

# Régua e Compasso na Geometria Hiperbólica

JONES COLOMBO<sup>1</sup>  
DIOGO DANTAS DE SOUSA<sup>2</sup>

11 de maio de 2019

<sup>1</sup>[www.professores.uff.br/jcolombo](http://www.professores.uff.br/jcolombo)

<sup>2</sup>[diogo.sousa@cefet-rj.br](mailto:diogo.sousa@cefet-rj.br)



O primeiro autor dedica à memória do professor  
Genésio Lima dos Reis e o segundo ao CEFET-RJ e à  
Daniele Cristiane dos Santos Costa.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Construções na Geometria Euclidiana</b>	<b>7</b>
1.1	Construções Euclidianas Uteis . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Construções na Geometria Hiperbólica</b>	<b>11</b>
2.1	Disco de Poincaré . . . . .	12
2.2	Primeiras Construções . . . . .	12
2.3	+ Construções . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Problemas na Geometria Hiperbólica</b>	<b>19</b>
3.1	Quadrilátero de Saccheri e o quadrilátero de Lambert . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Números Complexos e a Geometria Hiperbólica</b>	<b>27</b>
4.1	Projeção Esferográfica e o Plano Extendido $\hat{\mathbb{C}}$ . . . . .	27
4.2	Grupo de Möbius . . . . .	28
4.3	Razão Cruzada . . . . .	30
4.4	Simetria . . . . .	32
4.5	Conclusão . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Ladrilhamento do Plano Hiperbólico</b>	<b>35</b>
5.1	Ladrilhamento . . . . .	36
5.2	Construção do ladrilhamento por triângulos $p, q$ e $2$ . . . . .	38



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu colega de sala, na UFF, Thiago Fassarela, pela oportunidade de discutir as conexões entre a geometria hiperbólica e outras áreas da matemática e a Adriele Neves Roberto pela paciência na confecção dos modelos em crochê.



# Introdução

*“The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.”*

– David Hilbert, retirado de *Constance Reid*

Quase todos conhecem bem a primeira parte da saga da Geometria hiperbólica - com Bolay e Lobachevsky trabalhando em vão para ganhar reconhecimento sobre suas descobertas a respeito da Geometria Hiperbólica.

A segunda parte - que não é tão bem difundida - começou com Beltrami vindo ao resgate da geometria hiperbólica em 1868, interpretando-a sobre uma superfície de curvatura constante negativa. Ao dar um significado concreto ao plano hiperbólico, ele, mostrou que a geometria hiperbólica era tão consistente como a geometria euclídiana, desta maneira, colocou o trabalho de Bolay e Lobachevsky sobre um sólido fundamento lógico. Os resultados de Beltrami foram rapidamente seguidos por interpretações em geometria projetiva por Klein em 1871, e nos números complexos por Poincaré em 1882.

A geometria hiperbólica havia chegado, e com Poincaré se tornou parte da matemática contemporânea. Ele a usou imediatamente em equações diferenciais, análise complexa e teoria dos números, e seu lugar tem sido assegurado nestas disciplinas desde então. Ele também começou a usá-la em topologia de dimensão pequena, estas idéias foram mantidas vivas por um punhado de topólogos até o florescimento espetacular deste campo sob Thurston ([7]) no final dos anos 1970. Agora, a geometria hiperbólica é a principal geometria nas dimensões 2 e 3.

Em geral, quando se fala em Geometria Hiperbólica sempre esperamos uma abordagem analítica (com coordenadas, estilo [4]) ou sintética (sem coordenadas, estilo [1]), uma abordagem utilizando régua e compasso tem um ar de novidade.

Esta oficina segue o seguinte plano: No capítulo 1 exibimos certas construções (fundamentadas na Geometria Euclídiana), depois mostramos como elas podem ser automatizadas em algum software de geometria dinâmica (utilizaremos o Geogebra). No Capítulo 2 apresentamos o ambiente da geometria hiperbólica e utilizando as construções do capítulo 1 criamos as técnicas básicas para construir os objetos da geometria hiperbólica. Ao final deste capítulo examinamos certas propriedades comparando a geometria euclídiana com a geometria hiperbólica, c

No capítulo 3 tratamos de alguns problemas da geometria hiperbólica desde o ponto de vista da geometria sintética. O capítulo 4 esta para mostrar qual é o

grupo associado a esta geometria e graças a um invariante deste grupo justificamos a função distância entre dois pontos na geometria hiperbólica. Neste material não tratamos do conceito de área e nem da trigonometria hiperbólica. O capítulo 5 mostramos um processo para ladrilhar o plano hiperbólico. O ladrilhamento tem conexão com o estudo da equação diferencial hipergeométrica que desemboca, entre outras coisas, nas funções elípticas.

O espírito do texto é tentar apresentar uma visão alternativa para o que é a geometria, por isso vamos a primeira pergunta.

## O que é a Geometria?

Quem conhece com certa profundidade a área de estudo da geometria, sabe que existe uma pretensão megalomaníaca embutida na pergunta. Portanto, creio que não há como discutir (em um texto deste tamanho) com o mínimo de honestidade, as diversas facetas deste assunto. Por isso, vou apresentar uma visão do que pode ser entendido por geometria. Acreditamos desta maneira que no mínimo vamos enriquecer o ponto de vista do leitor.

É normal ao mencionar a palavra geometria para qualquer pessoa que possui um pouco de educação formal que ela se lembre dos triângulos e do teorema de Pitágoras. Ao pensar nos triângulos a pessoa logo se lembra dos famosos casos de congruência de triângulos, não vamos entrar nos detalhes dos casos de congruência, gostaria apenas de recordar algo bem mais elementar, que bons professores devem transmitir aos seus alunos, dois triângulos são congruentes se podemos mover um dos triângulos e colocar ele sobre o outro, no caso que eles coincidem dizemos que eles são congruentes. Cabe ao professor explicar quais são as operações permitidas para se realizar este movimento. Podemos definir os movimentos como operações (transformações) que não mudam a distância entre dois pontos da figura. Nesta definição sobre movimento fica evidente que o conceito de distância entre dois pontos é algo muito importante em geometria, mais abaixo vou tentar relativizar esta importância.

Podemos tentar entender melhor como funcionam os movimentos, qualquer exercício com figuras geométricas recordas em uma cartolina, pode nos ensinar que os movimentos podem ser decomposto em três famílias que são: translações, rotações e reflexões em torno de uma reta, faz parte do trabalho do professor mostrar que as reflexões alteram o sentido das figuras e, por fim, que tanto as rotações como as translações podem ser obtidas como um número par de reflexões. Desta forma o conceito de reflexão se torna o mais distinguido dos movimentos.

Uma definição inicial de geometria poderia ser que geometria é o estudo das propriedades das figuras que não mudam ao serem movido. O objetivo é tornar esta afirmação mais precisa. Mas antes vamos analisar melhor a ideia a respeito de distância entre dois pontos.

Ao pensarmos a respeito dos resultados de geometria elementar, vemos que o conceito de distância aparece com pouca frequência, por exemplo existem todos

aqueles resultados envolvendo retas paralelas e retas perpendiculares, tais como: "se duas retas paralelas são cortadas por uma terceira reta os ângulos correspondentes são iguais" ou "por todo ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular a reta dada" o mesmo continua acontecendo mesmo quando envolve o círculo, por exemplo, "por três pontos que não se encontram sobre uma reta passa um e apenas um círculo". Bom você pode falar nenhum destes resultados envolve o conceito de distância. Mas mesmo naqueles conceitos que envolvem o conceito de distância entre dois pontos, como por exemplo "a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em partes iguais" a ideia de distância não assume nenhuma proeminência, pois podemos comparar dois segmentos sem necessariamente medi-los. Então você pode falar - mas e o teorema de Pitágoras?! Você pode estar sentindo um momento de triunfo, mas vou lhe mostrar que não é bem assim, por enunciar ele de outra forma: Seja  $ABC$  um triângulo, cujo o lado oposto ao vértice  $A$ ,  $B$  e  $C$  tem comprimento  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente. Além disso, seja  $l = b/c$  e  $k = c/a$ . O ângulo  $\hat{A}$  é reto se, e somente se,  $l^2 + k^2 = 1$ .

Não é difícil de entender o princípio por trás disso, que é: *Os fatos geométricos que envolvem comprimento não devem ser obscurecidos pela unidade de comprimento utilizada para medi-los*, por exemplos não devemos nos preocupar se a medida foi feita em centímetros, metros ou jardas, pois o teorema continua funcionando. De fato podemos expressar todos os resultados geométricos somente usando a razão entre as medidas envolvidas. Vemos desta maneira que o conceito de distância entre dois pontos, que possui tal proeminência na nossa definição, de fato, deve ser corrigida ao expressarmos os fatos geométricos. Esta característica já tinha sido notada por Felix Klein, o qual deu a seguinte definição para a nossa pergunta inicial. **A geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas que não mudam por aplicar transformações de similitude.** Uma transformação de similitude pode ser definida por aquela transformação que não mudam a razão entre a distância entre dois pares de pontos.

A definição de Klein nos conta, que a geometria não se preocupa somente com a congruência entre as figuras, mas ela se preocupa antes disso com a similitude entre as figuras. Não é por outro motivo, que o professor diz para os alunos que a turma devem tentar reproduzir em seus cadernos o mais cuidadosamente possível as figuras que ele faz no quadro-negro, é claro que as figuras no quadro-negro são muito maiores que as do caderno.

