22.2. Prove que o conjunto das soluções de uma equação do tipo $x_{k+1} = a_k x_k + b_k$ (linear, de primeira ordem, homogênea ou não, com coeficientes variáveis) é uma variedade afim de dimensão 1 em $\mathbb{R}^\infty$. Em que condições é um subespaço vetorial?

22.3. Uma solução do sistema

$$x_{k+1} = a_k x_k + b_k y_k + p_k$$

$$y_{k+1} = c_k x_k + d_k y_k + q_k$$

pode ser considerada como um par (s, t) de seqüências

$$s = (x_0, \dots, x_k, \dots),$$

$$t = (y_0, \dots, y_k, \dots),$$

portanto um elemento de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$. Prove que o conjunto S dessas soluções é uma variedade afim de dimensão 2 no espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$. Em que condições S é um subespaço vetorial?

22.4. Para cada um dos sistemas abaixo, determine a solução $(v_0, \dots, v_k, \dots)$, $v_k = (x_k, y_k)$, que tem o valor inicial $v_0 = (x_0, y_0)$ indicado.

$$x_{k+1} = 2x_k + 9y_k$$

$$x_{k+1} = 3x_k + 16y_k$$

$$x_{k+1} = x_k + 3y_k$$

$$y_{k+1} = x_k + 2y_k$$

$$y_{k+1} = -4x_k - 13y_k$$

$$y_{k+1} = -2x_k + y_k$$

$$(x_0, y_0) = (3, -2)$$

$$(x_0, y_0) = (3, 2)$$

$$(x_0, y_0) = (-2, 3)$$

22.5. Seja $v_k = (x_k, y_k)$ uma solução do sistema

$$x_{k+1} = 2x_k - y_k$$

$$y_{k+1} = 4x_k - 2y_k.$$

Prove que, seja qual for o vetor inicial $v_0 = (x_0, y_0)$, tem-se $x_k = y_k = 0$ para todo $k \geq 2$.

22.6. Sejam λ e μ as raízes características (reais ou complexas) do operador $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Suponha que $|\lambda| < 1$ e $|\mu| < 1$. Seja qual for o valor inicial $v_0 = (x_0, y_0)$, prove que a solução $v_k = (x_k, y_k)$ do sistema $v_{k+1} = Av_k$ cumpre $\lim x_k = 0$, $\lim y_k = 0$.

22.7. Sejam $r = (x_0, \dots, x_k, \dots)$ e $s = (y_0, \dots, y_k, \dots)$ soluções da equação $z_{k+2} + az_{k+1} + bz_k = 0$. Assinale V(verdadeiro) ou F(falso):

() Se r e s são L.I. então, para quaisquer índices $k \neq \ell$, os vetores $u = (x_k, x_\ell)$ e $v = (y_k, y_\ell)$ são L.I.

() Se existirem $k \neq \ell$ tais que os vetores $u = (x_k, x_\ell)$ e $v = (y_k, y_\ell)$ são L.I. então as soluções r e s são L.I.

() Se, para todo $k \geq 0$, os vetores $u = (x_k, x_{k+1})$ e $v = (y_k, y_{k+1})$ forem L.D. então r e s são L.D.

() Se r e s são L.D. então $u = (x_k, x_\ell)$ e $v = (y_k, y_\ell)$ são L.D., sejam quais forem k e ℓ .

22.8. Sejam $r = (x_0, \dots, x_k, \dots)$, $s = (y_0, \dots, y_k, \dots)$ e $t = (z_0, \dots, z_k, \dots)$ soluções da equação $w_{k+3} + aw_{k+2} + bw_{k+1} + c_k w_k = 0$. Prove:

(a) Se existirem $k < \ell < m$ tais que os vetores $v = (x_k, x_\ell, x_m)$, $v' = (y_k, y_\ell, y_m)$ e $v'' = (z_k, z_\ell, z_m)$ são L.I. então as seqüências r , s e t são L.I..

(b) Se r , s e t são L.I. então existe $k \geq 0$ tal que os vetores

$$v = (x_k, x_{k+1}, x_{k+2}), \quad v' = (y_k, y_{k+1}, y_{k+2}) \quad \text{e} \quad v'' = (z_k, z_{k+1}, z_{k+2})$$

são L.I..

22.9. Prove que as seqüências $r = (1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots)$, $s = (1, 2, 3, 1, 0, 0, \dots)$ e $t = (1, 0, 0, 3, 0, 0, \dots)$ não podem ser soluções da mesma equação $x_{k+3} + ax_{k+2} + bx_{k+1} + cx_k = 0$. [Sugestão: item (b) do exercício anterior.]

22.10. Seja $E: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ o operador linear definido por

$$E(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, \dots).$$

Prove que um subespaço vetorial $S \subset \mathbb{R}^\infty$ é o conjunto das soluções de uma equação linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes,

$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \dots + a_n x_k = 0,$$

se, e somente se, cumpre as condições seguintes:

- (1) S é invariante por E ;
 (2) S tem dimensão finita, igual a n .

