Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática – IME - Departamento de Análise – GAN
Gabarito da P1 de Introdução à Análise Combinatória – 2019.1

06/05/2019

Questão 1: Quantos diagonais possui um polígono de n lados.

Solução: (1,5pt) Dado n vértices os segmentos que os unem ou são diagonais ou são lados. Como para cada dois pontos temos apenas um segmentos temos que a quantidade de diagonais é dado por

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Outro argumento é que para cada vértice podemos escolher $n-3$ outros vértices para obter uma diagonal. Como temos n vértices, portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $n(n-3)$, mas cada um deles foi contado 2 vezes, já que a diagonal AB e a BA foram contados como diferentes. Por isso a quantidade de diagonais é dado por $\frac{n(n-3)}{2}$.

Questão 2: De quantas maneiras 8 crianças podem dar as mãos para brincar de roda.

Solução: (Vale 1,5pts) Queremos somente determinar a quantidade de possíveis disposições entre as crianças. Então o que importa é a posição relativa entre elas. Logo a resposta é $(8-1)! = 7!$.

Questão 3: Quantos são os anagramas da palavra PECULIAR:
(a) que começam por consoante e terminam por vogal?
(b) que têm as letras P,E,C juntas e nesta ordem?
(c) que têm as consoantes e as vogais intercaladas?
(d) que tem a letra P no 1º lugar e a letra E no 2º lugar?
(e) que tem a letra P no 1º lugar ou a letra E no 2º lugar?
(g) que tem a letra P no 1º lugar ou a letra E no 2º lugar ou a letra C no 3º lugar?

Solução: (Vale 3,0pts sendo 0,5pt por item) (a) Há 4 maneira de escolher a consoante para colocar no 1º lugar, há 4 maneiras de escolher a vogal em último lugar, e 6! formas de escolher as outras letras.

$$4 \times 4 \times 6! = 11\,520.$$

(b) Podemos entender que PEC é uma única letra, portanto, $6! = 720$.

(c) Primeiro precisamos escolher se inicia com uma vogal ou com uma consoante. Depois disso, como precisamos colocar 4 vogais em 4 lugares (4! formas) e o mesmo com as consoantes, logo

$$2 \times 4! \times 4! = 1152.$$

(d) Como a letra P e E já estão fixas sobram 6 letras para serem postas em 6 lugares, isto é, $6! = 720$.

(e) Há 7! anagramas com P em primeiro lugar e há 7! anagramas com E em segundo lugar. Ao somar 7! com 7! contamos todos os anagramas

- com P em primeiro lugar, isto é, da forma $\underline{P} - - - - - - - -$.
- com E no segundo, isto é, da forma $- \underline{E} - - - - - - -$.
- e duas vezes as da forma $\underline{P}\ \underline{E} - - - - - - - -$.

Então este número é exagerado por 6!, precisamos tirar a intercessão, isto é,

$$7! + 7! - 6! = 9\,360.$$

(f) Mesmo raciocínio do caso anterior (princípio da Exclusão-inclusão)

$$7! + 7! + 7! - 6! - 6! - 6! + 5! = 3 \times (7! - 6!) + 5! = 13\,080.$$

Questão 4: Lançam-se 3 dados. Em quantas dos 6^3 resultados possíveis a soma dos pontos é 13?

Solução: (vale 2,0pts) Este problema pode ser facilmente traduzido em encontrar todas as soluções inteiras não-negativas da equação: $x + y + z = 13$, com $1 \leq x, y, z \leq 6$. Para poder começar no zero, utilizamos a substituição de variáveis $x = a + 1$, $y = b + 1$ e $z = c + 1$, logo resolver a equação acima é equivalente a resolver

$$a + b + c = 10, \text{ com } 0 \leq a, b, c \leq 5$$

Se não houvesse a restrição $a, b, c \leq 5$ teríamos $CR_3^{10} = C_{10+3-1}^{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$.

Agora precisamos subtrair os casos contados em excesso. A quantidade de casos em que $x = 6$ é equivalente a quantidade de soluções inteiras não negativas de $y + z = 4$ que é $CR_2^4 = C_{4+2-1}^4 = 5$, continuando este raciocínio para $x = 7, 8, 9$ e 10 obtemos, respectivamente, $4, 3, 2$ e 1. Portanto, a quantidade de resultados possíveis no qual a soma dos pontos é 13 é dado por

$$210 - 3(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 21.$$

Questão 5: Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x + y + z + w = 19$ nas quais $x > y$?

Solução: (vale 2,0pts) Em primeiro lugar vamos determinar todas as soluções, em segundo determinar quantas são as soluções em que $x = y$, por simetria se subtrair e dividir por dois nos dará o número de soluções procurada.

O número de soluções é $CR_4^{19} = C_{19+4-1}^{19} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19!}{19!(22-19)!} = 1\,540$. Agora vamos determinar as soluções quando:

- $x = y = 0$, isto é, o número de soluções em $z + w = 19$ é dado por $CR_2^{19} = 20$.
- $x = y = 1$, isto é, o número de soluções em $z + w = 17$ é dado por $CR_2^{17} = 18$.
- $x = y = 2$, isto é, o número de soluções em $z + w = 15$ é dado por $CR_2^{15} = 16$.
- $\vdots$
- $x = y = 9$, isto é, o número de soluções em $z + w = 1$ é dado por $CR_2^{1} = 2$.

Portanto, o número de soluções do problema é

$$\frac{1\,540 - \frac{10(20+2)}{2}}{2} = \frac{1\,540 - 110}{2} = \frac{1430}{2} = 715.$$