Já temos uma definição mais precisa do que entendemos pelo conceito de geometria. Fica claro que precisamos entender melhor quais são os movimentos que as figuras geométricas podem sofrer. Se desprende desta definição que se for possível alterar os movimentos permitido sobre as figuras a geometria deve se alterar. Faz parte do objetivo deste material explicar o que pode acontecer com a geometria quando alteramos o conjunto de operações.

## Reflexão e Inversão

A primeira conceito que precisamos ter em mente é o conceito de reflexão, vamos iniciar com a reflexão em torno de uma reta. Uma reflexão em torno de uma reta  $\ell$  é uma aplicação do plano no plano, que pega um ponto  $A$  e leva em  $A'$  de tal forma que a reta  $\ell$  se torna a mediatriz do segmento  $AA'$  (veja figura 1). Uma outra aplicação é a inversão na circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$ . A inversão é uma aplicação que para cada ponto  $A$  associa um ponto  $A'$ , com a seguinte propriedade: O segmento  $AA'$  esta sobre o raio  $OA$  da circunferência e  $OA \times OA' = r^2$  (veja figura 1).

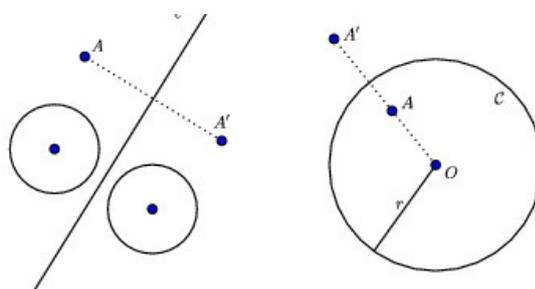


Figura 1: Reflexão em torno da reta  $\ell$  e inversão em  $C$

**Observação 0.1.** *Os seguintes fatos devem ser observados utilizando o Geogebra.*

1. *Perceber que na inversão o lugar geométrico invariante por este tipo de aplicação são os círculos;*
2. *Retas fora do círculo de inversão são levadas, pelas inversões, em círculos que passam pelo centro.*
3. *Ângulos entre círculos são preservados por inversão;*
4. *Fora o círculo todas as outras quadráticas são deformadas pelas inversões.*



intercessão de  $\ell$  com  $OB$ . Então  $A$  é o inverso de  $B$  com respeito a  $\mathcal{C}$ . De fato, observando o triângulo  $OBP$  e o triângulo  $OAP$ , vemos que ambos são semelhantes, uma vez que compartilham o ângulo  $B\hat{O}P$ . Pela semelhança temos que

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow OA \cdot OB = OP^2, \text{ mas } OP = r.$$

Se queremos inverter um ponto  $A$  que esta no interior da circunferência (diferente que o  $O$ ), basta reverter esta construção. Neste caso  $A$  esta no exterior da circunferência. Considere o ponto médio  $M$  do segmento  $AO$ . Trace a circunferência com centro  $M$  e raio  $OM$ . Seja  $P$  um dos pontos de intercessão desta circunferência com a circunferência inicial. Considere  $\ell'$  a perpendicular ao segmento  $OA$  passando por  $P$ . Então o ponto  $B$  será determinado pela intercessão da semi reta  $OA$  com  $\ell'$ . ■

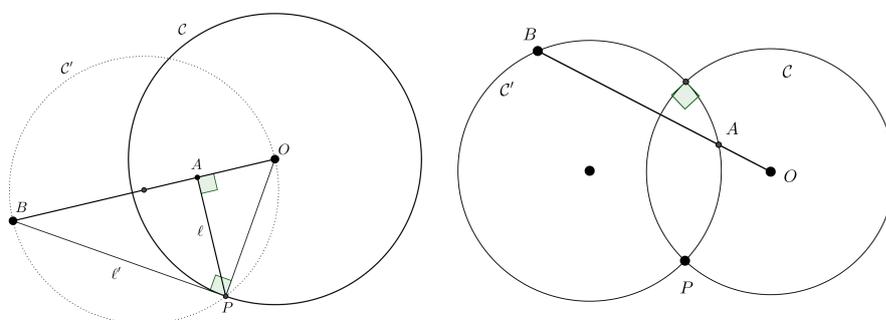


Figura 1.1: Construções 1.1 e 1.2

Existe um método mais rápido se tivermos uma condição adicional.

**Construção 1.3.** *Dado um par de circunferências ortogonais  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  com centro  $O, O'$ , respectivamente, e  $A$  um ponto sobre  $\mathcal{C}'$ , construa o inverso de  $A$  com respeito a  $\mathcal{C}$ .*

Simplesmente construa a semi reta  $OA$ , como na imagem a direita da figura 1.1; um dos pontos de interseção da semi reta  $OA$  com  $\mathcal{C}'$  é o  $A$ ; o outro,  $B$ , será o inverso de  $A$  com respeito a  $\mathcal{C}$ . Para vermos isso, veja a imagem a esquerda da figura 1.2, marque o ponto  $P$  interseção de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  e trace os segmentos  $OP, PB$  e  $PA$ . Agora veja que os triângulo  $OPA$  e  $OBP$  são semelhantes. ■

Para concluir a semelhança você necessita dos dois seguintes resultados:

**Resultado 1:** Um ângulo  $APB$  inscrito em uma circunferência é metade do ângulo central  $AOB$ .

**Resultado 2:** A medida de um ângulo formado por uma secante e uma tangente  $APB$  é igual a metade do arco correspondente  $POB$  (veja imagem a direita da figura 1.2).

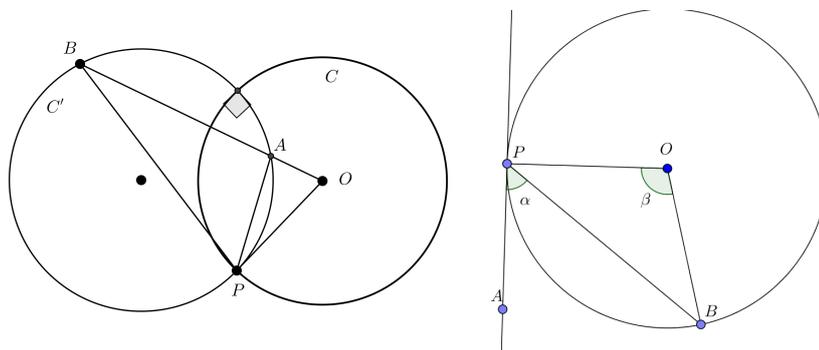


Figura 1.2: Demonstração da construção 1.3

Consequência disso pode ser resumido nos seguintes lemas.

**Lema 1.4.** *Seja  $C, C'$  são circunferências ortogonais e  $A$  é um ponto sobre  $C'$ . Então o inverso de  $A$  com respeito a  $C$  esta sobre  $C'$ . Similarmente, se  $A$  e  $B$  são inversos com respeito a  $C$ , estão sobre uma circunferência  $C'$ , então  $C$  e  $C'$  são ortogonais.*

**Lema 1.5.** *Seja  $C$  uma circunferência com centro  $O$ . Seja  $A$  um ponto diferente de  $O$ . Então o lugar geométrico de todos os centros das circunferências passando por  $A$  e ortogonais a  $C$  é uma reta. Se  $A$  esta no interior (sobre, no exterior de) de  $C$  esta linha esta no exterior (tangente a, exterior) de  $C$ . Além disso, qualquer linha no exterior, ou tangente a  $C$  é tal lugar geométrico.*

**Demonstração:** Como já vimos toda a circunferência que passa por  $A$  e é ortogonal a  $C$  passa também sobre o inverso  $B$  de  $A$ . Então o lugar geométrico dos centros destas circunferências deve ser a mediatriz do segmento  $AB$ , os quais estão no exterior de  $C$ . Reciprocamente, qualquer circunferência sobre a mediatriz passando pelos pontos  $A$  e  $B$  deve ser ortogonal a  $C$  isso segue do lema anterior.

Se  $A$  esta sobre  $C$ , então este lugar geométrico deve ser uma linha tangente a  $C$  por  $A$ .

Também é simples mostrar que qualquer linha no exterior de, ou tangente a  $C$ , é um tal lugar geométrico. ■

**Construção 1.6.** *Dado uma circunferência  $C$  com centro  $O$ , e um ponto  $A$  no exterior de  $C$ , construa  $C'$  com centro  $A$ , ortogonal a  $C$ , observe que ela é única.*

Seja  $C''$  uma circunferência com centro nos pontos médios do segmento  $AO$  e passa sobre  $A$  e  $O$ , veja a figura à direita da figura 1.3; Seja  $P$  um dos pontos de interseção das circunferência  $C$  e  $C''$ . Então a circunferência desejada tem centro  $A$  e passa sobre  $P$ . ■

No lema 1.4 e construção 1.6 estabelecemos um fato muito importante: com respeito à circunferência  $C$  dada, as circunferências ortogonais  $C'$  estão em correspondência com pontos no exterior de  $C$  (o centro de  $C'$ , são chamados seus polos)

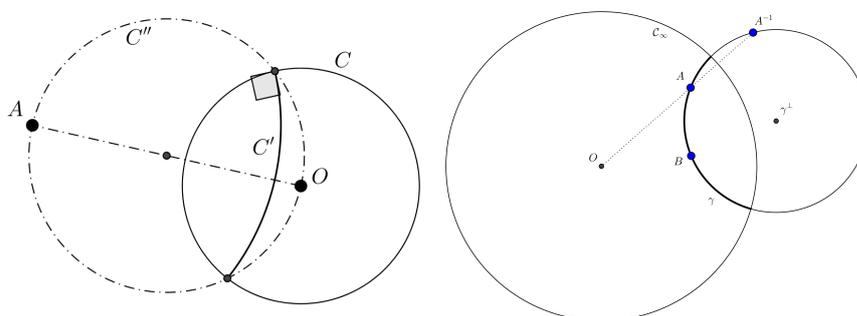


Figura 1.3: Construções 1.6 e Construção 2.1

e cada ponto no interior de  $\mathcal{C}$  corresponde a uma reta (chamada de polares) no exterior de  $\mathcal{C}$ .

