos no Exercício 6, das sequências de conjuntos, determinar quantas permutações são associadas a cada partição, de modo a encontrar um k adequado que mostra que a função acima é uma função k para 1 de A em X.

Mas, neste caso, a situação é um pouco mais delicada do que aquela com que lidamos no Exercício 6. Lá, quando contamos quantas permutações são associadas a cada sequência, consideramos como podemos formar uma permutação a partir de uma sequência e, neste processo, utilizamos a ordem intrínsica em que os termos da sequência estão dispostos. Agora, como cada partição é, por sua vez, um conjunto, seus elementos não estão ordenados e para considerar como podemos formar uma permutação a partir de uma partição devemos, em primeiro lugar, ordenar os elementos da partição para podermos usar o mesmo método que usamos anteriormente.

Assim, dada uma partição

$$P = \{\, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \,\},$$

em X, seja B_P o conjunto de todas as permutações em A que são associadas a P pela função acima.

Para formar uma partição p em B_P, podemos efetuar 5 tarefas:

t_1 : escolher uma ordem para os 3 blocos de P,
t_2 : formar uma permutação x dos 4 elementos do primeiro bloco,
t_3 : formar uma permutação y dos 4 elementos do segundo bloco,
t_4 : formar uma permutação z dos 4 elementos do terceiro bloco,
t_5 : escrever x seguida de y, seguida de z, para formar p.

Temos que

$$\begin{aligned}
\#t_1 &= 3!,\\
\#t_2 &= 4!,\\
\#t_3 &= 4!,\\
\#t_4 &= 4!,\\
\#t_5 &= 1.
\end{aligned}$$

Assim, pelo PM, $|B_P| = 3 \times 4! \times 4! \times 4! \times 1 = 3! \times 4! \times 4! \times 4!$.

Assim, concluímos que existe uma função $3! \times 4! \times 4! \times 4!$ para 1 do conjunto A no conjunto X. Daí, pelo Pk1, onde $k = 3! \times 4! \times 4! \times 4!$, temos que:

$$|X| = \frac{|A|}{k} = \frac{12!}{3! \times 4! \times 4! \times 4!} = \frac{479.001.600}{82.944} = 5.775.$$

Capítulo 9

Permutações circulares e combinações

Neste capítulo, vamos aplicar o Pk1 na determinação de fórmulas que nos permitem contar de maneira direta outras configurações que ocorrem com frequência nos problemas de contagem. Em particular, vamos encontrar fórmulas para o número de permutações circulares (na Seção 9.1) e combinações simples (na Seção 9.3).

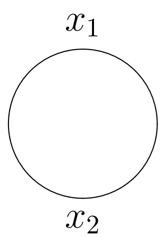
9.1 Permutações circulares

Considere o seguinte problema:

> De quantas maneiras 2 meninas — Ana e Beatriz — podem formar uma roda de ciranda?

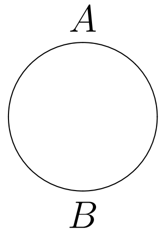
Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as 2 meninas, que vamos denotar por A e B, e as configurações são as rodas de ciranda que podem ser formadas com estas meninas. As rodas podem ser representadas por uma circunferência rotulada



onde x_1, x_2 representam as meninas.

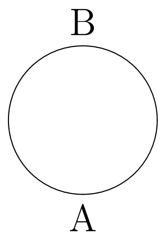
Seja X o conjunto de tais rodas. Neste caso, não temos nenhuma dificuldade em listar todos os elementos de X e contá-los diretamente. Na verdade, pensando um pouco, concluímos imediatamente que



(9.1)

é a única roda possível e que $|X| = 1$. □

Aparentemente, poderíamos também formar a roda dada na figura



(9.2)

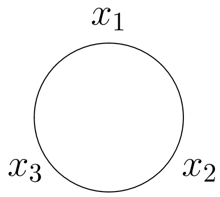
mas embora (9.1) e (9.2) sejam figuras diferentes, elas representam a mesma que a roda, pois a posição relativa entre as meninas é a mesma em ambas as figuras.

Considere, agora, o seguinte problema similar:

> De quantas maneiras 3 meninas — Ana, Beatriz e Cleide — podem formar uma roda de ciranda?

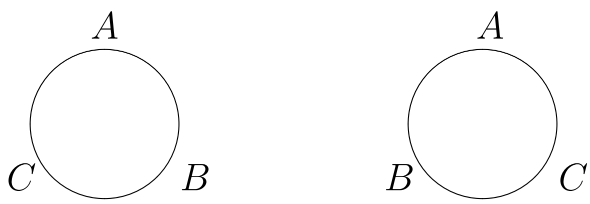
Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as 3 meninas, que vamos denotar por A, B e C, e as configurações são as rodas de ciranda que podem ser formadas com estas meninas. As rodas podem ser representadas por uma circunferência rotulada



onde x_1, x_2, x_3 representam as meninas.

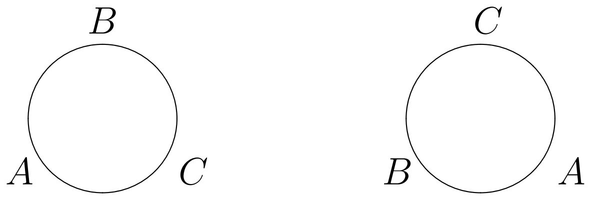
Seja X o conjunto de tais rodas. Também neste caso, não temos nenhuma dificuldade em listar todos os elementos de X e contá-los diretamente. Novamente, pensando um pouco, concluímos imediatamente que as rodas



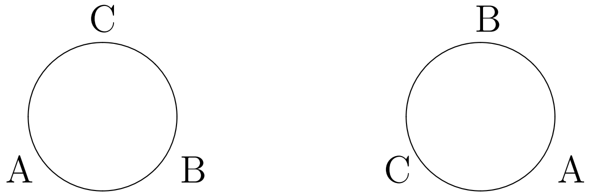
(9.3)

são as únicas possíveis e $|X| = 2$. $\square$

Aparentemente, poderíamos também formar as rodas dadas nas figuras



(9.4)



(9.5)

mas, observe que as duas rodas em (9.4) são idênticas à roda da esquerda em (9.3), pois as posições relativas entre as meninas é a mesma em todas as figuras. Por uma razão semelhante, as duas rodas em (9.5) são idênticas à roda da direita em (9.3).

Exercício 11 Resolva os problemas abaixo, seguindo o modelo de resolução acima, isto é, liste todas as rodas de ciranda possíveis; conte quantas elas são; e, para cada roda, determine todas as maneiras como ela podem ser representada por figuras.

1. De quantas maneiras 4 meninas podem formar uma roda de ciranda?
2. De quantas maneiras 5 meninas podem formar uma roda de ciranda?

As resoluções dos problemas e exercícios acima, nos levam a seguinte tabela

Número de meninas	Número de rodas
2	1
3	2
4	6
5	24

Observe que o número de rodas cresceu de uma maneira vertiginosa, quando passamos de 4 para 5 meninas. Assim, se consideramos, por exemplo, o problema:

> De quantas maneiras 6 meninas podem formar uma roda de ciranda?

está claro que o procedimento de gerar todas as rodas e depois contá-las pode não ser uma maneira muito razoável de abordar o problema, visto que já temos uma suspeita de que o número de rodas possíveis não deve ser pequeno. Além disso, também temos uma idéia de que várias figuras diferentes representam a mesma roda e nesse processo de gerar todas as rodas temos que estar atentos a este fato, para não cometer erros.

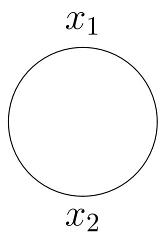
Nosso objetivo é resolver este problema de maneira que o raciocínio empregado para 3 meninas formando uma roda possa ser adaptado na elaboração de uma resolução para o caso genérico de n objetos dispostos em volta de uma figura geométrica, quando apenas a posição relativa dos objetos dispostos na figura é levada em consideração.

> Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$.
>
> Uma *permutação circular* de n elementos é uma configuração formada por n objetos dispostos em volta de uma figura geométrica circular, sendo que apenas a posição relativa dos objetos dispostos na figura é considerada como relevante.

Para determinar uma fórmula para contar o número de permutações circulares de n elementos, vamos ver como podemos usar os princípios de contagem para contar as rodas de ciranda, nos casos em que $n = 2$ e $n = 3$.

Caso $n = 2$

Neste caso, como já vimos, os elementos do conjunto X, das rodas, podem ser representados por figuras



onde x_1 e x_2 representam as meninas dispostas na roda.

Seja Y o conjunto de tais figuras. Cada elemento de Y pode ser formado pela execução de duas tarefas:

$$\begin{aligned} t_1 &: \text{ escolher uma menina para ocupar a posição } x_1; \\ t_2 &: \text{ escolher uma menina para ocupar a posição } x_2. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \#t_1 &= 2, \\ \#t_2 &= 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo PM, $|Y| = 2 \times 1 = 2$. Por outro lado, sabemos que $|X| = 1 \neq 2$.

Esta discrepância de valores se dá pelo fato de que, considerando a execução das tarefas acima na geração das figuras, temos que

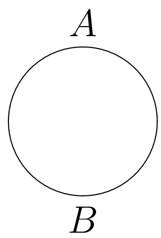
– existem 2 maneiras de executar as tarefas acima;

– cada uma das 2 maneiras gera uma figura diferente;

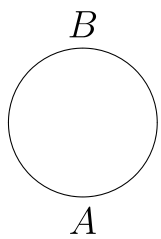
– as duas figuras obtidas por execução da tarefa representam a mesma roda.

Para ver isto claramente, vamos aplicar as tarefas acima na geração das figuras com 2 rótulos.

Primeiramente, se ao executar t_1 escolhemos A, ao executar t_2 só nos resta escolher B, e obtemos a figura



Por outro lado, se ao executar t_1 escolhemos B, ao executar t_2 só nos resta escolher A, e obtemos a figura

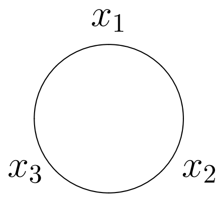


Mas, com já vimos, estas duas figuras representam a mesma roda.

