Recapitulando

Uma relação de recorrência para uma sequência de números é uma equação que expressa um elemento da sequência em termos dos elementos anteriores. Analisamos as relações de recorrência de primeira ordem da forma $a_n = sa_{n-1} + t$ e as relações de recorrência de segunda ordem da forma $a_n = s_1a_{n-1} + s_2a_{n-2}$:

- A recorrência $a_n = sa_{n-1} + t$ apresenta a seguinte solução: se $s \neq 1$, então $a_n = c_1s^t + c_2$, onde c_1, c_2 são números específicos.
- A solução para a recorrência $a_n = s_1a_{n-1} + s_2a_{n-2}$ depende das raízes r_1, r_2 da equação quadrática $x_2 - s_1x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$, mas, se $r_1 = r_2$, então $a_n = c_1r^n + c_2nr^n$.

Introduzimos o operador de diferença, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. A sequência de números a_n é gerada por uma expressão polinomial de grau d, se e somente se $\Delta^{d+1}a_n$ for nulo para todos os n. Nesse caso, podemos escrever $a_n = a_0\binom{n}{0} + (\Delta a_0)\binom{n}{1} + (\Delta^2 a_0)\binom{n}{2} + \cdots + (\Delta^d a_0)\binom{n}{d}$.

---

22. Exercícios

22.1. Para cada uma das seguintes relações de recorrência, calcule os primeiros seis termos da sequência (ou seja, de a_0 a a_5). Não é necessário encontrar a fórmula para a_n.

a. $a_n = 2a_{n-1} + 2,\ a_0 = 1$
b. $a_n = a_{n-1} + 3,\ a_0 = 5$
c. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$
d. $a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2},\ a_0 = 0,\ a_2 = 0$
e. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1,\ a_0 = a_1 = 1$
f. $a_n = a_{n-1} + n,\ a_0 = 1$

22.2. Resolva cada uma das seguintes relações de recorrência fornecendo uma fórmula explícita para a_n. Para cada uma, calcule a_9.

a. $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1},\ a_0 = 4$
b. $a_n = 10a_{n-1},\ a_0 = 3$
c. $a_n = -a_{n-1},\ a_0 = 5$
d. $a_n = 1{,}2a_{n-1},\ a_0 = 0$
e. $a_n = 3a_{n-1} - 1,\ a_0 = 10$
f. $a_n = 4 - 2a_{n-1},\ a_0 = 0$
g. $a_n = a_{n-1} + 3,\ a_0 = 0$
h. $a_n = 2a_{n-1} + 2,\ a_0 = 0$
i. $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2},\ a_0 = 1,\ a_1 = 4$
j. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2},\ a_0 = 4,\ a_1 = 4$
k. $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2},\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$
l. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2},\ a_0 = 3,\ a_3 = 6$
m. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},\ a_0 = 5,\ a_1 = 1$
n. $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2},\ a_0 = 5,\ a_1 = 1$
o. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_n,\ a_0 = 3,\ a_1 = 3$
p. $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2},\ a_0 = 2,\ a_1 = 3$

22.3. Cada uma das seguintes sentenças é gerada por uma expressão polinomial. Para cada uma delas, encontre a expressão polinomial que fornece a_n.

a. 1, 6, 17, 34, 57, 86, 121, 162, 209, 262,...

b. 6, 5, 6, 9, 14, 21, 30, 41, 54, 69, ...

c. 4, 4, 10, 28, 64, 124, 214, 340, 508, 724,...

d. 5, 16, 41, 116, 301, 680, 1361, 2476, 4181, 6656,...

22.4. Explique por que a notação Δa_n tem parênteses implicitamente $(\Delta a)_n$ e por que $\Delta(a_n)$ está incorreto.

22.5. Seja k um inteiro positivo e seja $a_n = \binom{n}{k}$. Prove que $a_0 = \Delta a_0 = \Delta^2 a_0 = \ldots = \Delta^{k-1} a_0 = 0$ e que $\Delta^k a_0 = 1$

22.6. Suponhamos que a sequência a satisfaça a recorrência $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ e que $a_0 = 6$ e $a_5 = 4877$. Encontre uma expressão para a_n.

22.7. Encontre uma fórmula polinomial para $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

22.8. Seja t um inteiro positivo. Prove que $1^t + 2^t + 3^t + \ldots + n^t$ pode ser escrito como uma expressão polinomial.

22.9. Alguns dos chamados testes de inteligência frequentemente incluem problemas em que uma série de números é apresentada e o indivíduo é solicitado a encontrar o próximo termo da sequência. Por exemplo, a sequência poderia começar com 1, 2, 4, 8. Não restam dúvidas de que o examinador está esperando por 16 como o próximo termo.

Demonstre como "superar" o teste de inteligência encontrando uma expressão polinomial (de 3º grau) para a_n, de forma que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, mas $a_4 = 15$.

22.10. Seja s um número real com $s \neq 0$. Encontre uma sequência a, de modo que $a_n = s\Delta a_n$ e $a_0 = 1$.

22.11. Resolva a equação $\Delta^2 a_n = -a_n$, com $a_0 = a_1 = 2$

22.12. Encontre duas sequências diferentes a e b para as quais $\Delta a_n = \Delta b_n$ para todos os n.

22.13. As relações de recorrência de segunda ordem que resolvemos são da forma $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$. Nesse problema, estendemos isso para relações da forma $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2} + t$. Tipicamente (mas não sempre), a solução para esse tipo de relação é da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3$, em que c_1, c_2, c_3 são números específicos e r_1, r_2 são raízes da equação quadrática associada $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$. Entretanto, se uma dessas raízes for 1, ou se as raízes forem iguais umas às outras, é necessária outra forma de solução.

Resolva as seguintes relações de recorrência. Nos casos em que a forma-padrão não se aplica, tente desenvolver uma forma alternativa apropriada, mas, caso não encontre a solução, consulte as Dicas (Apêndice A).

a. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

b. $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

c. $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 6$, $a_0 = a_1 = 4$

d. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$, $a_0 = a_1 = 3$

e. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 4$

f. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 2$

22.14. Faça uma inferência a partir dos Teoremas 22.5 e 22.9 para solucionar as relações de recorrência de terceiro grau a seguir:

a. $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3} + a_0 = 8$, $a_1 = 3$ e $a_2 = 27$