Fixando a circunferência  $\mathcal{C}$ , denote o polo da circunferência  $\gamma$  por  $\gamma^\perp$ ; reciprocamente, cada ponto  $B$  no exterior de  $\mathcal{C}$  é um polo de alguma circunferência, denotada por  $B^\perp$ , como ilustrado na figura 1.4. Denote o polar de cada ponto  $A$  no interior de  $\mathcal{C}$  por  $A^\perp$ ; reciprocamente, cada reta  $\ell$  que não intercepta  $\mathcal{C}$  é o polar de algum ponto, denotado por  $\ell^\perp$ .

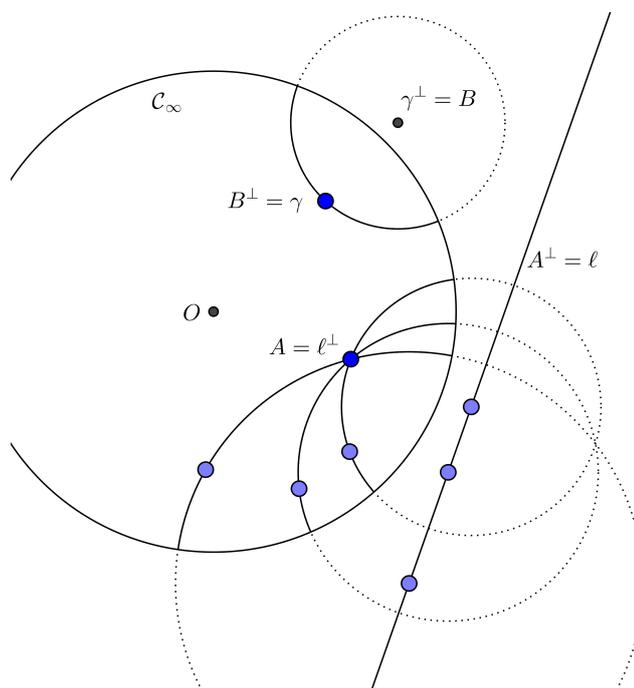


Figura 1.4: Polos e Polares

## Capítulo 2

# Construções na Geometria Hiperbólica

*“Sometimes it happens that a man’s circle of horizon becomes smaller and smaller, and as the radius approaches zero it concentrates on one point. And then that becomes his point of view.”*

– David Hilbert, retirado de Constance Reid

O Espaço hiperbólico é um local onde a geometria (hiperbólica) não-euclidiana pode ser construída. Este espaço deve possuir um atributo incomum que é: à medida que você se afasta de um ponto, o espaço ao seu redor expande exponencialmente. Por muito tempo era quase impossível criar modelos físicos precisos deste espaço usando qualquer um dos materiais disponíveis. Mas em 1997 a matemática Daina Taimina da universidade de Cornell inventou um modelo usando o crochê! Depois disso, todos começaram a ver a geometria hiperbólica em diversos locais - folhas de alface, corais, etc. Quem estiver interessado veja o site <http://www.theiff.org/main.html> do Institute for Figuring.



Figura 2.1: Modelo do Espaço Hiperbólico por Daina Taimina

## 2.1 Disco de Poincaré

Neste capítulo vamos levar a cabo algumas construções utilizando régua e compasso na geometria hiperbólica. Vamos considerar o ambiente como sendo o disco de Poincaré.

Considere um disco (sem borda) centrado na origem de raio 1. Sempre nos referimos a borda deste disco como  $\mathcal{C}_\infty$  e seu centro por  $O$ . O disco aberto vamos chamá-lo de  $\mathbb{D}$ . Quando nos referir ao inverso, a menos de claro aviso, significa o inverso com respeito a  $\mathcal{C}_\infty$ ;  $X^\perp$  significa o polar, polo, etc, de algum objeto  $X$  com respeito a  $\mathcal{C}_\infty$ , no sentido do capítulo anterior.

$\mathbb{D}$  é conhecido como Disco de Poincaré e será o nosso plano hiperbólico. Os pontos desta região são os pontos do plano hiperbólico, até aqui sem muitas novidades. As retas hiperbólicas são os arcos de circunferências ortogonais à  $\mathcal{C}_\infty$  ou diâmetros de  $\mathcal{C}_\infty$ .

Desde o ponto de vista da geometria sintética a geometria hiperbólica satisfaz os axiomas de incidência, axiomas de ordem, axiomas de congruência; axiomas de continuidade só precisando alterar os axiomas das paralelas pelo seguinte: Dados uma reta e um ponto fora da mesma, existe um número infinito de retas que contem o dado ponto e não encontram a reta dada.

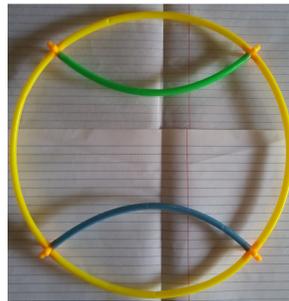


Figura 2.2: Modelo para o espaço hiperbólico

Nós vamos estudar as propriedades geométricas que podem ser obtidas sabendo como são as retas e sabendo que podemos sempre movimentar os objetos utilizando inversões, a partir disso vamos ver quais construções podem ser executadas e quais consequências podemos tirar.

## 2.2 Primeiras Construções

**Construção 2.1.** *Dados pontos  $A$  e  $B \in \mathbb{D}$ , construa a reta hiperbólica  $AB$ . De maneira equivalente, dados dois pontos  $A, B$  e a circunferência  $\mathcal{C}_\infty$  construa a única circunferência passando sobre  $A, B$  e que seja ortogonal a  $\mathcal{C}_\infty$ .*

Invertendo  $A$  (com respeito a  $\mathcal{C}_\infty$ ) obtemos  $A^{-1}$ . A circunferência procurada é obtida por fazer a circunferência que passa pelos pontos  $A, B$  e  $A^{-1}$ . ■

**Construção 2.2.** *Dados pontos  $A$  e  $B \in \mathbb{D}$ , e seus polares  $A^\perp$  e  $B^\perp$  construa a reta hiperbólica  $AB$ .*

Se conhecemos os polares  $A^\perp$  e  $B^\perp$ , obtenha  $P$  o ponto de interseção e faça a circunferência com centro em  $P$  e raio  $PA = PB$  (veja figura 1.1 a direita). ■

Na prática se  $A$  e  $B$  estão relativamente próximos em  $\mathbb{D}$ ,  $A^\perp$  e  $B^\perp$  são quase paralelas e  $P$  pode ser difícil de encontrar. Por sorte, a mediatriz do segmento (euclidiano)  $AB$  também passa em  $P$ , o que permite aumentar a precisão da construção.

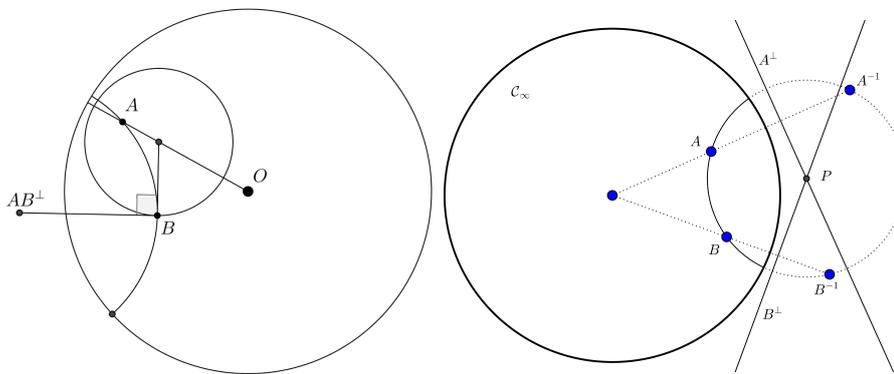


Figura 2.3: Circunferência e Retas Hiperbólicas

**Construção 2.3.** *Dados pontos  $A$  e  $B \in \mathbb{D}$ , construa uma circunferência hiperbólica com centro  $A$  e passando por  $B$ .*

Vamos admitir que sabemos que a curva procurada  $C$  é a única circunferência que é ortogonal a toda geodésica que passa por  $A$ . Em particular,  $C$  deve ser ortogonal a  $OA$ , desde que o mesmo faz parte de um diâmetro de  $C_\infty$ . Além disso,  $C$  também deve ser perpendicular a reta hiperbólica  $AB$ . Então  $C$  deve ser a circunferência (euclidiana) com centro na interseção destas duas linhas e que passa por  $B$ . ■

**Construção 2.4.** *Dados pontos  $A$  e  $B \in \mathbb{D}$ , construa a mediatriz do segmento hiperbólico  $AB$ . Simultaneamente, construa o ponto médio do segmento hiperbólico  $AB$ .*

O procedimento é o mesmo que o realizado no plano euclidiano. Desenhe duas circunferências hiperbólicas  $C_1$  e  $C_2$ , com centro em  $A$  e  $B$ , respectivamente, e passando por  $B$  e  $A$ . Seja  $P, Q$  os pontos de  $C_1 \cap C_2$ . Então a reta hiperbólica  $PQ$  é a mediatriz e o ponto médio de  $AB$  é a interseção de  $PQ$  com  $AB$ . ■