Assim, mostramos que os conjuntos das figuras e das rodas podem ser relacionados de modo que à duas figuras correspondem uma mesma roda e cada roda é a correspondente de exatamente duas figuras. Assim, pelo P21, $|X| = \dfrac{|Y|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$, que é o resultado esperado.

Caso $n = 3$

Neste caso, como já vimos, os elementos do conjunto X, das rodas, podem ser representados por figuras



onde x_1, x_2 e x_3 representam as meninas dispostas na roda.

Seja Y o conjunto de tais figuras. Cada elemento de Y pode ser formado pela execução de duas tarefas:

t_1 : escolher uma menina para ocupar a posição x_1;
t_2 : escolher uma permutação das 2 meninas restantes para ocupar as posições x_2 e x_3.

Temos que

$$\begin{aligned} \#t_1 &= 3 \\ \#t_2 &= 2! = 2 \end{aligned}$$

Assim, pelo PM, temos que $|X| = 3 \times 2 = 6$. Por outro lado, sabemos que $|X| = 2 \neq 6$.

Novamente, a discrepância se dá pelo fato de que, considerando a execução das tarefas acima na geração das figuras, temos que

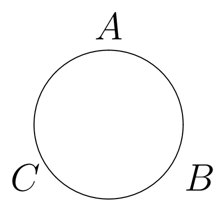
– existem 6 maneiras de executar as tarefas acima;

– cada uma das 6 maneiras gera uma figura diferente;

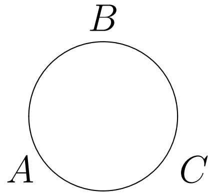
– algumas das figuras obtidas por execução da tarefa representam a mesma roda

Para ver isto claramente, vamos aplicar as tarefas acima na geração das figuras com 3 rótulos.

Primeiramente, se ao executar t_1 escolhemos A e ao executar t_2 escolhemos BC, obtemos a figura

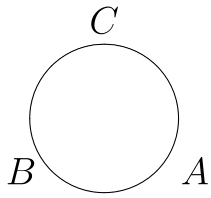


Além disso, se ao executar t_1 escolhemos B e ao executar t_2 escolhemos CA, obtemos a figura



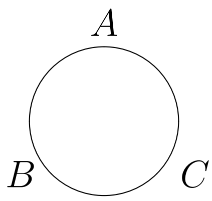
que, como já vimos, é a mesma já obtida anteriormente.

Finalmente, se ao executar t_1 escolhemos C e ao executar t_2 escolhemos AB, obtemos a roda



que, como já vimos, também é a mesma já obtida anteriormente.

Exercício 12 Mostre que as outras três execuções possíveis das tarefas acima fornecem a roda

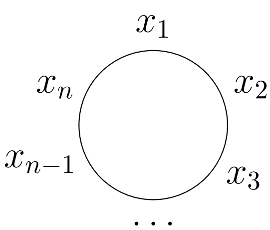


e que esta é diferente das rodas obtidas anteriormente.

Assim, mostramos que os conjuntos das figuras e das rodas podem ser relacionados de modo que à três figuras correspondem uma mesma roda e cada roda é a correspondente de exatamente três figuras. Assim, pelo P31, $|X| = \dfrac{|Y|}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$, que é o resultado esperado.

Caso n genérico

Neste caso, os elementos do conjunto X, das rodas, podem ser representados por figuras



onde x_1, x_2, ..., x_n representam as meninas dispostas na roda.

Seja Y o conjunto de tais figuras. Cada elemento de Y pode ser formado pela execução de duas tarefas:

$$\begin{array}{rcl} t_1 & : & \text{escolher uma menina para ocupar a posição } x_1; \\ t_2 & : & \text{escolher uma permutação das } n-1 \text{ meninas restantes} \\ & & \text{para ocupar as posições } x_2, x_3, \ldots, x_n. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#t_1 & = & n \\ \#t_2 & = & (n-1)! \end{array}$$

Assim, pelo PM, temos que $|X| = n \times (n-1)! = n!$. Por outro lado, queremos determinar o número de rodas e não o número de figuras; e já suspeitamos que estes números não são iguais (há muito mais figuras do que rodas).

Como nos casos anteriores, podemos esperar que a discrepância entre os valores de $|X|$ e $|Y|$ se dá pelo fato de que, considerando a execução das tarefas acima na geração das figuras, temos que

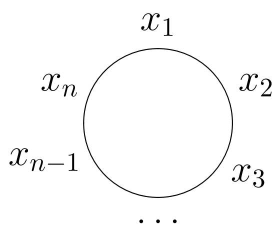
– existem $n!$ maneiras de executar as tarefas acima;

– cada uma das $n!$ maneiras gera uma figura diferente;

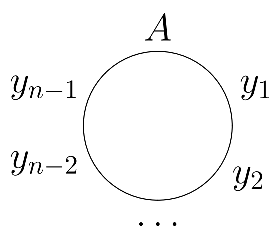
– algumas das figuras obtidas por execução das tarefas representam a mesma roda.

A questão que resta, então, é determinar quantas figuras geradas por execução das tarefas acima representam a mesma roda. Para isto, considere a associação de figuras a rodas, feita da maneira seguinte.

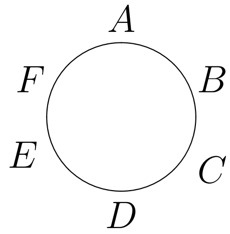
A cada figura



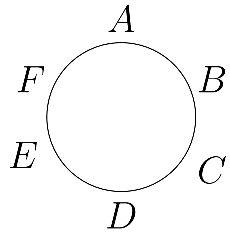
gerada por aplicação das regras acima, associamos a roda



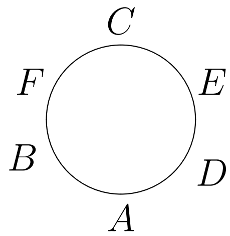
que tem o rótulo A mais cima e segue com a permutação dos $n-1$ rótulos restantes, escritos na ordem em que ocorrem na circunferência, quando a figura é lida no sentido horário a partir de A. Por exemplo, se n fosse igual a 6, à figura



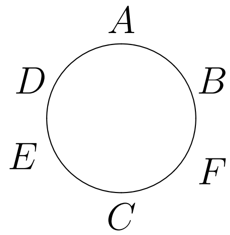
associaríamos a roda



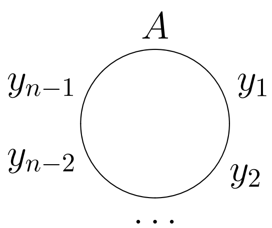
ou seja, ela mesma. Porém, à figura



associaríamos a roda



Desta maneira, a qualquer uma das figuras que tenha o rótulo A ocupando qualquer posição na circunferência, seguido da mesma permutação $y_1 y_2 \dots y_n$ dos outros rótulos, teremos associada a mesma roda representada pela figura



Para contar o número de tais figuras, basta observar que cada figura pode ser formada pela tomada de uma única decisão:

t_1 : escolher um posição na circuferência para colocar A.

Assim, existem n figuras que são associadas a mesma roda.

Mostramos, então, que os conjuntos das figuras e das rodas podem ser relacionados de modo que a n figuras correspondem uma mesma roda e cada roda é a correspondente de exatamente n figuras. Assim, pelo Pn1, $|X| = \dfrac{|Y|}{n} = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.

> Seja A um conjunto com n elementos tal que $n \geq 2$.
>
> Vamos denotar por
> $$PC(n)$$
> o número de permutações circulares dos n elementos de A.
>
> O número de permutações circulares dos n elementos de A é dado pela fórmula
> $$PC(n) = (n-1)!.$$

> Por favor, não confunda!!!
>
> *Permutação circular* é uma configuração, ou seja, um objeto que está sendo contado.
>
> $PC(n)$ é um número natural, ou seja, o *número de permutaçoes circulares que podem ser formadas.*

Neste ponto, você deve estar convencido que a noção de permutação circular não é essencial nos estudos de combinatória de contagem. De fato, permutações circulares de n elementos estão em bijeção com permutações de $n-1$ elementos e, como mostramos acima, podemos determinar o número de permutações circulares através da fórmula de permutações.

Para entender melhor a diferença entre permutações e permutações circulares, resolva o problema a seguir.

Exercício 13 De quantas formas 12 pessoas podem sentar em volta de uma mesa retangular:

(a) se o formato da mesa não é elevado em conta?

(b) se um dos lados menores da mesa é considerado a cabeceira da mesa?

9.2 Exercícios

1. De quantos modos uma pirâmide pentagonal de base regular pode ser pintada com seis cores diferentes, sendo cada face correspondente a uma cor?

2. Quantas rodas podem ser formadas com seis meninas, sendo que duas delas, estejam sempre lado a lado, na roda?

3. De quantos modos oito pessoas podem sentar em volta de uma mesa circular, sendo que duas delas nunca sentam lado a lado, na mesa?

4. De quantos modos quatro casais (maridos e esposas) podem sentar em volta de uma mesa circular, sendo que:

   (a) os homens ocupam posições consecutivas, na mesa?

   (b) os homens e as mulheres ocupam posições alternadas, na mesa?

   (c) cada marido senta do lado da sua esposa, na mesa?

5. De quantos modos dez casais podem sentar em uma roda gigante com dez bancos de dois lugares cada um?

9.3 Combinações simples

Considere o seguinte problema:

> Um *resultado de um concurso* é um sorteio simultaneo de três meninas, dentre as cinco meninas — Ana, Beatriz, Cleide, Daniele e Emília. As três são consideradas como vencedoras. Quantos sãos os possíveis resultados do concurso?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são as 5 meninas, que vamos denotar por A, B, C, D e E, e as configurações são os resultados do concurso.

Como três meninas são consideradas como vencedoras e está claro que não há repetições no resultado do sorteio, uma configuração pode ser representada por um conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$, onde x_1, x_2 e x_3 são as meninas sorteadas simultaneamente, dentre as meninas do conjunto $\{A, B, C, D, E\}$.

Considere X, o conjunto de todos os resultados do concurso. Queremos determinar $|X|$.

