Exercícios

1. Encontrar a função geradora ordinária para cada uma das seqüências abaixo:

   (a) $(1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$;

   (b) $(1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 0, \ldots)$;

   (c) $(1, 1, 1, 3, 1, 1, \ldots)$;

   (d) $(0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$;

   (e) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$;

   (f) $(0, 4, 0, 4, 0, 4, \ldots)$;

   (g) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$;

   (h) $(1, -1, \frac{1}{2!}, \frac{-1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{-1}{5!}, \ldots)$;

   (i) $(a_k) = \left(\frac{2^k}{k!}\right)$.

2. Encontrar a seqüência gerada pelas funções geradoras ordinárias dadas abaixo:

   (a) $(x+1)^4$;

   (b) $x + e^x$;

   (c) $x^2(1-3x)^{-1}$;

   (d) $1 + (1-x^2)^{-1}$;

   (e) $e^{2x} + x + x^2$;

   (f) $x^2 e^x$;

   (g) $\frac{1}{1+x^2}$;

   (h) $e^{-x} + 3x$;

   (i) $x^3(1-4x)^{-1}$;

   (j) e^{-2x};

   (k) $(e^x + e^{-x})/2$;

   (l) $(1+x)^q$, onde q é um inteiro positivo.

3. Encontrar o coeficiente de x^6 em $(1-x)^n$, quando $n = 6$ e quando $n = -6$.

4. Encontrar o coeficiente de x^{27} em $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6$.

5. Encontrar o número de maneiras de se obter um total de 15 pontos ao se jogar, simultaneamente, quatro dados diferentes.

6. Representantes de três institutos de pesquisa devem formar uma comissão de 9 pesquisadores. De quantos modos se pode formar esta comissão sendo que nenhum instituto deve ter maioria absoluta no grupo?

7. Existem 10 caixas idênticas de presentes. Cada uma deve ser embrulhada com uma única cor e se dispõe de papéis de cor vermelha, azul, verde e amarela. O papel vermelho permite que se embrulhe no máximo duas caixas e com o azul se pode embrulhar no máximo 3. Escrever a função geradora ordinária associada com o problema de se encontrar o número de maneiras de se embrulhar estas 10 caixas.

8. Encontrar a função geradora ordinária para se calcular o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $2x + 3y + 4z + 5w = r$.

9. Encontrar o número de soluções em inteiros da equação $x + y + z + w = 25$, onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 8.

10. Numa competição cada um dos quatro juízes deve atribuir notas de 1 a 6 para cada participante. Para ser finalista um participante deve ter no mínino 22 pontos. Encontrar o número de maneiras que os juízes têm para atribuir notas de modo que um participante seja finalista.

11. Quantas soluções possui a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r,$$

se cada variável é igual a 0 ou 1?

12. Encontrar o número de maneiras de se distribuir 11 laranjas e 6 pêras para 3 crianças de modo que cada criança receba pelo menos 3 laranjas e no máximo 2 pêras.

13. Quantas n-uplas de 0's e 1's podem ser formadas usando-se um número par de 0's e um número par de 1's?

14. (a) Uma companhia telefônica adquire 9 computadores idênticos. De quantas maneiras ela pode distribuir estes 9 computadores para quatro diferentes escritórios de forma que cada um receba pelo menos um novo computador?

    (b) Nove novos técnicos são contratados pela companhia telefônica. De quantas maneiras ela pode alocar estes nove empregados para quatro diferentes escritórios de forma que cada um receba pelo menos um novo técnico?

15. Encontrar o número de maneiras de se distribuir n livros idênticos de português em r caixas idênticas e m livros idênticos de história em k caixas idênticas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia. É claro que estamos supondo $r \leq n$ e $k \leq m$.

16. Resolver o exercício anterior no caso $r = 4$, $n = 6$, $k = 3$ e $m = 5$.

17. Encontrar a função geradora exponencial para cada uma das seqüências:

    (a) $(1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$; (b) $(1, 3, 3^2, 3^3, \ldots)$;

    (c) $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots)$.

18. Encontrar a função geradora ordinária para a seqüência:

$$a_k = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k.$$

19. Dispõe-se de um número ilimitado de bolas vermelhas, brancas e verdes. De quantos modos podemos selecionar n bolas sendo que cada seleção deve conter um número par de bolas verdes?

20. Quantas são as r-seqüências quaternárias nas quais o número de 0's é par e o número de 1's também é par?

21. De quantas maneiras podemos distribuir 300 cadeiras idênticas em 4 salas de modo que o número de cadeiras em cada sala seja 20 ou 40 ou 60 ou 80 ou 100?

22. Encontrar a função geradora ordinária para o número de partições de n em que todas as partes são ímpares e nenhuma supera 7.

23. Encontrar o número de r-seqüências ternárias (os componentes são formados somente por 0, 1 e 2) nas quais o número de 0's é par.

24. Dar uma interpretação, em termos de partições, para:

   (a) O coeficiente de x^{12} na expansão de

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})(1 + x^4 + x^8 + x^{12})(1 + x^6 + x^{12})$$
$$(1 + x^8)(1 + x^{10})(1 + x^{12}).$$

   (b) O coeficiente de x^{15} na expansão de

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15})(1 + x^6 + x^{12})(1 + x^9).$$

25. Calcular os coeficientes dos itens (a) e (b) do exercício anterior.

26. Escrever a função geradora que pode ser usada para se encontrar:

   (a) O número de partições de 34 com partes restritas a 6, 8, 10 e 20.

   (b) O número de partições de 13 com partes maiores do que 3.

   (c) O número de partições de 11 em partes ímpares distintas.