**Construção 2.5.** *Dado o ponto  $A \in \mathbb{D}$  e uma reta hiperbólica  $\gamma$ , construa a reflexão de  $A$  por  $\gamma$ .*

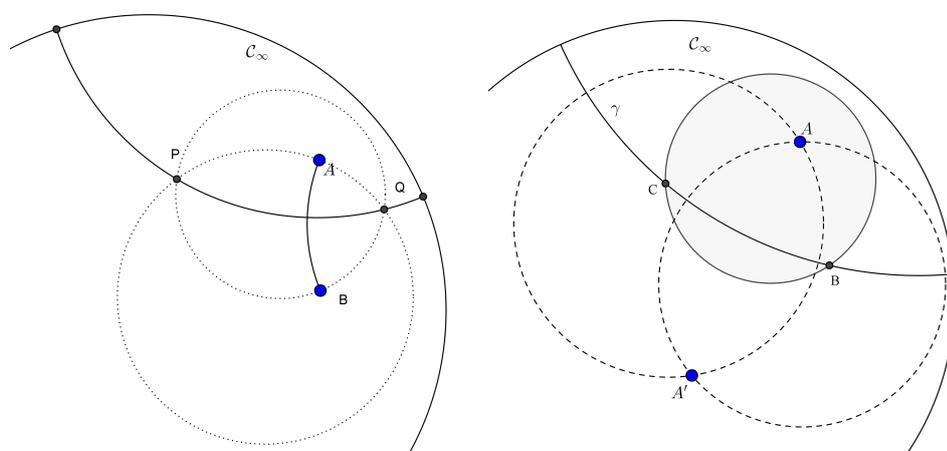


Figura 2.4: Mediatriz Hiperbólica e a Inversão

Imitando a construção no caso euclidiano, construa, veja a imagem a direita da figura 2.4, uma circunferência hiperbólica com centro em  $A$  e com raio suficientemente grande para cortar  $\gamma$  em dois pontos:  $B$  e  $C$ . Construa circunferências hiperbólicas centradas nos pontos  $B$  e  $C$  que passem por  $A$ . O ponto procurado  $A'$  será o outro ponto de interseção dessas duas circunferências. Observe que se traçar o segmento  $AA'$ , obteremos a mediatriz hiperbólica do segmento hiperbólico  $BC$ . ■

Na construção acima é importante observar que o ponto  $A'$  é a inversão de  $A$  através de  $\gamma$ , desta forma os conceitos de inversão em uma circunferência e a reflexão em uma reta hiperbólica se mostram equivalentes. Então ao introduzir uma inversão em uma circunferência não estamos introduzindo um conceito inteiramente novo. Além disso, com esta propriedade em mente, podemos fazer a construção 2.4 da seguinte forma:

Considere que já conhecemos a mediatriz hiperbólica  $\gamma$  de  $AB$ . Então a inversão através de  $\gamma$  permuta  $A$  e  $B$ . Por outro lado,  $\gamma$  deve ser ortogonal a  $C_\infty$ , então a inversão (através de  $\gamma$ ) também deve intercambiar  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$ . Daí  $\gamma^\perp$  esta sobre a interseção  $AB$  e  $A^{-1}B^{-1}$  (veja imagem a esquerda figura 2.5).

**Construção 2.6.** *Sejam  $A, B, C \in \mathbb{D}$ , construa uma circunferência hiperbólica com centro em  $A$  e com raio congruente ao segmento hiperbólico  $BC$ .*

Inicie construindo (veja a imagem a direita da figura 2.5) a mediatriz hiperbólica  $\gamma$  do segmento  $AB$ . Inverta  $C$  através de  $\gamma$  e obtenha  $P$ . A circunferência desejada tem centro  $A$  e passa por  $P$ . ■

**Construção 2.7.** *Sejam  $\gamma$  uma reta hiperbólica,  $A$  um ponto de  $\gamma$  e um ângulo euclidiano  $\alpha$ . Construa uma outra reta hiperbólica que encontra  $\gamma$  em  $A$  formando com esta ângulo  $\alpha$ .*

Veja a figura 2.6. Considere em  $A^\perp$  o ponto  $\gamma^\perp$ . Seja  $\ell$  a reta que passa por

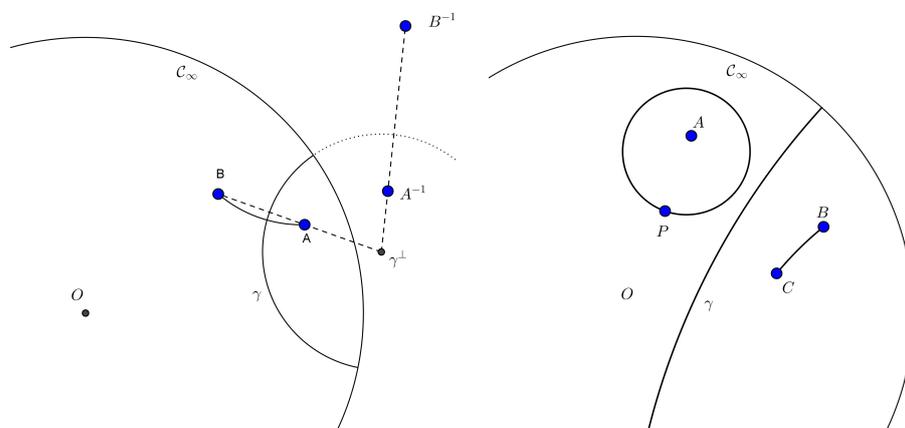


Figura 2.5: Mediatriz Hiperbólica e a Inversão

$A$  e  $\gamma^\perp$ . Marque  $\ell'$  a reta que passa por  $A$  e forma com  $\ell$  o ângulo  $\alpha$ . Seja  $P$  a interseção de  $\ell$  com  $\ell'$ . Afirmação: A reta procurada é dado por  $P^\perp$ . ■

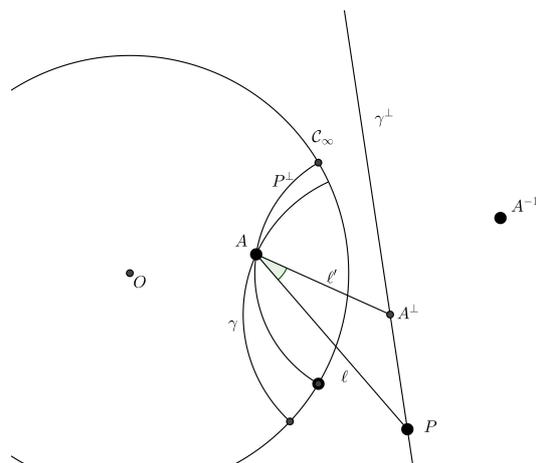


Figura 2.6: Construção do ângulo hiperbólico

Nesta altura introduzimos todos os elementos básicos para o estudo desta geometria, com exceção do conceito de comprimento de um segmento e de área. A forma de medir um segmento e sua justificava esta feito no capítulo 4. O conceito de área não será abordado neste material.

### 2.3 + Construções

As próximas contruções servem ao propósito para explorar algumas das propriedades desta nova geometria. Vamos iniciar esta secção contando um pouco da história e depois propomos uma série de exercícios, que exploram parte desta

história. A história da Geometria Hiperbólica pode ser dividida em 3 partes: I - Precursores, II - Descobridores e III - Fundadores.

A Geometria é uma ciência muito antiga. Conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma que o conhecemos podemos estabelecer como seu ponto de início na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os Elementos (por volta de 300 a.C.).

Pelo tempo de Euclides, o que hoje chamamos de Geometria Euclidiana estava totalmente desenvolvida. De fato, o trabalho de Euclides foi aquele de um compilador que reuniu os teoremas conhecidos, já demonstrado por seus precursores, e os colocou em um único texto com uma única apresentação. A obra de Euclides pretendia apresentar a teoria dos sólidos de Platão e a dos números racionais de Teteto, consideradas duas das grandes contribuições dos gregos à matemática.

Hoje Euclides é mais famoso pela concepção do livro que é considerado o primeiro tratado científico, modelo de todos os outros em qualquer ramo da ciência.

O trabalho consiste em escolher os axiomas e depois demonstrava os resultados (proposições, lemas e teoremas) como consequência destes axiomas.

Os dez axiomas de Euclides foram apresentados em dois grupos: *noções comuns* e os *postulados*. Os primeiros tratam de fatos que qualquer um pode aceitar e os postulados tratam a respeito de propriedades geométricas.

### 1. Noções Comuns

- a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa também são iguais.
- b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- e) O todo é maior do que qualquer uma das suas partes.

### 2. Postulados

- I) Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- II) Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- III) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- IV) Todos os ângulos retos são iguais.
- V) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja a soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja a soma é menor do que dois ângulos retos.

Estes enunciado não coincidem exatamente com aqueles apresentados nos *Elementos*. Fizemos as alterações para que estes representem a forma pela qual Euclides realmente os utilizou nas demonstrações dos teoremas.

Estudos posteriores demonstraram que Euclides fez uso de outras hipóteses não mencionadas nas listas da página anterior. Entre estes podemos destacar os seguintes:

- a) Retas são conjuntos ilimitados.
- b) Vale o axioma de Pasch: Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares e seja  $m$  uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se  $m$  corta o segmento  $AB$ , então ela corta também o segmento  $AC$  ou o segmento  $BC$ .
- c) As retas são contínuas.

Aconteceu que o Postulado V chamou a atenção, ou por ser muito muito maior, ou por ser a recíproca da proposição I, 29 (Quando uma reta corta duas paralelas formam-se ângulos correspondentes iguais). Por isso muitos tentaram demonstrar que o postulado V era na verdade consequência dos anteriores.