Como, usualmente, os sorteios de vários objetos são feitos, sorteando-se cada objeto sucessivamente, à primeira vista, pode parecer que as seguintes escolhas podem ser feitas para formar um resultado do concurso:

e_1 : escolher uma menina para ser x_1;
e_2 : escolher uma menina distinta da já escolhida para ser x_2;
e_3 : escolher uma menina distinta das já escolhidas para ser x_3.

Assim, aparentemente, $|X|$ poderia ser determinado diretamente a partir das escolhas acima.

Mas, como as três meninas sortedas são consideradas como vencedoras, tanto faz se, sorteando cada uma sucessivamente, obtemos, por exemplo, A, e depois B, e depois C; ou se obtemos primeiro, por exemplo, C, e depois B, e depois A. Em particular, todos os sorteios sucessivos

$$\begin{array}{cc} ABC, & ACB, \\ BAC, & BCA, \\ CAB, & CBA \end{array}$$

correspondem ao mesmo conjunto $\{A, B, C\}$.

De uma maneira geral, a cada conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ de 3 meninas, formado a partir das meninas A, B, C, D e E, corresponde 6 arranjos das mesmas das meninas tomadas 3 a 3:

$$\begin{array}{cc} (x_1, x_2, x_3), & (x_1, x_3, x_2), \\ (x_2, x_1, x_3), & (x_2, x_3, x_1), \\ (x_3, x_1, x_2), & (x_3, x_2, x_1). \end{array}$$

Assim, mostramos que o conjunto dos conjuntos de três meninas e o conjunto dos arranjos das seis meninas tomadas 3 a 3 estão relacionados de modo que a seis arranjos corresponde um conjunto e cada conjunto é o correspondente de seis arranjos. Assim, pelo P61, $|X| = \dfrac{A(6,3)}{6} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{6} = 5 \times 4 = 20.$ □

Quando, para resolver um problema de contagem, temos n objetos dados e devemos efetuar uma escolha na qual k objetos distintos são tomados simultaneamente, dizemos que a configuração que estamos contando é uma *combinação simples*.

No problema acima, as três meninas vencedoras devem ser sorteadas simultaneamente. Assim, cada resultado do concurso é uma combinação simples.

Formalmente, combinações simples são definidas do seguinte modo:

Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$.

Uma *combinação simples* dos n elementos de A, tomados k a k, é um conjunto de k elementos distintos de A.

Combinações simples são, simplesmente, chamadas de *combinações*. Na verdade, em combinatória de contagem, só usamos a palavra "combinação" para nos referirmos a este tipo de configuração.

Combinações simples de n elementos de A, tomados k a k, nada mais são do que conjuntos de k elementos de A. Por essa razão, podem ser representadas por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. A ordem em que os elementos estão listados não é levada em conta na determinação da combinação.

Exemplo 43 (a) Se $A = \{a\}$, então a única combinação simples de 1 elemento de A, tomado 1 a 1, é

$$\{a\}$$

(b) Se $A = \{a, b\}$, então as combinações simples dos 2 elementos de A, tomados 1 a 1, são

$$\{a\}, \quad \{b\}$$

(c) Se $A = \{a, b\}$, então a única combinação simples dos 2 elementos de A, tomados 2 a 2, é

$$\{a, b\}$$

Exercício 14 (a) Dado $A = \{a, b, c\}$, liste todas as combinações simples de 3 elementos de A, tomados 1 a 1.

(b) Dado $A = \{a, b, c\}$, liste todas as combinação simples de 3 elemento de A, tomados 2 a 2.

(c) Dado $A = \{a, b, c\}$, liste todas as combinação simples de 3 elemento de A, tomado 3 a 3.

(d) Resolver exercícios análogos para $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$.

Vamos, agora, obter uma fórmula para calcular o número de combinações de n elementos, tomados k a k. Ou seja, vamos resolver o seguinte problema:

> Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$. Quantas combinações simples dos n elementos de A, tomados k a k, são possíveis?

Resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os elementos de A e as configurações são as combinações simples dos elementos de A, tomados k a k. Como cada uma destas combinações é um subconjunto de A com k elementos, elas podem ser representadas por $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, onde x_i é um elemento de k, para $1 \leq i \leq k$.

Seja X o conjunto de todas as combinações dos n elementos de A, tomados k a k. Queremos determinar $|X|$.

Pelo Pk1, se encontrarmos um conjunto Y do qual sabemos determinar o número de elementos, um número natural m, e uma função m para 1 de Y para X, o problema está resolvido.

Para isto, primeiramente, observe que cada combinação é um <u>subconjunto</u> de A, com k elementos (distintos). Por exemplo, quando $k < n$, os subconjuntos $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$ e $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}\}$ são combinações. Além disso, observe que cada combinação corresponde a (ou é a correspondente de) $k!$ arranjos que podem ser formados com elementos distintos de A. Por exemplo, a combinação $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ corresponde, entre outros, aos arranjos $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$, $(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k)$ e $(a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1)$.

Assim, em primeiro lugar, vamos considerar o problema de calcular $|Y|$, onde Y é o conjunto de todos os <u>arranjos</u> dos n elementos de A, tomados k a k.

Este problema é muito fácil de resolver:

$$|Y| = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-(i-1)) \times \ldots \times (n-(k-1)).$$

Vamos, agora, associar cada arranjo $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ em Y à combinação formada pelos elementos de A que são os termos de $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Por exemplo, de acordo com esta regra, o arranjo $(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k)$ está associado à combinação $\{a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k\}$. Mas, ainda de acordo com a regra, arranjos formados pelos mesmos k termos (só que em uma ordem diferente) estão associadas à mesma combinação. Por exemplo, os arranjos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k)$, $(a_1, a_3, a_2, a_4, \ldots, a_k)$, $(a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_k)$ e $(a_2, a_3, a_1, a_4, \ldots, a_k)$, que são distintos dois a dois, estão associadas à combinação $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k\}$. Então, na verdade, os arranjos acima estão todos associados à combinação $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k\}$.

Com esta associação, mostramos que os elementos dos conjuntos Y, dos arranjos, e X, das combinações, estão relacionados de maneira que a cada arranjo corresponde uma combinação e cada combinação é a correspondente de $k!$ arranjos distintos:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) \arrow[ddr] & \\
(a_1, a_3, a_2, \ldots, a_k) \arrow[dr] & \\
\vdots & \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \\
(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k) \arrow[ur] & \\
(a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Assim, concluimos que existe uma função $k!$ para 1 do conjunto Y dos arranjos dos n elementos de A, tomados k a k, no conjunto X das combinações dos n elementos de A, tomados k a k. Daí, pelo Pm1, onde $m = k!$, temos que $|X| = \dfrac{|Y|}{k!}$. Mas, como vimos acima, $|Y| = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))$. Então, concluímos que

$$|X| = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1}.$$

E o problema está resolvido. $\square$

Observe que tanto o numerador quanto o denominador da fração acima têm k fatores. Por exemplo,

$$\text{se } n = 5 \text{ e } k = 1, \text{ então } |X| = \frac{5}{1} = 5;$$

$$\text{se } n = 5 \text{ e } k = 2, \text{ então } |X| = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10;$$

$$\text{se } n = 5 \text{ e } k = 3, \text{ então } |X| = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10;$$

$$\text{se } n = 5 \text{ e } k = 4, \text{ então } |X| = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5;$$

$$\text{se } n = 5 \text{ e } k = 5, \text{ então } |X| = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1;$$

$$\text{se } n = 10 \text{ e } k = 5, \text{ então } |X| = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252.$$

Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$.

Vamos denotar por

$$C(n,k)$$

o número de combinações simples dos n elementos de A, tomados k a k.

O número de combinações simples dos n elementos n elementos de A, tomados k a k, é dado pela fórmula

$$C(n,k) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1}.$$

Por favor, não confunda!!!

Combinação simples é uma configuração, ou seja, um objeto que está sendo contado.

$C(n,k)$ é um número natural, ou seja, o *número de combinações simples que podem ser formadas*.

Neste ponto, você deve estar convencido que, diferentemente do que acontece com as outras configurações usuais apresentadas, tanto a noção de combinação quanto a fórmula para a determinação do número de combinações são essenciais nos estudos de combinatória de contagem. Isto se deve ao fato de que, como mostramos acima, apesar de utilizar a fórmula do número de arranjos na sua determinação, a fórmula do número de combinações não se reduz diretamente a ela e envolve uma aplicação do Pk1 que, pelo menos do ponto de vista da redação das resoluções dos problemas de contagem, não seria interessante ficar repetindo a cada nova contagem de combinações.

9.4 Exercícios

1. A partir de um grupo de 12 pessoas, quantos comitês de 5 pessoas podem ser formados?

2. Quantos números com 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, de modo que os algarismos estejam em ordem crescente? (Este é o Problema 1 da página 1).

3. (U.F. de Viçosa-MG) Para controlar o estoque de um produto, uma empresa usa etiquetas formadas por uma parte literal e outra numérica, nesta ordem. A parte literal é formada de três letras do nosso alfabeto, incluindo k, y, w, e a parte numérica é formada por quatro algarismos de 0 a 9. Sabendo-se que pode haver repetição das letras e dos algarismos, a quantidade do produto que pode ser etiquetada sem que haja coincidência de etiquetas é? (Este é o problema das etiquetas, do Exemplo 10).

4. (Fuvest-SP) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que *não* têm algarismos adjacentes iguais? (Este é o Problema dos números naturais, do Exemplo 11).

5. (Fatec-SP) Dispomos de 10 produtos para a montagem de cestas básicas. O número de cestas que podemos formar com 6 desses produtos, de modo que um determinado produto seja sempre incluído, é? (Este é o problema das cestas básicas, do Exemplo 12).

6. (Unifesp-SP) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um

síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas? (Este é o problema da escolha do síndico e conselho fiscal, do Exemplo 13).

7. Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros de um conselho que consiste de um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas? (Este é o problema da escolha do síndico e conselho fiscal, do Exemplo 24).

8. Existem 26 casas idênticas que vão ser pintadas, de maneira que 5 vão ser pintadas de verde, 6 vão ser pintadas de amarelo, 7 vão ser pintadas de azul e 8 vão ser pintadas de branco. De quantas maneiras estas casas podem ser pintadas?