22.11. O método apresentado em 22.B para calcular as potências A^k mediante o uso do Teorema de Cayley-Hamilton dá fórmulas explícitas para essas potências como combinações lineares de $I, A, \dots, A^{n-1}$, mas faz uso das raízes características do operador A , que são facilmente calculáveis em dimensão 2 porém difíceis de obter em dimensões superiores. Caso se deseje, não a fórmula geral para A^k , mas apenas o cálculo explícito de uma dessas potências, como A^{10} por exemplo, a alternativa seguinte utiliza apenas o cálculo do polinômio característico $p_A(\lambda)$, o que é bem mais factível: Usa-se o algoritmo da divisão para escrever $\lambda^k = p_A(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda)$, onde o grau do resto $r(\lambda)$ é menor do que a dimensão do espaço E . Tem-se então $A^k = r(A)$. Usando este método, mostre que, dado o operador $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $A(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 3x + y + 2z, x - y + z)$, tem-se $A^5 = 40A^2 + 19A - 143 \cdot I$ e $A^{10} = 14281 \cdot A^2 + 2246 \cdot A - 49071 \cdot I$.

22.12. Para cada uma das equações abaixo, determine a solução que tem os valores iniciais indicados.

- (a) $x_{k+2} = x_{k+1} + 20x_k, x_0 = -3, x_1 = 2$.
 (b) $\frac{1}{5}x_{k+2} = 2x_{k+1} - 5x_k, x_0 = 2, x_1 = -1$.
 (c) $x_{k+2} - 6x_{k+1} + 25x_k = 0, x_0 = 1, x_2 = 3$.

22.13. A seqüência de Fibonacci $(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ é definida pelas condições $x_0 = 0, x_1 = 1$ e $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$. Obtenha a fórmula geral para x_k em função de k , prove que $x_{k+2} = 1 + x_1 + \dots + x_k$ e que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{o número de ouro}).$$

22.14. Qual a fórmula que exprime x_k em função de x_0, x_1 e k , sabendo-se que

$$x_{k+2} = \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k)$$

para todo $k \geq 0$?

22.15. Resolva a equação $x_{k+3} - 6x_{k+2} + 11x_{k+1} - 6x_k = 0$.

22.16. Ache a solução $v_k = (x_k, y_k)$ do sistema

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha(x_k - y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \beta(x_k - y_k),\end{aligned}$$

com vetor inicial $v_0 = (x_0, y_0)$, com $y_0 < x_0$, $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$. Mostre que $\lim x_k = \lim y_k = (\beta x_0 + \alpha y_0)/(\alpha + \beta)$, logo este limite está mais próximo de x_0 do que de y_0 se, e somente se, $\alpha < \beta$. Mostre que se tem $x_k < y_k$ para todo k se, e somente se, $\alpha + \beta < 1$, em cujo caso a seqüência (x_k) é decrescente e (y_k) é crescente.

[**Observação:** este sistema é um modelo para uma situação simples de barganha. Cada x_k é o preço do vendedor e y_k é a proposta do comprador. Em cada etapa, o vendedor oferece um desconto proporcional à diferença de preços na etapa anterior e o comprador, por sua vez, aumenta sua proposta de modo análogo. Se a soma $\alpha + \beta$, da constante do vendedor com a do comprador, for maior do que 1, já na primeira etapa tem-se $x_1 < y_1$, o que daria o chamado “negócio de pai para filho”...]

22.17. Seja $x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = 0$ uma equação cujas raízes características são os complexos conjugados r e $\bar{r}$. Escreva $r = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ como $x_k = \alpha \rho^k \cos(\beta + k\theta)$, onde as constantes α e β podem ser determinadas de modo a fazer com que x_0 e x_1 assumam os valores iniciais pré-estabelecidos. [Sugestão: a equação dada admite a solução geral complexa $x_k = \zeta r^k + \eta \bar{r}^k$, onde $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$ são arbitrários. Tomando $\eta = \bar{\zeta}$, obtém-se a solução real $x_k = 2 \operatorname{Re}(\zeta r^k)$. Escreva $\zeta = \frac{\alpha}{2}(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ e use a fórmula $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$.]

22.18. Dada a equação $x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = c^k$, onde c não é raiz característica, prove que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_k = M \cdot c^k$ é uma solução particular. Se c é uma raiz característica diferente de $-a/2$, prove que existe N tal que $x_k = N k c^k$ é uma solução particular. E se $c = -a/2$ é raiz característica prove que existe P tal que $x_k = P k^2 c^k$ é uma solução particular.

22.19. Se $v_{k+1} = \alpha v_k + w_k$, onde $|\alpha| < 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$, prove que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$$

22.20. Seja $A: E \rightarrow E$ um operador linear cujos autovalores cumprem $|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_n| < 1$. Prove que, para todo $v \in E$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = 0$. [Sugestão: Tome uma base $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ na qual a matriz de A seja diagonal superior. Observe que $Au_i = w + \lambda_i u_i$, onde $w \in S(u_1, \dots, u_{i-1})$ se $i > 1$ e $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Logo $A^{k+1} u_i = A^k w + \lambda_i A^k u_i$. Ponha $v_k = A^k u_i$, $w_k = A^k w$, $\alpha = \lambda_i$ e tenha $v_{k+1} = \alpha v_k + w_k$. Use indução em i e o exercício anterior para concluir que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k u_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), e daí $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = 0$ para todo $v \in E$.]