Os que tentaram mas não conseguiram, acabaram jogando luz sobre qual seria o caminho a se perseguir - a estes chamo de precursores - neste time tem muitos, mas os que se destacaram são: Ptolomeu, Proclus, Nasiredin, Wallis, Saccheri, Lambert.

No time dos descobridores podemos colocar: Gauss, Bolyai e Lobachewsky.

E por fim aparecem os Fundadores neste time podemos colocar, Beltrami, Riemann, Poincaré, Klein e Hilbert.

Uma das consequências da busca de uma prova para o quinto postulado foi a produção de grande número de afirmações a ele equivalentes, o que chamamos de *substitutos*.

Dizemos que uma proposição  $\mathcal{P}$  é um substituto do quinto postulado: se a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais a proposição  $\mathcal{P}$  coincide com a Geometria de Euclides.

A forma de provar que uma proposição  $\mathcal{P}$  é um substituto para o quinto postulado é a seguinte: primeiramente, devemos saber se  $\mathcal{P}$  é uma proposição da Geometria Euclidiana. Depois, devemos demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais  $\mathcal{P}$ , pode-se provar o quinto postulado de Euclides como uma proposição. O substituto mais conhecido é o seguinte:

**Postulado 2.8.** \*  $V_1$  (Axioma de Playfair) *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.*

Vamos enunciar alguns substitutos para o V Postulado de Euclides e propomos que para cada um deles deve ser feita uma construção que o negue. Desta forma garantimos que a Geometria Hiperbólica, de fato, não coincide com a Geometria Euclidiana.

**Postulado 2.9.** \*  $V_2$  *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*

**Postulado 2.10.** \*  $V_3$  *Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.*

**Postulado 2.11.** \*  $V_4$  *Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.*

**Postulado 2.12.** \*  $V_5$  *Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor do que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.*

**Postulado 2.13.** \*  $V_6$  *Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.*

**Postulado 2.14.** \*  $V_7$  *Se uma reta corta uma das duas paralelas, então, corta a outra.*

Agora vamos propor uma série de construções para explorar outras facetas desta nova geometria.

**Construção 2.15.** *Faça, em geometria euclidiana, um triângulo  $ABC$ , com mediana  $AE$  e baricentro  $F$ . Em seguida, obtenha  $AF \div FE$  e movimente dinamicamente o triângulo  $ABC$ , observando essa razão.*

**Construção 2.16.** *Faça, em geometria hiperbólica, um triângulo  $ABC$ , com mediana  $AP$  e baricentro  $H$ . Em seguida, obtenha  $AH \div HP$  e movimente dinamicamente o triângulo  $ABC$ , observando essa razão.*

**Construção 2.17.** *Faça, em geometria euclidiana, os pontos do plano que são equidistantes das retas suportes dos lados do triângulo  $ABC$ . Agora, movimente esse triângulo dinamicamente e observe o que acontece.*

**Construção 2.18.** *Faça, em geometria hiperbólica, os pontos do plano que são equidistantes das retas suportes dos lados do triângulo  $ABC$ . Agora, movimente esse triângulo dinamicamente e observe o que acontece.*

**Construção 2.19.** *Faça, em geometria euclidiana, um quadrilátero que possui os quatro lados iguais e os quatro ângulos internos iguais. Agora, movimente esse quadrilátero dinamicamente e observe o que acontece.*

**Construção 2.20.** *Faça, em geometria hiperbólica, um quadrilátero que possui os quatro lados iguais e os quatro ângulos internos iguais. Agora, movimente esse quadrilátero dinamicamente e observe o que acontece.*

## Capítulo 3

# Problemas na Geometria Hiperbólica

*“Quantas vezes os nossos raciocínios são errados! Atrevo-me a afirmar, que somos muito mais freqüentemente enganados por estes do que por nossos sentidos. Mas isso quer dizer que nossos raciocínios são sempre falaciosos, e que não podemos ter nenhuma dependência de qualquer verdade descoberta por nós pela compreensão”*

– Leonhard Euler

Neste parte vamos propor alguns problemas com o objetivo de desenvolver a teoria da Geometria Hiperbólica. Não explicamos quais são os pré-requisitos, simplesmente resolvemos os problemas em geometria hiperbólica com o intuito de esclarecer um pouco da argumentação envolvida e permitir ao leitor fundamentar os argumentos.

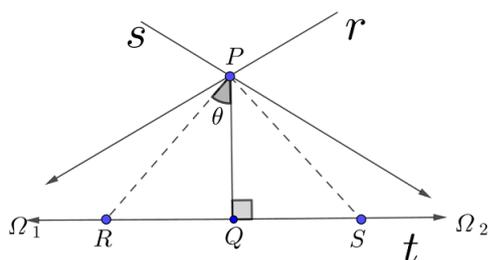
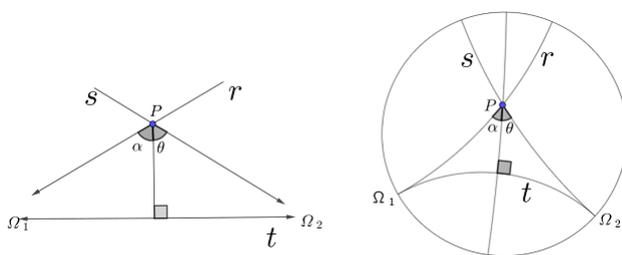
Gostaria apenas de esclarecer que nos triângulos ordinários os conhecidos casos de congruência: LLL,  $LAA_o$ , ALA, LAL e o caso especial de triângulos retângulos (cateto-hipotenusa e ângulo reto) valem também na Geometria Hiperbólica.

Em triângulos generalizados: LA, AA e ainda, Todos os triângulos generalizados isósceles com bases de mesma medida são congruentes.

**Problema 3.1.** *Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas à reta  $t$  e concorrentes no ponto  $P$ , com  $P$  não pertencente à  $t$ . A Perpendicular baixada de  $P$  à reta  $t$  forma ângulos congruentes com  $r$  e  $s$ , além disso, esses ângulos são agudos.*

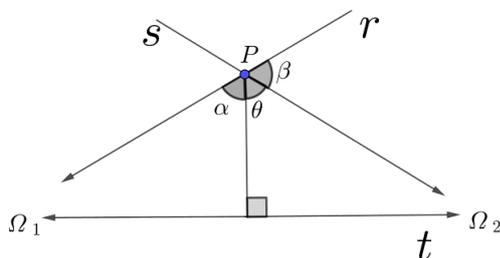
Solução: observe a figura

Suponha que  $\theta < \alpha$ ; existem  $R$  e  $S$  em  $t$  tal que  $R\hat{P}Q = \theta(\theta < \alpha)$  e  $RQ = SQ$ , conforme o desenho a seguir



Os triângulos  $PQR$  e  $RQS$  são congruentes pelo caso LAL, logo  $\widehat{QPS} = \theta$  o que é um absurdo! Portanto,  $\alpha = \theta$ .

Agora, para provar que ambos são agudos, observe a figura a seguir:



Como  $\alpha + \theta + \beta = \pi$ , e sendo  $r \neq s$ , tem-se que  $\beta > 0$ . Segue que

$$\alpha + \theta + \beta = \pi \Leftrightarrow 2\alpha = 180 - \beta \Leftrightarrow \alpha = \theta = 90 - \frac{\beta}{2}.$$

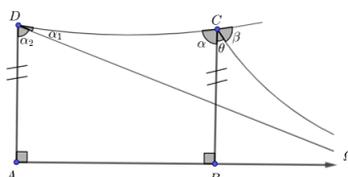
Sendo assim  $\alpha$  e  $\theta$  são iguais e agudos. ■

### 3.1 Quadrilátero de Saccheri e o quadrilátero de Lambert

Seja  $ABCD$  um quadrilátero de base  $AB$ , topo  $DC$  e laterais  $AD$  e  $BC$ . O quadrilátero é dito de Saccheri quando as medidas de  $AD$  e  $BC$  são congruentes e perpendiculares à base.

Já o quadrilátero de Lambert é o quadrilátero hiperbólico que possui três ângulos internos retos.





Solução: Considere a figura

Como vimos anteriormente,  $A\Omega$  e  $CD$  são hiper paralelas. Traçando  $C\Omega$  paralela à  $A\Omega$  e  $D\Omega$  paralela à  $A\Omega$ , segue que os triângulos  $AD\Omega$  e  $BC\Omega$  são congruentes pelo caso LA (em triângulos generalizados), logo  $\alpha_2 = \theta$ ; só que  $\beta > \alpha_1 \Leftrightarrow \beta + \alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_2 \Leftrightarrow \beta + \alpha_2 > \alpha$ , mas  $\alpha + \theta + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha + \alpha_2 + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta = 180 - \alpha$ . Finalmente,  $180 - \alpha > \alpha \Leftrightarrow \alpha < 90$ , ou seja, agudo. ■