Capítulo 10

Princípio da Inclusão-Exclusão

Neste capítulo, apresentamos (nas Seções 10.1, 10.2 e 10.4), e exemplificamos (nas Seções 10.3, 10.4 e 10.6) o *Princípio da Inclusão Exclusão*, PIE.

O PIE é um princípio de contagem que generaliza o PA e pode ser aplicado nas situações em que o universo pode ser exaurido por subconjuntos que não são disjuntos dois a dois. Tanto quando aplicado isoladamante, como quando usado em conjunto com os outros princípios, o PIE é uma ferramenta extremamente poderosa na resolução de problemas de contagem.

Da mesma forma que o PA e o PM, o que chamamos de PIE consiste, na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $n \geq 2$. Vamos descrever inicialmente o caso em que $n = 2$ e, posteriormente, generalizar para o caso em que n é arbitrário.

10.1 A idéia do PIE2

Considere o seguinte problema:

Quantos números no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ são pares ou primos?

Tentativa de resolução:

Neste problema, os objetos básicos são os números $1, 2, 3, \ldots, 50$. As configurações são os números, dentre estes, que são pares ou primos.

Seja X o conjunto dos números pares ou primos, dentre $1, 2, 3, \ldots, 50$. Uma primeira idéia para determinar $|X|$ é tentar aplicar o PA, considerando o conjunto X "quebrado" em dois subconjuntos:

A_1 : do números pares;
A_2 : dos números primos.

Mas, observe que embora tenhamos que, por definição, os conjuntos A_1 e A_2 exaurem X, infelizmente, eles não são disjuntos. De fato, o número 2 é um elemento comum de A_1 e A_2 e, na verdade, é o único elemento com esta propriedade. Assim, não podemos aplicar o PA, usando os subconjuntos acima, para resolver o problema. $\square$

O PIE2 é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto finito X, quando X pode ser "quebrado" em dois subconjuntos A_1 e A_2 que exaurem X, mas não são disjuntos. No problema acima, X é o conjunto dos números em $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ que são pares ou primos, A_1 o conjunto dos números pares em X e A_2 o conjunto dos números primos em X.

Terminando a resolução:

Primeiramente, observe que $|A_1| = \dfrac{50}{2} = 25$, e que como

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\},$$

temos que $|A_2| = 15$. Assim, se efetuamos os cálculos de acordo com o PA, obtemos a resposta errada

$$|X| = |A_1| + |A_2| = 25 + 15 = 30.$$

Mas o que está errado com este raciocínio?

A resposta é simples: quando somamos $|A_1|$ (que é o resultado da contagem do número de elementos em A_1) com $|A_2|$ (que é o resultado da contagem do número de elementos em A_2) o elemento 2 foi contabilizado duas vezes. Uma como elemento de A_1, ou seja, como número par; e outra como elemento de A_2, ou seja, como número primo; já que ele é simultaneamente par e primo.

Assim, para obter a resposta correta, devemos efetuar o cálculo

$$|X| = |A_1| + |A_2| - 1 = (25 + 15) - 1 = 30 - 1 = 29,$$

onde o -1 aparece como parcela para garantir que o elemento 2 seja contabilizado uma única vez (ou como número par, ou como número primo, mas não ambos.) $\square$

A resolução deste problema simples ilustra a idéia principal do PIE2: o PIE2 é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto finito X, quando X pode ser "quebrado" em dois subconjuntos A_1 e A_2 que exaurem X, que não são disjuntos, mas que são tais que sabemos calcular o número de elementos que A_1 e A_2 possuem em comum.

Para formalizar esta idéia, usamos as noções de *união* e *interseção* de conjuntos.

10.2 Enunciado do PIE2

A união de dois conjuntos é obtida quando juntamos todos os elementos que estão neles. E a interseção, quando pegamos apenas os elementos que eles têm em comum.

Sejam A e B conjuntos finitos.

(1) A *união* de A e B é o conjunto $A \cup B$ formado pelos elementos que estão em A, os que estão em B, e os que estão simultaneamente em A e B.

(2) A *interseção* de A e B é o conjunto $A \cap B$ formado pelos elementos que estão simultaneamente em A e B.

Exemplo 44 (a) Considere um conjunto P de pessoas, formado somente por pessoas do sexo feminino e pessoas morenas. Considere também os subconjuntos de P:

F : das pessoas do sexo feminino;
M : das pessoas morenas.

Temos que $P = F \cup M$ e que $F \cap M$ é o subconjunto de P formado pelas pessoas que são simultaneamente do sexo feminino e morenas.

(b) Considere o conjunto N dos números naturais entre 1 e 33.000, inclusive 1 e 33.000. Considere também os subconjuntos de X:

T : dos números em X que são divisíveis por 3;
C : dos números em X que são divisíveis por 5.

Temos que $N = T \cup C$ e que $T \cap C$ é o subconjunto de N formado pelos números naturais entre 1 e 33.000, inclusive 1 e 33.000, que são divisíveis simultaneamente por 3 e por 5.

A idéia central na formulação do PIE é a de que quando "quebramos" um conjunto X em dois subconjuntos A_1 e A_2 que não são disjuntos, para contar quantos elementos estão em X, podemos primeiramente contar quantos elementos estão em A_1, depois contar quantos elementos estão em A_2 e, finalmente, somar os resultados.

Mas, quando contamos os elementos que estão em A_2 após haver contado quantos elementos estão em A_1, os elementos que estão em $A_1 \cap A_2$ são contados duas vezes: uma quando contamos os elementos de A_1 e outra quando contamos os elementos de A_2

Assim, para determinar quantos elementos estão em $X = A_1 \cup A_2$ a partir de $|A_1|$ e $|A_2|$, devemos somar $|A_1|$ com $|A_2|$ e subtrair $|A_1 \cap A_2|$.

Mais formalmente, temos:

Princípio da Inclusão Exclusão (PIE2):

Seja X um conjunto finito.
Se $X = A_1 \cup A_2$, então

$$|X| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Observe a alternância dos sinais $+$ (inclusão) e $-$ (exclusão) no enunciado do PIE2.

Observe também que o PIE2 determina o número de elementos da união de dois conjuntos em função (1) do número de elementos de cada conjunto e (2) do número de elementos da interseção dos dois conjuntos.

Finalmente, observe que, o PIE2 é uma generalização imediata do PA2. De fato, se $X = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, então pelo PIE2, temos

$$|X| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - 0 = |A_1| + |A_2|,$$

ou seja,

$$|X| = |A_1| + |A_2|,$$

que é exatamente o PA2.

10.3 Primeiras aplicações do PIE2

Na prática, o PIE2 deve ser aplicado do seguinte modo:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X, o qual temos dificuldades, à primeira vista, em determinar.

2. Observamos que X pode ser dado como a união de dois conjuntos A_1 e A_2, para os quais sabemos determinar $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_1 \cap A_2|$.

3. Aplicamos o PIE2 e concluímos que o número de elementos em X é a soma do número de elementos de A_1 com o número de elementos de A_2, menos o número de elementos de $A_1 \cap A_2$.

Como um exemplo imediato de aplicação desta estratégia, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 45 Um grupo de pessoas consiste de 15 pessoas do sexo feminino, 15 pessoas morenas e 5 pessoas do sexo feminino que são morenas. Quantas pessoas existem neste grupo?

Resolução:

Neste problema não há distinção entre objetos básicos e configurações.
Seja X o conjunto de todas as pessoas no grupo.
Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{array}{lcl} A_1 & : & \text{das pessoas do sexo feminino em } X; \\ A_2 & : & \text{das pessoas morenas em } X. \end{array}$$

Pelos dados do problema, temos que $X = A_1 \cup A_2$ e que A_1 e A_2 não são disjuntos. Assim, pelo PIE2, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_1 \cap A_2|$, o problema está resolvido.

De acordo com o enunciado do problema, temos que $|A_1| = 15$, $|A_2| = 15$ e $|A_1 \cap A_2| = 5$.

Assim, pelo PIE2, $|X| = 15 + 15 - 5 = 25$.

O problema seguinte, é um exemplo de aplicação do PIE2 em que os valores de $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_1 \cap A_2|$ não são dados de maneira tão direta.

Exemplo 46 Quantos numerais de 5 algarismos podem ser formados com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, de modo que em cada numeral ocorra, ao menos uma vez, o dígito 1 e o dígito 2?

Resolução:

Neste problema os objetos básicos são os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. As configurações são os numerais de 5 algarismos, formados com estes dígitos, que possuem ao menos uma ocorrência do dígito 1 e ao menos uma ocorrência do dígito 2.

Seja X o conjunto dos numerais de 5 algarismos, formados com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, que possuem ao menos uma ocorrência do dígito 1 e ao menos uma ocorrência do dígito 2. Para determinar $|X|$, considere o conjunto Y de todos os numerais que podem ser formados com 5 algarismos particinado nos seguintes conjuntos X e Z o conjunto de todos os numerais que não possuem ocorrências de 1 nem de 2.

Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in X : x \text{ não possui ocorrências de } 1\}, \\ A_2 &= \{x \in X : x \text{ não possui ocorrências de } 2\}. \end{aligned}$$

Temos que $X = A_1 \cup A_2$. Assim, pelo PIE2, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_1 \cap A_2|$, o problema está resolvido.

□

10.4 Primeiras aplicações do PIE

Examinando o enunciado de alguns problemas, fica claro que a idéia acima não deve se restringir apenas aos casos em que "quebramos" os elementos de um conjunto X em exatamente 2 conjuntos.

Problema das pessoas

Um grupo de pessoas possui 425 pessoas do sexo feminino, 397 pessoas morenas, 340 pessoas altas, 284 do sexo feminino e morenas, 315 do sexo feminino e altas, 219 morenas e altas, e 147 do sexo femino, morenas e altas. Quantas pessoas existem neste grupo?

Problema dos divisores

Quantos números entre 1 e 33.000, inclusive 1 e 33.000, são divisíveis por 3, ou por 5, ou por 7?

Uma maneira natural de atacar estes problemas é extender a idéia que usamos nos exemplos 45 e 46 considerando o PIE3, ao invés do PIE2. Mas, para isto, precisamos elaborar um enunciado preciso do PIE3, que nos mostre como podemos calcular o número de elementos de um conjunto X quando o "quebramos" em três conjuntos que não são necessariamente disjuntos.

Como veremos agora, podemos formular o PIE3 empregando cuidadosamente o PIE2.

No caso do PIE2, temos que X é "quebrado" em 2 conjuntos. No caso do PIE3, temos que X é "quebrado" em 3 conjuntos, digamos $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Agora, se queremos aplicar o PIE2 para obter o PIE3, temos que "enxergar" o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ como uma união de dois conjuntos. Mas isto é fácil, uma vez que para quaisquer conjuntos A_1, A_2, A_3, temos que

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3),$$

e o lado direito da igualdade acima pode ser visto como a união dos dois conjuntos A_1 e $A_2 \cup A_3$.

Assim, pelo PIE2, podemos determinar $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ a partir de $|A_1|$, $|A_2 \cup A_3|$ e $|A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|$.

– Para determinar $|A_2 \cup A_3|$, pelo PIE2, basta determinar $|A_2|$, $|A_3|$ e $|A_2 \cap A_3|$.

– Para determinar $|A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|$, observe primeiramente que para quaisquer conjuntos A_1, A_2 e A_3, temos que

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3).$$

Assim, a interseção $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ pode ser vista como a união dos dois conjuntos $A_1 \cap A_2$ e $A_1 \cap A_3$.

Logo, para determinar $|A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|$, pelo PIE2, basta determinar $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$ e $|(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|$.

Agora, observe que para quaisquer conjuntos A_1, A_2 e A_3, temos que

$$(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Então, na verdade, para determinar $|A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|$, basta determinar $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Em resumo, para determinarmos $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, pelo PIE2, basta determinarmos as parcelas

$$|A_1|, |A_2|, |A_3|,$$

$$|A_1 \cap A_2|, |A_1 \cap A_3|, |A_2 \cap A_3|$$

e, finalmente,

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Já temos todos os ingredientes para formular o PIE3. O que falta fazer é colocá-los juntos da maneira correta. Mas isto pode ser feito se reformulamos passo-a-passo, aritmeticamente, o raciocínio acima, conforme mostrado na Figura 10.4.

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \underbrace{|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)|}_{PIE2} \\
&= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\
&= |A_1| + \underbrace{|A_2 \cup A_3|}_{PIE2} - \underbrace{|(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)|}_{PIE2} \\
&= |A_1| + \Big[|A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|\Big] - \\
&\quad \Big[|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|\Big] \\
&= |A_1| + \Big[|A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|\Big] - \\
&\quad \Big[|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\Big] \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}
$$

Figura 10.1: Obtendo o PIE3 a partir do PIE2.

Assim, após aplicarmos sucessivamente o PIE2, em conjunto com algumas propriedades básicas dos conjuntos, à uniões e interseções de A_1, A_2, A_3, finalmente, chegamos ao enunciado do PI3:

Princípio da Inclusão Exclusão (PIE3):

Seja X um conjunto finito.
Se $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, então

$$\begin{aligned} |X| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Observe a alternância dos sinais $+$ (inclusão) e $-$ (exclusão) na enunciado do PIE3.

Observe, também, que enquanto o PIE2 determina o número de elementos da união de dois conjuntos em função do número de elementos de cada conjunto e do número de elementos da intersção dos dois conjuntos, o PIE3 determina o número de elementos da união de três conjuntos em função (1) do número de elementos de cada conjunto, (2) do número de elementos das interseções destes conjuntos tomados dois-a-dois, e (3) do número de elementos da interseção dos três conjuntos.

Observe, ainda, que o PIE3 é uma generalização imediata do PA3. De fato, se $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ e $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap_A 3 = \emptyset$, então também temos $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Agora, pelo PIE3, temos

$$\begin{aligned} |X| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\ &\quad |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + \\ &\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|X| = |A_1| + |A_2| + |A_3|,$$

que é exatamente o PA3.

Finalmente, para nos convencermos que o PIE3 está correto aritmeticamente, vamos considerar cada elemento x que está em X e mostrar que, quando avaliamos o lado direito da igualdade que define o PIE3, e consideramos a pertinência de x em cada um dos conjuntos cujo número de elementos é contabilizado na expressão, x é contabilizado uma única vez e, portanto, é contabiizado corretamente quando determinamos o número de elementos de X.

Para isto, vamos considerar 3 casos.

Primeiro, se x está em exatamente um dos conjuntos A_i, $1 \leq i \leq 3$, ele é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_i|$, e não é contabilizado nenhuma outra vez quando determinamos o número de elementos de nenhum outro conjunto, já que ele não está em mais de um conjunto.

Segundo, se x está em exatamente dois dos conjuntos A_i e A_j, $1 \leq i < j \leq 3$, ele é contabilizado 2 vezes quando determinamos $|A_k|$, $1 \leq k \leq 3$, é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_i \cap A_j|$, $1 \leq i < j \leq 3$, e não é contabilizado nenhuma outra vez quando determinamos o número de elementos de nenhum outro conjunto, já que ele não está na interseção de nenhum par formado por outros dois conjuntos e nem na interseção de mais de dois conjuntos. Assim, pela alternância dos sinais, ele é contabilizado uma única vez.

Finalmente, se x está em nos três conjuntos A_1, A_2 e A_3, ele é contabilizado 3 vezes quando determinamos $|A_i|$, $1 \leq i \leq 3$, é contabilizado 3 vezes quando determinamos $|A_i \cap A_j|$, $1 \leq i < j \leq 3$, e é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Assim, pela alternância dos sinais, ele é contabilizado uma única vez.

Vamos agora resolver os problemas que motivaram a extensão do PIE2 para o PIE3.

Exemplo 47 Um grupo de pessoas possui 425 pessoas do sexo feminino, 397 pessoas morenas, 340 pessoas altas, 284 do sexo feminino e morenas, 315 do sexo feminino e altas, 219 morenas e altas, e 147 do sexo femino, morenas e altas. Quantas pessoas existem neste grupo?

Resolução:

Neste problema não há distinção entre objetos básicos e configurações.

Seja X o conjunto de todas as pessoas no grupo.

Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{array}{lcl} A_1 & : & \text{das pessoas do sexo feminino em } X; \\ A_2 & : & \text{das pessoas morenas em } X \\ A_3 & : & \text{das pessoas altas em } X. \end{array}$$

Pelos dados do problema, temos que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ e que A_1, A_2 e A_3 não são disjuntos. Assim, pelo PIE3, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, $|A_2 \cap A_3|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, o problema está resolvido.

De acordo com o enunciado do problema, temos que $|A_1| = 425$, $|A_2| = 397$, $|A_3| = 340$, $|A_1 \cap A_2| = 284$, $|A_1 \cap A_3| = 325$, $|A_2 \cap A_3| = 219$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 147$.

Assim, pelo PIE3, $|X| = 425 + 397 + 340 - 284 - 325 - 219 + 147 = 1.309 - 828 = 481$. $\square$

Exemplo 48 Quantos números entre 1 e 33.000, inclusive 1 e 33.000, são divisíveis por 3, ou por 5, ou por 7?

Resolução:

Neste problema os objetos básicos são os números 1 e 33.000, inclusive 1 e 33.000. As configurações são os números, dentre estes, que são divisíveis por 3, ou por 5, ou por 7.

Seja X o conjunto dos números entre 1 e 33.000, inclusive 1 e 33.000, que são divisíveis por 3, ou por 5, ou por 7.

Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in X : x \text{ é divisível por } 3\}; \\ A_2 &= \{x \in X : x \text{ é divisível por } 5\}; \\ A_3 &= \{x \in X : x \text{ é divisível por } 7\}. \end{aligned}$$

De acordo com o enunciado do problema, temos que $|A_1| = \dfrac{33.000}{3} = 11.000$, $|A_2| = \dfrac{33.000}{5} = 6.600$, $|A_3| \approx \dfrac{33.000}{7} \approx 4.714$, $|A_1 \cap A_2| = \dfrac{33.000}{15} = 2.200$, $|A_1 \cap A_3| \approx \dfrac{33.000}{21} \approx 1.571$, $|A_2 \cap A_3| \approx \dfrac{33.000}{35} \approx 942$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \approx \dfrac{33.000}{105} \approx 314$.

Assim, pelo PIE3, $|X| = 11.000 + 6.600 + 4.714 - 2.200 - 1.571 - 942 + 314 = 22.628 - 4.713 = 17.915$. $\square$

10.5 Enunciado do PIE

É claro que a qualquer momento podemos nos deparar com problemas que exigem a extensão do PIE2, e do PIE3, para $4, 5, \ldots, n, \ldots$ conjuntos. Assim, ao invés de continuar aplicando o PI2, e o PI3, na solução de problemas específicos, vamos entender um pouco melhor como estes princípios funcionam e formular o PIE para um número arbitrário de conjuntos.

Primeiramente, vamos estender o raciocínio que suamos acima para obter a formulação do PIE3 a partir do PIE2, obtendo uma formulação do PIE4 a partir do PIE3 e do PIE2. A partir daí, formularemos um padrão para o caso geral.

No caso do PIE3, temos que X é "quebrado" em 3 conjuntos. No caso do PIE4, temos que X é "quebrado" em 4 conjuntos, digamos $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Agora, se queremos aplicar o PIE3 para obter o PIE4, temos que "enxergar" o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ como uma união de 3 conjuntos. Mas isto é fácil, uma vez que para quaisquer conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4 temos que

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cup A_4),$$

e o lado direito da igualdade acima pode ser visto como a união dos 3 conjuntos A_1, A_2 e $A_3 \cup A_4$.

Assim, pelo PIE3, podemos determinar $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ a partir de $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3 \cup A_4|$, $|A_1 \cup A_2|$, $|A_1 \cap (A_3 \cup A_4)|$, $|A_2 \cap (A_3 \cup A_4)|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)|$.

– Para determinar $|A_3 \cup A_4|$, pelo PIE2, basta determinar $|A_3|$, $|A_4|$ e $|A_3 \cap A_4|$.

– Analogamente, para determinar $|A_1 \cup A_2|$, basta determinar $|A_1|$, $|A_2|$ e $|A_1 \cap A_2|$.