**Problema 3.4.** O ângulo interno desconhecido do quadrilátero de Lambert é agudo.

Solução: Observe a figura

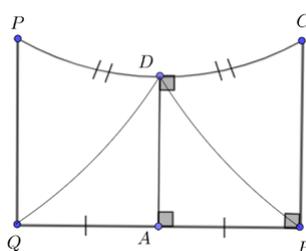


Figura 3.3: esboço para a solução do problema quatro

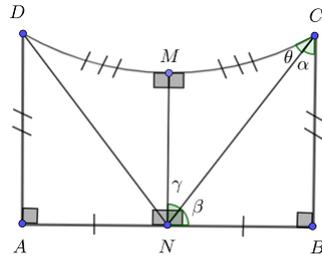
Tome um ponto  $P$  da reta  $CD$  tal que  $CD = PD$  e um ponto  $Q$  na reta  $AB$  de forma que  $AB = AQ$ . Agora, observe que os triângulos  $QAD$  e  $BAD$  são congruentes pelo caso LAL, logo,  $\widehat{QDA} = \widehat{ADQ}$  e  $BD = QD$  e consequentemente os triângulos  $BDC$  e  $QDP$  são congruentes pelo caso LAL, portanto  $\widehat{PQA} = \widehat{ABC} = 90$  e  $BC = PQ$ ; concluindo que  $BQPC$  é um quadrilátero de Saccheri, logo  $\widehat{BCD}$  é agudo. ■

**Uma consequência importante do quadrilátero de Lambert é que não existe retângulo e quadrado na Geometria Hiperbólica, pois como mostramos o quarto ângulo será sempre agudo.**

**Problema 3.5.** A soma dos ângulos internos de triângulo hiperbólico é menos do que  $\pi$ .

Solução: Bebendo na fonte do Quadrilátero de Saccheri, provaremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo ordinário hiperbólico é menor do que  $\pi$ . Observe a figura

### 3.1. QUADRILÁTERO DE SACCHERI E O QUADRILÁTERO DE LAMBERT23

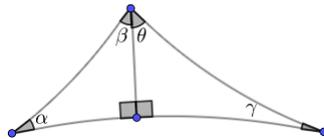


Nela, temos que  $\alpha + \beta = 90$  e  $\gamma + \beta = 90 \Leftrightarrow \gamma = \alpha$ . A soma dos ângulos internos do triângulo NMC é  $\gamma + \theta + 90 = \alpha + \theta + 90$ . Como  $\alpha + \theta$  é agudo, como provamos anteriormente, segue que  $\gamma + \theta + 90 < \pi$ .

Generalizando - conforme figura a seguir,  $\alpha + \beta + 90 < \pi$  e

$$\gamma + \theta + 90 < \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \theta + \gamma < \pi.$$

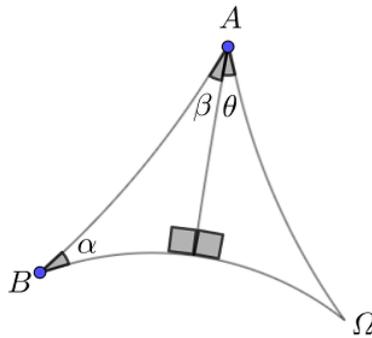
Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário hiperbólico é menor do que  $\pi$ .



■

**Problema 3.6.** A soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico generalizado é menor do que  $\pi$ .

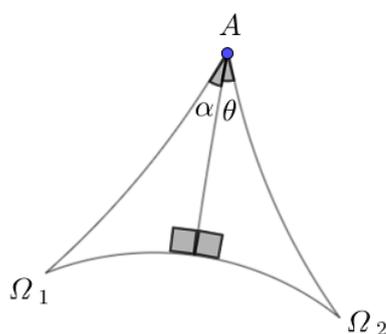
Solução: 1ª caso: triângulo  $AB\Omega$



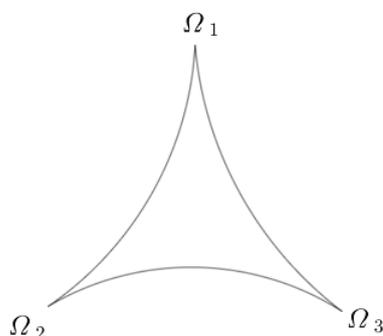
Observe que  $\alpha + \beta < \pi/2$  e como  $\hat{\Omega} = 0$ , temos que  $\alpha + \beta + \theta < \pi \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Omega} < \pi$ .

2ª caso: triângulo  $A\Omega_1\Omega_2$

Como  $\alpha < \pi/2$  e  $\theta < \pi/2$  e  $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2 = 0$ , temos que  $\alpha + \theta + \hat{\Omega}_1 + \hat{\Omega}_2 < \pi \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{\Omega}_1 + \hat{\Omega}_2 < \pi$ .



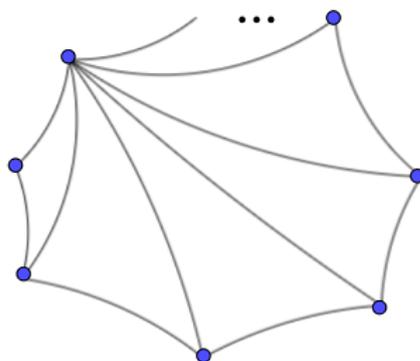
3ª caso: triângulo  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$



Como  $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2 = \hat{\Omega}_3 = 0$ , temos que  $\hat{\Omega}_1 + \hat{\Omega}_2 + \hat{\Omega}_3 = 0 < \pi$ . ■

**Portanto, no geral, qualquer triângulo hiperbólico tem soma dos ângulos internos menor do que  $\pi$ .**

**Problema 3.7.** A soma dos ângulos internos de um polígono hiperbólico ordinário de  $n$  lados é menor do que  $\pi(n - 2)$ .

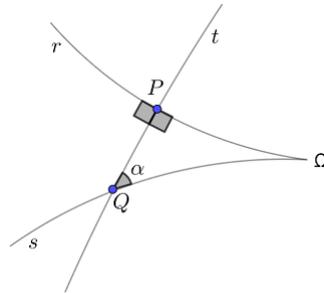


Solução: Observe que podemos dividir o polígono em tela em  $n - 2$  triângulos, sendo que cada triângulo a soma dos ângulos internos é menor do que  $\pi$ , assim

### 3.1. QUADRILÁTERO DE SACCHERI E O QUADRILÁTERO DE LAMBERT<sup>25</sup>

$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n < \pi + \pi + \pi + \dots + \pi \Leftrightarrow S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n < \pi(n - 2)$ . Onde,  $S_i, i = \{1, 2, 3, 4, \dots, n - 2\}$ , é a soma dos ângulos internos dos respectivos triângulos. Como a soma dos ângulos internos de todos esses triângulos é a soma dos ângulos internos do polígono, conclui-se que essa soma é menor do que  $\pi(n - 2)$ . ■

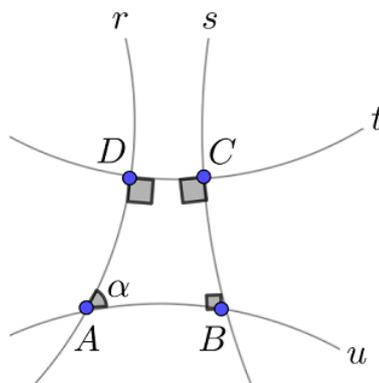
**Problema 3.8.** Na Geometria Hiperbólica, existem retas paralelas que não admitem reta perpendicular comum.



Solução: Observe que  $\overleftrightarrow{A}$  é paralela a  $\overleftrightarrow{B}$ . Seja uma reta perpendicular à ambas, no caso de  $\alpha = \pi/2$  teríamos que a soma dos ângulos internos do triângulo  $PQ\Omega$  seria  $\pi$ . Um absurdo! Logo, existem retas paralelas que não admitem uma reta perpendicular em comum. ■

**Problema 3.9.** Duas retas hiperbólicas não podem ter mais do que uma perpendicular comum.

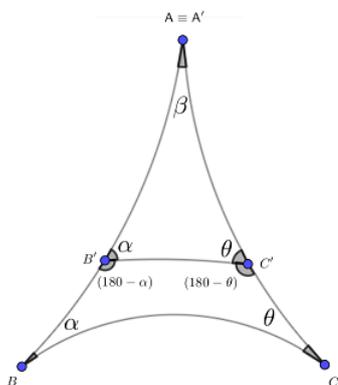
Solução: Se duas retas possuísem mais de uma perpendicular comum, o quadrilátero hiperbólico resultante teria quatro ângulos retos, o que não pode ocorrer na Geometria Hiperbólica, pois como vimos a soma dos ângulos internos de um quadrilátero hiperbólico tem de ser menor do que  $2\pi$ .



$\alpha = \pi/2$ ? Um absurdo! ■

**Problema 3.10.** *Se os três ângulos de um triângulo hiperbólico são, respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Solução: Como consequência da soma dos ângulos internos de um polígono hiperbólico, tem-se que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero hiperbólico é menor do que 360, pois, para  $n = 4$ , temos que  $S_4 < 180(4 - 2) < 360$ . Este fato ajudará na solução do problema em tela. Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos com  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ . Suponha que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  não são congruentes, e ainda, sem perda de generalidade que  $AB > A'B'$  e  $AC > A'C'$ . Tome sobre  $\overline{AB}$  um ponto  $P$ , tal que  $AP = A'B'$  e sobre  $\overline{AC}$  um ponto  $Q$ , tal que  $AQ = A'Q'$ . Com isso, o triângulo  $APQ$  seria congruente ao triângulo  $A'B'C'$  pelo caso LAL e, portanto a figura ficaria assim:



Agora, temos que a soma dos ângulos internos do quadrilátero  $BB'C'C$  é  $\alpha + \pi - \alpha + \pi - \theta = 360$ , contrariando o fato dessa soma ser  $< 2\pi$ . Um absurdo. Sendo assim, se os ângulos de dois triângulos hiperbólicos são iguais entre si dois a dois, logo, são congruentes. ■

## Capítulo 4

# Números Complexos e a Geometria Hiperbólica

*“Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts.”*

– David Hilbert

Neste capítulo vamos precisar dos números Complexos  $\mathbb{C}$  e funções sobres os Complexos para explicar como surge o grupo que gera a geometria hiperbólica.