– Para determinar $|A_1 \cap (A_3 \cup A_4)|$, usamos um raciocínio análogo ao já usado anteriormente no caso da formulação do PIE, observando primeiramente que para quaisquer conjuntos A_1, A_3 e A_4, temos que

$$A_1 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4).$$

Assim, a interseção $A_1 \cap (A_3 \cup A_4)$ pode ser vista como a união dos dois conjuntos $A_1 \cap A_3$ e $A_1 \cap A_4$.

Logo, para determinar $|A_1 \cap (A_3 \cup A_4)|$, pelo PIE2, basta determinar $|A_1 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_4|$ e $|(A_1 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_4)|$.

Agora, como para quaisquer conjuntos A_1, A_3 e A_4, temos que

$$(A_1 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_4) = A_1 \cap A_3 \cap A_4,$$

na verdade, para determinar $|A_1 \cap (A_3 \cup A_4)|$, basta determinar $|A_1 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_4|$ e $|A_1 \cap A_3 \cap A_4|$.

– Analogamente, para determinar $|A_2 \cap (A_3 \cup A_4))$, basta determinar $|A_2 \cap A_3|$, $|A_2 \cap A_4|$ e $|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

– Finalmente, para determinar $|A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)|$, observamos primeiramente que para quaisquer conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4, temos que

$$A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cup A_4)$$

e que

$$(A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cup A_4) = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$$

Assim, a interseção $A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ pode ser vista como a união dos dois conjuntos $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ e $A_1 \cap A_2 \cap A_4$.

Logo, para determinar $|A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)|$, pelo PIE2, basta determinar $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$ e $|(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_2 \cap A_4)|$.

Agora, como para quaisquer conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4, temos que

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_2 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

na verdade, para determinar $|A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)|$, basta determinar $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

Em resumo, para determinarmos $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, pelos PIE2 e PIE3, basta determinarmos as parcelas

$$|A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|,$$

$$|A_1 \cap A_2|, |A_1 \cap A_3|, |A_1 \cap A_4|, |A_2 \cap A_3|, |A_2 \cap A_4|, |A_3 \cap A_4|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|, |A_1 \cap A_2 \cap A_4|, |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

e, finalmente,

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Exercício 15 Baseado no seu entendimento do padrão acima, determine, todas as parcelas que devem ser usadas na formulação do PIE5, considerando $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

Já temos todos os ingredientes para formular o PIE4. O que falta fazer é colocá-los juntos da maneira correta. Mas isto pode ser feito se reformulamos passo-a-passo, aritmeticamente, o raciocínio acima, conforme mostrado na Figura 10.5, na página 139.

Assim, após aplicarmos sucessivamente o PIE2 e do PIE3, em conjunto com algumas propriedades básicas dos conjuntos, à uniões e interseções de A_1, A_2, A_3, A_4, finalmente, chegamos ao enunciado do PI4:

Princípio da Inclusão Exclusão (PIE4):

Seja X um conjunto finito.
Se $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, então

$$\begin{aligned} |X| \;=\; & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ & -|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ & +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ & +|A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

Observe a alternância dos sinais $+$ (inclusão) e $-$ (exclusão) no enunciado do PIE4.

Observe, também, que enquanto o PIE3 determina o número de elementos da união de três conjuntos em função do número de elementos de cada conjunto, do número de elementos das interseções destes conjuntos tomados dois-a-dois, e do número de elementos da interseção dos três conjuntos, o PIE4 determina o número de elementos da união de quatro conjuntos em função (1) do número de elementos de cada conjunto, (2) do número de elementos das interseções destes conjuntos tomados dois-a-dois, (3) do número de elementos das interseções destes conjuntos tomados três-a-três e (3) do número de elementos da interseção dos quatro conjuntos.

Exercício 16 Mostre que o PIE4 é uma generalização do PA4.

Para nos convencermos de que o PIE4 está correto aritmeticamente, vamos considerar cada elemento x que está em X e mostrar que, quando avaliamos o lado direito da igualdade que define o PIE3, e consideramos a pertinência de x em cada um dos conjuntos cujo número de elementos é contabilizado na expressão, x é contabilizado uma única vez e, portanto, é contabiizado corretamente quando determinamos o número de elementos de X.

Para isto, vamos considerar 4 casos.

Primeiro, se x está em exatamente um dos conjuntos A_i, $1 \leq i \leq 4$, ele é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_i|$, e não é contabilizado nenhuma outra vez quando determinamos o número de elementos de nenhum outro conjunto, já que ele não está em mais de um conjunto. Assim, ele é contabilizado uma única vez.

Segundo, se x está em exatamente dois dos conjuntos A_i e A_j, $1 \leq i < j \leq 4$, ele é contabilizado 2 vezes quando determinamos $|A_k|$, $1 \leq k \leq 4$, é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_i \cap A_j|$, $1 \leq i < j \leq 4$, e não é contabilizado nenhuma outra vez quando determinamos o número de elementos de nenhum outro conjunto, já que ele não está na interseção de nenhum par formado por outros dois conjuntos e nem na interseção de mais de dois conjuntos. Assim, pela alternância dos sinais, ele é contabilizado uma única vez.

Terceiro, se x está em exatamente três dos conjuntos A_i, A_j e A_k, $1 \leq i < j < k \leq 4$, ele é contabilizado 3 vezes quando determinamos $|A_l|$, $1 \leq l \leq 4$, é contabilizado 3 vezes quando determinamos $|A_p \cap A_q|$, $1 \leq p < q \leq 4$, é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_p \cap A_q \cap A_r|$, $1 \leq p < q < r \leq 4$, e não é contabilizado nenhuma outra vez quando determinamos o número de elementos de nenhum outro conjunto, já que ele não está na interseção de nenhum trio formado por outros três conjuntos e nem na interseção de mais de três conjuntos. Assim, pela alternância dos sinais, ele é contabilizado uma única vez.

Finalmente, se x está em nos quatro conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4, ele é contabilizado 4 vezes quando determinamos $|A_i|$, $1 \leq i \leq 4$, é contabilizado 6 vezes quando determinamos $|A_i \cap A_j|$, $1 \leq i < j \leq 4$, é contabilizado 4 vezes quando determinamos $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, $1 \leq i < j < k \leq 4$, e é contabilizado 1 vez quando determinamos $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. Assim, pela alternância dos sinais, ele é contabilizado uma única vez.

Exercício 17 (a) Baseado no seu entendimento dos padrões acima, e na solução do Exercício 15, determine o enunciado do PIE5 diretamente.

(b) Após enunciar o PIE5, faça uma justificativa aritmética de que ele está correto.

Os exemplos e exercícios acima sugerem um procedimento para a determinação do enunciado do PIEn, que aparece na Figura 10.5, na página 140.

Exercício 18 Considere o conjunto $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8$.

(a) Quantas parcelas do PIE8 representando interseções dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_8 tomados 3 a 3 existem?

(b) Quantas parcelas do PIE8 representando interseções dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_8 tomados 6 a 6 existem?

(b) Quantas parcelas do PIE8 representando interseções dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_8 tomados 8 a 8 existem?

10.6 Aplicações clássicas do PIE

Vamos agora aplicar o PIE, em toda a sua generalidade, na resolução de três problemas clássicos: o problema do número de permutações caóticas, o problema do cálculo da função ϕ de Euler e o problema do número de funções sobrejetoras. Nosso objetivo é ilustrar como este importante princípio pode ser usado não só na resolução de problemas dos contagem mais difíceis mas, também, na resolução de problemas de outras áreas da matemática. Em cada caso, vamos tratar de um problema envolvendo números específicos e a seguir generalizar o problema para valores genéricos.

10.6.1 Permutações caóticas

Considere o seguinte problema:

Problema dos envelopes

Um funcionário de um zoológico está escrevendo 4 cartas de agradecimento por doações realizadas por terceiros e deve colocá-las dentro de 4 envelopes, cada uma em seu respectivo envelope, para endereçamento. Quando as cartas estão prontas e falta apenas endereçá-las, ele sai do seu escritório para atender a um telefonema. Mais tarde, quando ele volta, ele descobre que o macaco de estimação do zoológico colocou as cartas aleatoriamente dentro dos envelopes e lacrou os envelopes.

De quantas maneiras o macaco pode ter feito isso, de modo que nenhuma carta esteja em seu envelope correspondente?

Resolução do problema dos envelopes:

Neste problema, os objetos básicos são as cartas e os envelopes. As configurações são os envelopes com as cartas dentro, de modo que nenhuma carta esteja no seu respectivo envelope.

É claro que, como temos apenas 4 cartas, digamos c_1, c_2, c_3, c_4, e 4 envelopes, digamos e_1, e_2, e_3, e_4, uma solução imediata para este problema seria listar todas as configurações e contá-las. Mas, como o nosso objetivo não é apenas resolver o problema, mas também generalizá-lo, vamos resolver o problema adotando uma estratégia através dos princípios de contagem.

Para isto, seja X o conjunto formado por todos os possíveis resultados de colocar as cartas dentro dos envelopes e considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{x \in X : x \text{ não possui nenhuma carta no seu respectivo envelope}\}; \\ A_1 & = & \{x \in X : x \text{ possui a carta } c_1 \text{ no envelope } e_1\}; \\ A_2 & = & \{x \in X : x \text{ possui a carta } c_2 \text{ no envelope } e_2\}; \\ A_3 & = & \{x \in X : x \text{ possui a carta } c_3 \text{ no envelope } e_3\}; \\ A_4 & = & \{x \in X : x \text{ possui a carta } c_4 \text{ no envelope } e_4\}. \end{array}$$

Observe que queremos determinar $|A_0|$. Observe também que

$$X = A_0 \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

e que

$$A_0 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \emptyset.$$

Assim, pelo PA,

$$|X| = |A_0| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|,$$

ou seja,

$$|A_0| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.$$

Assim, se determinamos $|X|$ e $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, o problema está resolvido.

Para determinar $|X|$, podemos usar o PB, observando que se consideramos a ordem em que os envelopes estão dispostos fixa, cada elemento de X corresponde a uma permutação das 4 cartas c_1, c_2, c_3, c_4. Assim, $|X| = 4! = 24$.