### 4.1 Projeção Esferográfica e o Plano Extendido $\hat{\mathbb{C}}$

Seja  $\mathbf{S}$  a esfera três dimensional cuja equação é  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , retire o ponto  $(0, 0, 1)$ . Para cada ponto  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}$ , considere a reta passando em  $(0, 0, 1)$  e  $(x_1, x_2, x_3)$ , a equação paramétrica de tal segmento será dado por

$$\gamma(t) = (0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

determine  $t_0$  tal que  $\gamma(t_0)$  encontra o plano  $x_1x_2$ , isto é,  $x_3 = 0$ , logo

$$-1 = t_0(x_3 - 1) \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Geometricamente é evidente, que para cada ponto  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S} - \{(0, 0, 1)\}$  pode ser associado de maneira única a um ponto do plano  $x_1x_2$ , da seguinte forma:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right).$$

Cada ponto do  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pode ser visto como o número complexo  $z = x + iy$ . Logo a projeção esferográfica, pode ser vista como uma aplicação

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S} - \{(0, 0, 1)\} \mapsto z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}.$$

## 28CAPÍTULO 4. NÚMEROS COMPLEXOS E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Geometricamente é evidente que esta aplicação é bijetora, mas podemos calcular a sua inversa, para isso veja que,

$$|z|^2 = z\bar{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}.$$

Daí,

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \text{ e } x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}.$$

É fácil de perceber, tanto geometricamente como algébricamente que se  $x_3 < 0$  os pontos são levado no disco  $|z| < 1$  e o hemisfério  $x_3 > 0$  é levado no exterior do disco, isto é,  $|z| > 1$ . Na literatura,  $\mathbf{S}$  é chamada de esfera de Riemann, e esta aplicação se chama projeção esferográfica. Podemos associar através da projeção esferográfica os pontos que estão no infinito ao ponto  $(0, 0, 1)$  da esfera, desta forma podemos, de forma mais natural, considerar o plano complexo estendido que é  $\mathbb{C}$  unido com o  $\infty$ , como sendo  $\mathbf{S}$ .

Também é fácil de visualizar que a projeção esferográfica transforma retas do plano complexo em círculos sobre  $\mathbf{S}$  que cruzam o ponto  $(0, 0, 1)$ , a recíproca disto também é verdadeira.

Qualquer que seja o círculo em  $\mathbf{S}$  ele pode ser obtido pela intercessão de  $S$  com um plano  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0$ . Além disso, podemos assumir que  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  e  $0 \leq a_i \leq 1$ . Em termos de  $z$  e  $\bar{z}$  esta equação tem a forma

$$a_1(z + \bar{z}) - a_2(z - \bar{z}) + a_3(|z_3|^2 - 1) = a_0(|z_3|^2 + 1)$$

ou

$$(a_0 - a_3)(x_1^2 + x_2^2) - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 + a_0 + a_3 = 0.$$

Se  $a_0 \neq a_3$  a equação é de um círculo, se  $a_0 = a_3$  isto representa uma reta em  $\mathbb{C}$ .

### 4.2 Grupo de Möbius

Um grupo é um conjunto  $G$  não vazio que possui uma operação entre os elementos de  $G$  tal que a operação  $\circ$  satisfaz as seguintes propriedades:

**Associatividade** Para todo  $R, S$  e  $T \in G$  vale:  $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ .

**Neutro** Existe um único elemento  $I \in G$  tal que para todo  $S \in G$  temos  $I \circ S = S = S \circ I$ .

**Inverso** Para todo  $S \in G$  existe  $T \in G$  tal que  $S \circ T = I = T \circ S$ , denotamos  $T$  por  $S^{-1}$ .

Uma transformação  $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é dita transformação fracionária linear ou transformação de Möbius se ela for da forma

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

é fácil de ver que se  $T(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$  é outra transformação de Möbius então

$$(S \circ T)(z) = \frac{(aa_1 + bc_1)z + (ab_1 + bd_1)}{(cd_1 + dc_1)z + (cb_1 + dd_1)}.$$

isto quer dizer que a composição de duas transformações de Möbius continua sendo uma transformação de Möbius. Al' em disso, o inverso de  $w = S(z)$  tem a forma

$$z = S^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Como a composição de funções é sempre associativa, segue que o conjunto das transformações de Möbius é um grupo, conhecido como Grupo Especial Linear  $SL_2$  de dimensão 2 sobre  $\mathbb{C}$ , vamos nos referir a ele como Grupo de Möbius.

Além disso,  $\lim_{z \rightarrow \infty} S(z) = \frac{a}{c}$  e  $\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} S(z) = \infty$ . Portanto, podemos pensar  $S$  definida no plano estendido  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Também não é difícil perceber que existem muitas representações da mesma transformação, mas podemos sempre substituí-la por uma em que  $ad - bc = 1$ . Neste caso cada transformação tem ainda duas representações, obtidas uma da outra, por mudar o sinal de todos os coeficientes.

As transformações lineares fracionárias podem ser divididas em:

$$w = z + a \text{ translações paralelas,}$$

$$w = kz, \text{ com } |k| = 1$$

rotações,

$$w = kz, \text{ com } k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1 \text{ ou } k > 1$$

homotetias,

$$w = \frac{1}{z} \text{ as inversões.}$$

Observe que as rotações e homotetias estão conectadas, pois para todo  $k = |k| \frac{k}{|k|}$ , isto quer dizer que temos uma rotação seguida de uma homotetia.

Se  $c \neq 0$  podemos escrever

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c},$$

isso mostra que qualquer qualquer transformação de Möbius é composta de uma translação, uma inversão e uma rotação / homotetia. Se  $c = 0$  a inversão não é necessária.

### 4.3 Razão Cruzada

Sejam  $z_2, z_3$  e  $z_4$  três pontos no plano complexo estendido. Existe uma transformação de Möbius que leva  $z_2 \rightarrow 1, z_3 \rightarrow 0$  e  $z_4 \rightarrow \infty$ . Se nenhum dos três pontos forem  $\infty$  basta definir

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Se  $z_2, z_3$  ou  $z_4 = \infty$ , a transformação se reduz a

$$\frac{z - z_3}{z - z_4}, \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}, \frac{z - z_3}{z_2 - z_3},$$

respectivamente.

Se  $T$  é outra transformação de Möbius tal que também leva  $z_2 \rightarrow 1, z_3 \rightarrow 0$  e  $z_4 \rightarrow \infty$ , então  $ST^{-1}$  leva  $1 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 0$  e  $\infty \rightarrow \infty$ . Considerações algébricas implicam que a única transformação de Möbius que realiza isso é a transformação identidade. Portanto,  $S = T$  e isso prova a unicidade da transformação  $S$ .

A **Razão Cruzada**  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  é a imagem de  $z_1$  pela transformação de Möbius que leva:  $z_2 \rightarrow 1, z_3 \rightarrow 0$  e  $z_4 \rightarrow \infty$ .

A definição só tem interesse se os pontos  $z_2, z_3$  e  $z_4$  forem distintos.

A razão cruzada é invariante pela transformação de Möbius. Este fato é de fundamental importância para nós, pois graças a ele temos como justificar a definição de distância hiperbólica.

**Teorema 4.1.** *Se  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  são pontos distintos do plano complexo estendido e  $T$  é qualquer transformação de Möbius então  $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ .*

**Demonstração:** Como  $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ , então  $ST^{-1}$  leva:  $T(z_2) \rightarrow 1, T(z_3) \rightarrow 0$  e  $T(z_4) \rightarrow \infty$ . Por definição

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = ST^{-1}(T(z_1)) = S(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

■

Desta propriedade podemos calcular mais facilmente a transformação de Möbius que leva:  $z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2$  e  $z_3 \rightarrow w_3$  para isso basta isolarmos  $w$  na seguinte equação

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

**Afirmção 4.2.** *Seja  $T$  uma transformação de Möbius, então  $T$  leva a reta real em um círculo ou em uma reta.*

**Demonstração:** Considere  $w = T^{-1}(z)$  para algum valor real  $z$ , logo  $T(w) = \overline{T(w)}$ . De maneira explícita isto pode ser escrito

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\bar{a}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} + \bar{d}}$$

### 4.3. RAZÃO CRUZADA

multiplicando cruzado obtemos

$$(a\bar{c} - c\bar{a})|w|^2 + (a\bar{d} - c\bar{b})w + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{w} + b\bar{d} - d\bar{b} = 0$$

se  $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$ , neste caso a equação é uma reta e em particular  $a\bar{d} - c\bar{b} \neq 0$ . Se  $a\bar{c} - c\bar{a} \neq 0$ , podemos dividir por este termo. Completando o quadrado e fazendo manipulação algébricas e observando que:  $\overline{b\bar{c} - d\bar{a}} = -(a\bar{d} - c\bar{b})$  e  $\overline{a\bar{c} - c\bar{a}} = -(a\bar{c} - c\bar{a})$  obtemos

$$\left| w + \frac{\bar{a}d - \bar{c}d}{\bar{a}c - \bar{c}a} \right| = \left| \frac{ad - bc}{\bar{a}c - \bar{c}a} \right|.$$

que é uma equação de um círculo. Isto prova que a imagem de um número real por  $T$  esta sobre um círculo ou sobre uma reta. ■

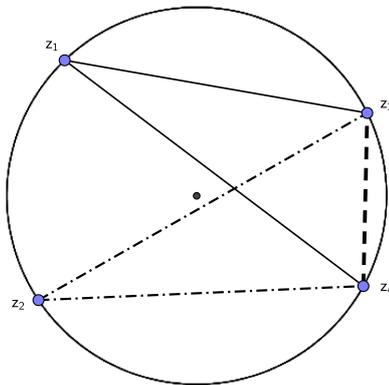
**Teorema 4.3.** *A razão cruzada  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  é um número real se, e somente se, os pontos  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  estão sobre um círculo ou sobre uma reta.*

O resultado deste teorema segue da afirmação acima e da dica: use que  $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$  é real quando olhamos a imagem do eixo real por  $T^{-1}$ .