Para determinar $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, vamos aplicar o PIE. Como vimos acima, pelo PIE4, temos que

$$\begin{array}{rcl} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| & = & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & & -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ & & -|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ & & +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ & & +|A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & & -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{array}$$

Assim, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, ..., $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$, ..., $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$, o problema está resolvido.

Para determinar $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq 4$, observe que para formar um elemento x de A_i, podemos tomar duas decisões:

$$\begin{array}{rcl} d_1 & : & \text{colocar a carta } c_i \text{ no envelope } e_i \text{ de } x, \\ d_2 & : & \text{colocar aleatoriamente a 3 cartas restantes nos} \\ & & \text{3 envelopes restantes de } x. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#d_1 & = & 1, \\ \#d_2 & = & 3!. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|A_i| = 1 \times 3! = 3!$, onde $1 \leq i \leq 4$.

Analogamente, para determinar $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq 4$, observe que para formar um elemento x de $A_i \cap A_j$, podemos tomar três decisões:

$$\begin{array}{rcl} d_1 & : & \text{colocar a carta } c_i \text{ no envelope } e_i \text{ de } x, \\ d_2 & : & \text{colocar a carta } c_j \text{ no envelope } e_j \text{ de } x, \\ d_3 & : & \text{colocar aleatoriamente a 2 cartas restantes nos} \\ & & \text{2 envelopes restantes de } x. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#d_1 & = & 1, \\ \#d_2 & = & 1, \\ \#d_3 & = & 2!. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|A_i \cap A_j| = 1 \times 1 \times 2! = 2!$, onde $1 \leq i < j \leq 4$.

Além disso, para determinar $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, onde $1 \leq i < j < k \leq 4$, observe que para formar um elemento x de $A_i \cap A_j \cap A_k$, podemos tomar quatro decisões:

$$\begin{array}{rcl} d_1 & : & \text{colocar a carta } c_i \text{ no envelope } e_i \text{ de } x, \\ d_2 & : & \text{colocar a carta } c_j \text{ no envelope } e_j \text{ de } x, \\ d_3 & : & \text{colocar a carta } c_k \text{ no envelope } e_k \text{ de } x, \\ d_4 & : & \text{colocar a carta restante no envelope restante de } x. \end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \#d_1 & = & 1, \\ \#d_2 & = & 1, \\ \#d_3 & = & 1, \\ \#d_4 & = & 1. \end{array}$$

Assim, pelo PM, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$, onde $1 \leq i < j < k \leq 4$.

Finalmente, para determinar $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$, observe que para formar um elemento x de $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, podemos tomar uma única decisão:

d_1 : colocar cada carta no seu envelope correspondente.

Temos que

$$\#d_1 = 1.$$

Portanto, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$.

Com isto, calculamos $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq 4$; $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq 4$; $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, onde $1 \leq i < j < k \leq 4$ e, finalmente, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. Agora, no PIE4, existem 4 parcelas da forma $|A_i|$, 6 parcelas da forma $|A_i \cap A_j|$, 4 parcelas da forma $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ e 1 parcela da forma $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. Assim, temos que

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \times 3! - 6 \times 2! + 4 \times 1 - 1 = 24 - 12 + 4 - 1 = 15.$$

Agora que temos $|X|$ e $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, finalmente, temos que:

$$|A_0| = 24 - 15 = 9,$$

e o problema está resolvido. □

O problema dos envelopes pode ser generalizado através das noções de permutação e permutação caótica.

Sejam $1, 2, \ldots, n$ números naturais. Uma *permutação* de 1, 2, ..., n, também chamada *ordenação* de 1, 2, ..., n, é uma sequência de n termos distintos dois a dois, tomados no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por exemplo,

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

são todas as $4! = 24$ permutações de $1, 2, 3, 4$. Observe que cada uma delas corresponde a uma maneira de colocarmos 4 cartas em 4 envelopes, uma carta em cada envelope.

Seja p uma permutação de $1, 2, \ldots, n$. Dizemos que p é *caótica* se 1 não é o primeiro termo de p, 2 não é o segundo termo de p, 3 não é o terceiro termo de p, ..., n não o n-ésimo termo de p. Ou seja, p é caótica se nenhum termo de $123\dots n$ ocorre em p na mesma posição que ocorre em $123\dots n$. Por exemplo, retirando da tabela acima cada permutação de $1, 2, 3, 4$ que não é caótica, temos:

	2143	2341	2413	
	3142		3412	3421
4123			4312	4321

Assim, existem apenas 9 permutações caóticas de $1, 2, 3, 4$. Observe que cada uma delas corresponde a uma maneira de colocarmos 4 cartas em 4 envelopes, sem que nenhuma carta esteja no seu respectivo envelope.

Em geral, sabemos que existem $n!$ permutações de $1, 2, \dots, n$. Queremos, agora determinar quantas delas são caóticas.

Problema das permutações caóticas

Sejam n um número natural. Determinar o número de permutações caóticas de $1, 2, \dots, n$.

Resolução do problema das permutações caóticas:

Neste problema, os objetos básicos são $1, 2, \dots, n$ e as configurações são as permutações caóticas de $1, 2, \dots, n$.

Seja X o conjunto de todas as permutações de $1, 2, \dots, n$. Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{array}{lcl} A_0 & = & \{x \in X : x \text{ é permutação caótica}\}; \\ A_1 & = & \{x \in X : 1 \text{ é o primeiro termo de } x\}; \\ A_2 & = & \{x \in X : 2 \text{ é o segundo termo de } x\}; \\ A_3 & = & \{x \in X : 3 \text{ é o terceiro termo de } x\}; \\ \dots & & \dots \\ A_n & = & \{x \in X : n \text{ é o } n\text{-ésimo termo de } x\}. \end{array}$$

Observe que queremos determinar $|A_0|$. Observe também que

$$X = A_0 \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)$$

e que

$$A_0 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \emptyset.$$

Assim, pelo PA,

$$|X| = |A_0| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n|,$$

ou seja,

$$|A_0| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n|.$$

Assim, se determinamos $|X|$ e $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n|$, o problema está resolvido.

Para determinar $|X|$, basta notar que X é o conjunto de todas as permutações de $1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, $|X| = n!$.

Para determinar $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n|$, vamos aplicar o PIE. Como vimos acima, pelo PIE, temos que

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = \\
&\quad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-3} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad \cdots \\
&\quad +(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Assim, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, ..., $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$, ..., $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$, o problema está resolvido.

Para determinar $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq n$, observe que para formar um elemento x de A_i, podemos tomar duas decisões:

d_1 : colocar i na i-ésima posição de x,
d_2 : escolher uma permutação p dos $n-1$ números restantes e preencher as outras posições de x com estes números, da esquerda para a direta, de acordo com a ordem dada por p.

Temos que

$$
\begin{aligned}
\#d_1 &= 1, \\
\#d_2 &= (n-1)!.
\end{aligned}
$$

Assim, pelo PM, $|A_i| = 1 \times (n-1)! = (n-1)!$, onde $1 \leq i \leq n$.

Analogamente, para determinar $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq n$, observe que para formar um elemento x de $A_i \cap A_j$, podemos tomar três decisões:

d_1 : colocar i na i-ésima posição de x,
d_2 : colocar j na j-ésima posição de x,
d_3 : escolher uma permutação p dos $n-2$ números restantes e preencher as outras posições de x com estes números, da esquerda para a direta, de acordo com a ordem dada por p.

Temos que

$$
\begin{aligned}
\#d_1 &= 1, \\
\#d_2 &= 1, \\
\#d_3 &= (n-2)!.
\end{aligned}
$$

Assim, pelo PM, $|A_i \cap A_j| = 1 \times 1 \times (n-2)! = (n-2)!$, onde $1 \leq i < j \leq n$.

De uma maneira geral, para determinar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$, onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ são k elementos distintos dois a dois de $\{1, 2, \ldots, n\}$, observe que para formar um elemento x de $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, podemos tomar $k+1$ decisões:

$$\begin{array}{lll}
d_1 & : & \text{colocar } i_1 \text{ na } i_1\text{-ésima posição de } x, \\
d_2 & : & \text{colocar } i_2 \text{ na } i_2\text{-ésima posição de } x, \\
\ldots & & \ldots \\
d_k & : & \text{colocar } i_k \text{ na } i_k\text{-ésima posição de } x, \\
d_{k+1} & : & \text{escolher uma permutação } p \text{ dos } n-k \text{ números restantes e} \\
 & & \text{preencher as outras posições de } x \text{ com estes números,} \\
 & & \text{da esquerda para a direta, de acordo com a ordem dada por } p.
\end{array}$$

Temos que

$$\begin{array}{lcl}
\#d_1 & = & 1, \\
\#d_2 & = & 1, \\
\ldots & & \ldots \\
\#d_k & = & 1, \\
\#d_{k+1} & = & (n-k)!.
\end{array}$$

Assim, pelo PM, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{k \text{ vezes}} \times (n-k)! = (n-k)!$, onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ são k elementos distintos dois a dois de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Finalmente, para determinar $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$, observe que para formar um elemento x de $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, podemos tomar uma única decisão:

$$d_1 \; : \; \text{colocar cada número no seu lugar correspondente.}$$

Temos que

$$\#d_1 \; = \; 1.$$

Portanto, $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 1$.

Com isto, calculamos $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq n$; $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq n$; $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, onde $1 \leq i < j < k \leq n$, ..., e, finalmente, $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$. Agora, no PIE, existem $C(n, 1)$ parcelas da forma $|A_i|$, $C(n, 2)$ parcelas da forma $|A_i \cap A_j|$, $C(n, 3)$ parcelas da forma $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, ..., $C(n, n-k)$ parcelas da forma $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$, ..., e $C(n, n)$ parcelas da forma

$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| &= C(n,1)(n-1)! \\ &\quad -C(n,2)(n-2)! \\ &\quad +C(n,3)(n-3)! \\ &\quad \cdots \\ &\quad +(-1)^{n+1}\, C(n,n)(n-n)!.\end{aligned}$$

Agora que temos $|X|$ e $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n|$, finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned}|A_0| &= n! - [\, C(n,1)(n-1)! - C(n,2)(n-2)! + C(n,3)(n-3)! + \cdots \\ &\quad +(-1)^{n+1}\, C(n,n)(n-n)!\,],\end{aligned}$$

e o problema das permutações caóticas está resolvido. □

Exercício 19 Dado um número natural $n \geq 1$, denotamos por D_n o número de permutações caóticas dos elementos $1, 2, 3, \ldots, n$.

Simplificando a fórmula acima, mostre que

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

10.6.2 Função ϕ de Euler

Considere o seguinte problema:

Problema dos primos

Quantos números naturais (não nulos) menores ou iguais do que 360 são primos com 360? Ou seja, determinar $|X|$, onde

$$X = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 360 \text{ e } \mathrm{MDC}(x, 360) = 1\}.$$

Resolução do problema dos primos:

Neste problema, os objetos básicos são os números de 1 a 360. As configurações são os números, dentre estes, que são primos com 360.

É claro que, se temos tempo disponível e paciência, podemos listar todos os números de 1 a 360, testar quais deles são primos com 360 e contá-los. Mas, como o nosso objetivo não é apenas resolver o problema, mas também generalizá-lo, vamos resolver o problema adotando uma estratégia através dos princípios de contagem.

Para isto, observe que um número é primo com 360 se, e somente se, ele não tem nenhum fator primo em comum com 360. Agora, como $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, temos que um número natural de 1 a 360 é primo com 360 se, e somente se, ele não é divisível nem por 2, nem por 3, nem por 5.

Seja X o conjunto dos números naturais de 1 a 360 e considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in X : x \text{ possui 2 como fator primo}\}; \\ A_2 &= \{x \in X : x \text{ possui 3 como fator primo}\}; \\ A_3 &= \{x \in X : x \text{ possui 5 como fator primo}\}. \end{aligned}$$

Observe que queremos determinar $|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Temos que $|X| = 360$. Para determinar $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, vamos aplicar o PIE.

Como vimos acima, pelo PIE3, temos que

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Assim, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3$, $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, $|A_2 \cap A_3|$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, o problema está resolvido.

De acordo com o enunciado do problema, temos que $|A_1| = \dfrac{360}{2} = 180$, $|A_2| = \dfrac{360}{3} = 120$, $|A_3| = \dfrac{360}{5} = 72$, $|A_1 \cap A_2| = \dfrac{360}{6} = 60$, $|A_1 \cap A_3| = \dfrac{360}{10} = 36$, $|A_2 \cap A_3| = \dfrac{360}{15} = 24$ e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \dfrac{360}{30} = 12$.

Assim, pelo PIE3, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12 = 384 - 120 = 264$.

Finalmente, então, temos que existem $360 - 264 = 96$ números entre 1 e 360 que são primos com 360. □

O problema dos primos pode ser generalizado através do conceito de função ϕ de Euler.

A *função ϕ de Euler* é a função que associa a cada número natural não nulo n a quantidade de números naturais menores do que n que são primos com n.

Por exemplo,

$$\begin{array}{lll} \phi(1) = 0 & \phi(2) = 1 & \phi(3) = 2 \\ \phi(4) = 2 & \phi(5) = 4 & \phi(6) = 2 \\ \phi(7) = 6 & \phi(8) = 4 & \phi(9) = 6 \end{array}$$

Em geral, sabemos que existem n números naturais de 1 a n. Queremos, agora determinar quantos delas são primos com n.

Problema da função ϕ de Euler

Seja n um número natural não nulo. Determinar $\phi(n)$.

Resolução do problema da função ϕ de Euler:

Neste problema, os objetos básicos são os números de 1 a n. As configurações são os números, dentre estes, que são primos com n. A quantidade destes números é $\phi(n)$.

Vamos considerar dois casos.

Em primeiro lugar, se $n = 1$, temos que $\phi)n) = 1$, por definição.

Agora, se $n \neq 1$, para determinar $\phi(n)$, observamos que um número é primo com n se, e somente se, ele não tem nenhum fator primo em comum com n. Agora, como para qualquer número natural maior do que 1, sabemos que existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ e números naturais $a_1, a_2, \ldots, a_m$, tais que

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \cdots \times p_m^{a_m}.$$

Assim, temos que um número natural de 1 a n é primo com n se, e somente se, ele não é divisível por nenhum dos primos p_i, $1 \leq i \leq m$.

Agora, seja X o conjunto dos números naturais de 1 a n e considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{array}{lcl}
A_1 & = & \{x \in X : x \text{ possui } p_1 \text{ como fator primo}\}; \\
A_2 & = & \{x \in X : x \text{ possui } p_2 \text{ como fator primo}\}; \\
A_3 & = & \{x \in X : x \text{ possui } p_3 \text{ como fator primo}\}; \\
\ldots & & \\
A_m & = & \{x \in X : x \text{ possui } p_m \text{ como fator primo}\}.
\end{array}$$

Observe que $\phi(n) = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m|$.

Temos que $|X| = n$. Para determinar $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m|$, vamos aplicar o PIE. Como vimos acima, pelo PIE, temos que

$$\begin{array}{l}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = \\
\quad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-3} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
\quad \ldots \\
\quad +(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{array}$$

Assim, se determinamos $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, ..., $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$, ..., $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$, o problema está resolvido.

Para determinar $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq n$, basta observar que $|A_i| = \dfrac{n}{p_i}$.

Analogamente, para determinar $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq m$, basta observar que $|A_i \cap A_j| = \dfrac{n}{p_i p_j}$.

De uma maneira geral, para determinar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$, onde $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < m$, basta observar que $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \dfrac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$.

Finalmente, para determinar $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$, basta observar que $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| = \dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m}$.

Com isto, calculamos $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq n$; $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq n$; $|A_i \cap A_j \cap A_k|$, onde $1 \leq i < j < k \leq n$, ..., e, finalmente, $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$. Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = & \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_m} \\
& - \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{m-1} p_m} \\
& + \frac{n}{p_1 p_2 p_3} + \frac{n}{p_1 p_2 p_4} + \cdots + \frac{n}{p_{m-2} p_{m-1} p_m} \\
& \cdots \\
& + (-1)^{n+1} \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m}.
\end{aligned}
$$

Agora que temos $|X|$ e $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n|$, finalmente, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\phi(n) = n - \Bigg(& \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_m} \\
& - \frac{n}{p_1 p_2} - \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots - \frac{n}{p_{m-1} p_m} \\
& + \frac{n}{p_1 p_2 p_3} + \frac{n}{p_1 p_2 p_4} + \cdots + \frac{n}{p_{m-2} p_{m-1} p_m} \\
& \cdots \\
& (-1)^{n+1} \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m} \Bigg),
\end{aligned}
$$

e o problema da função ϕ de Euler está resolvido. □

Exercício 20 Simplificando a fórmula acima, mostre que

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&\quad = \underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cup A_4)|}_{PIE3} \\[1em]
&\quad = |A_1| + |A_2| + |A_3 \cup A_4| \\
&\qquad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap (A_3 \cup A_4)| - |A_2 \cap (A_3 \cup A_4)| \\
&\qquad +|A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)| \\[1em]
&\quad = |A_1| + |A_2| + \underbrace{|A_3 \cup A_4|}_{PIE2} - \\
&\qquad |A_1 \cap A_2| - \underbrace{|(A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4)|}_{PIE2} - \underbrace{|(A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)|}_{PIE2} + \\
&\qquad \underbrace{|(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_4)|}_{PIE2} \\[1em]
&\quad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2| - \\
&\qquad \Big[|A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_1 \cap A_4|\Big] - \\
&\qquad \Big[|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_4| + \\
&\qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_4|\Big] \\[1em]
&\quad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2| - \\
&\qquad \Big[|A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4|\Big] - \\
&\qquad \Big[|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \\
&\qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\Big] \\[1em]
&\quad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2| \\
&\qquad -|A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\qquad -|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\qquad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\[1em]
&\quad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&\qquad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\
&\qquad -|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&\qquad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\qquad -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}
$$

Figura 10.2: Obtendo o PIE4 a partir do PIE2 e do PIE3.

Seja $n \geq 2$ é um número natural.

1. Considere n variáveis A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n, cada uma denotando um conjunto.

2. Considere todas as expressões da forma $|A_i|$, onde $1 \leq i \leq n$, denotando o número de elementos de A_i. Observe que existem $C(n,1)$ expressões deste tipo, no total.

3. Considere todas as expressões da forma $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq n$, denotando o número de elementos de $A_i \cap A_j$. Observe que existem $C(n,2)$ expressões deste tipo, no total.

4. Considere todas as expressões da forma $|A_i \cap A_j|$, onde $1 \leq i < j \leq n$, denotando o número de elementos de $A_i \cap A_j$. Observe que existem $C(n,2)$ expressões deste tipo, no total.

   $\ldots$

i. Considere todas as expressões da forma $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$, onde $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, , denotando o número de elementos de $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$. Observe que existem $C(n,k)$ expressões deste tipo, no total.

   $\ldots$

n. Considere a expressões $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n|$, denotando o número de elementos de $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$. Observe que existem $C(n,n)$ expressões deste tipo, no total.

n+1. Junte todas as expressões acima, como parcelas, numa igualdade da forma

$$
\begin{aligned}
|X| \;=\; & |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
& -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
& +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
& \ldots \\
& +(-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|,
\end{aligned}
$$

onde $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$, observando a alternância dos sinais $+$ (inclusão) e $-$ (exclusão), quando passamos de um tipo de expressão para outro.

Figura 10.3: Enunciado do PIEn.

Referências Bibliográficas

[1] S. Hazzan, Combinatória e Probabilidade. Fundamentos de Matemática Elementar, volume 5. Atual, Rio de Janeiro, s.d.

[2] A.C. de O. Morgado, J.B.P. de Carvalho, P.C.P. Carvalho e P. Fernandez, Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios. Sexta edição. SBM, Rio de Janeiro, 2004.

[3] J.P.O. Santos e E.L. Estrada, Problemas Resolvidos de Combinatória. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[4] J.P.O. Santos, M.P. de Mello e I.T.C. Murari, Introdução à Análise Combinatória. 4ª edição revista. ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.