Existe ainda outra forma de vermos isso. Para isso recorde a propriedade dos números complexos na qual o ângulo do produto de dois números complexos  $z_1 z_2$  é igual a soma dos ângulos de  $z_1$  e  $z_2$ , isto é,

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

O ângulo formado pelo vetor  $z$  e pelo eixo  $x$  é chamado de argumento do número complexo  $z$ .



Segue disso, que

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Se os pontos  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  estão sobre uma mesma reta é imediato que este valor é zero. No caso que eles estão sobre um círculo estas razão compreendem o mesma corda, e portanto, o valor pode ser 0 ou  $\pm\pi$  dependendo da posição relativa deles.

## 32CAPÍTULO 4. NÚMEROS COMPLEXOS E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

**Teorema 4.4.** Se  $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  fazendo as 24 permutações possíveis dos números  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  obtemos os seguintes valores para a razão cruzada:  $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda}$  e  $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ .

A demonstração é exercício para o leitor.

Estes resultados deixam claro, pelo menos na teoria de grupos de transformações de Möbius, que não devemos distinguir círculos e retas.

### 4.4 Simetria

Os pontos  $z$  e  $\bar{z}$  são simétricos com relação ao eixo real. Transformações de Möbius com coeficientes reais leva o eixo real em si mesmo, e  $z$  e  $\bar{z}$  são novamente levados em pontos simétricos. Vamos iniciar definindo o que é simetria.

**Definição 4.5.** Os pontos  $z$  e  $z'$  são ditos simétricos com respeito a um círculo  $C$  que passa através de  $z_1, z_2$  e  $z_3$  se e somente se

$$(z', z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Vamos verificar que isso coincide com a nossa definição de inversão.

Considere  $C$  um círculo  $C$  de centro em  $a$  e raio  $r$ . Usando a invariância da razão cruzada temos

$$\begin{aligned} \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} &= \overline{(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} \\ &= \left( \bar{z} - \bar{a}, \frac{r^2}{z_1 - a}, \frac{r^2}{z_2 - a}, \frac{r^2}{z_3 - a} \right) = \left( \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a \right) \\ &= \left( \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3 \right). \end{aligned}$$

Esta equação mostra que os ponto simétrico de  $z$  é  $z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$  ou ainda, estes pontos satisfazem

$$(z' - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2.$$

Mas isso significa que  $|z' - a| |z - a| = r^2$ , isto é, coincide com a definição dada no início do texto.

**Teorema 4.6.** Se uma transformação de Möbius leva o círculo  $C_1$  no círculo  $C_2$ , então ela transforma os pontos simétricos com respeito a  $C_1$  em pares de pontos simétricos com respeito a  $C_2$ .

### 4.5 Conclusão

Com isso concluímos dois fatos que importantes:

#### 4.5. CONCLUSÃO

1ª O Grupo de Möbius é o grupo que contém as inversões. Mais geral ainda, é possível provar que as inversões geram exatamente este grupo. Portanto, o grupo que gera a geometria hiperbólica é obtido exatamente o Grupo de Möbius.

2ª Qualquer expressão ou fato invariante por reflexões é interessante, em particular vimos que a razão cruzada é um invariante. Vamos definir a distância entre dois pontos usando a razão cruzada.

Seja  $A$  e  $B$  os extremos de um segmento hiperbólico e sejam  $A'$  e  $B'$  os respectivos pontos ideais obtidos por prolongar este segmento. Vendo estes pontos como números complexos podemos calcular a razão cruzada  $(A, A', B, B')$  e já sabemos que este número é real, pois sabemos que estes 4 pontos estão sobre um círculo ou sobre uma reta.

Uma vez feito isso, podemos mostrar que sempre existe uma transformação de Möbius que leva:  $A \rightarrow i, A' \rightarrow 0, B \rightarrow ki$ , com  $k > 1$  e  $B' \rightarrow \infty$  (faça como exercício). Desde que a razão cruzada é invariante por transformação de Möbius segue que

$$(B, A, A', B') = (ki, i, 0, \infty) = \frac{ki - 0}{ki - \infty} \frac{i - \infty}{i - 0} = \frac{ki - 0}{i - 0} \frac{i - \infty}{ki - \infty} = k.$$

Desta forma, podemos definir  $\ln(B, A, A', B')$ , além disso, como é sempre  $(B, A, A', B')$  é maior que 1 segue que  $(B, A, A', B') = |(B, A, A', B')|$ , mas

$$|(B, A, A', B')| = \frac{|B - A'|}{|B - B'|} \frac{|A - B'|}{|A - A'|} = \frac{BA' AB'}{BB' AA'}.$$

Portanto, podemos calcular a razão cruzada utilizando o comprimento euclidiano dos segmentos.

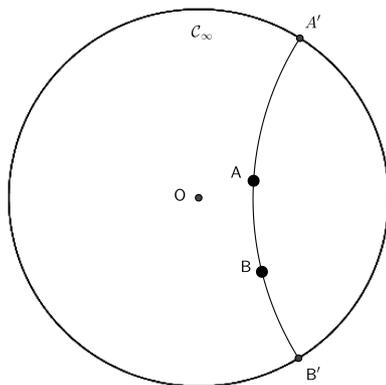


Figura 4.1: Distância hiperbólica

Desta forma definimos a distância hiperbólica entre os pontos  $A$  e  $B$  do plano, calculando os pontos ideais  $A'$  e  $B'$ , respectivamente e

$$d(A, B) = \ln \frac{BA' AB'}{BB' AA'}.$$

34CAPÍTULO 4. NÚMEROS COMPLEXOS E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

## Capítulo 5

# Ladrilhamento do Plano Hiperbólico

*“Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam ambas de refletir.”*

– Henri Poincaré

Neste capítulo vamos fazer algumas conexões inusitadas, uma delas será uma hipótese da origem das técnicas utilizadas por Escher para compor uma série de seus trabalhos, tais como:



Figura 5.1: Círculo Limite III - C. Escher

Na referência [2], Coxeter descreve um contato por correspondência que o mesmo manteve com Escher. No Congresso Internacional de Matemática de 1954 em Amsterdã, Coxeter enviou a Escher um esboço num papel de um reticulado. Coxeter ficou bastante satisfeito e surpreso ao receber, por correio, a gravura *Círculo Limite I* em dezembro de 1958. É notável que o desenho enviado por Coxeter a Escher era bastante elementar e não mostrava o "andaime" que Coxeter usou na sua construção. Apesar disso, Escher deduziu e generalizou a técnica de sua construção.

## 5.1 Ladrilhamento

Vamos construir ladrilhamentos por triângulo do plano hiperbólico, existem muitas descrições de tais ladrilhamentos e suas conexões. Uma das primeiras abordagens deste assunto foi dada por Klein (veja [5]).

Sem entrar em tantos detalhes e nos mantendo em um nível elementar, vamos começar observando que qualquer ladrilhamento é descrito, a menos de isometrias hiperbólicas, por uma tripla de números desordenados  $p, q$  e  $r$  com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Podemos provar, através de mais de um método, que existe um ladrilhamento do plano hiperbólico por triângulos com seus ângulos internos iguais, a  $\pi/p, \pi/q$  e  $\pi/r$ , gerado por inversões através de seus lados.

Todo ladrilhamento consiste de dois passos: primeiro, construir um triângulo com os ângulos adequados, segundo estender a um ladrilhamento ao plano hiperbólico.

**Passo 1:** Vamos iniciar construindo um triângulo com ângulos  $\pi/7, \pi/4, \pi/2$ . sabemos que  $\pi/7$  não é construtível, mas tal ângulo com certeza existe! Vamos considerar este ângulo dado.

Todo o processo de construção tem como referência a figura 5.2.

O ponto importante do processo é que a circunferência que determina os limites do plano hiperbólico será obtido durante a construção. O ponto que será o centro do modelo será denotado por  $O$  escolha outro ponto  $A$  (ponto qualquer). Seja  $A'$  a imagem de  $A$  da rotação de  $2\pi/7$  com centro em  $O$  (rotação anti-horário). Denote por  $B$  o ponto médio do segmento  $AA'$ . Seja  $C$  a circunferência com centro em  $B$  passando por  $A$ , e por  $A'$ . Pelo ponto médio do segmento  $OB$ , trace a circunferência  $\gamma$  passando por  $B$ . Sejam  $C$  e  $C'$  os pontos na  $C \cap \gamma$ . A circunferência que tem centro  $O$  e passa por  $C$  é circunferência que delimita o plano hiperbólico, denotamos por  $C_\infty$ .

O triângulo  $OCB$  esta contido em uma semicircunferência e portanto é retângulo em  $C$ , o que mostra que a circunferência  $\gamma$  determina uma reta hiperbólica. Portanto, também deve ser ortogonal ao segmento  $OB$ . Trace o segmento  $OA$  e considere  $P$  o ponto  $\gamma \cap OA$ . Considere o triângulo  $APB$ , uma vez que o ângulo  $PAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$  e também é igual a  $BPA$  (por serem raios de  $\gamma$ ), este triângulo é isósceles. Daí concluímos que o ângulo entre  $\gamma$  e  $AO$  é de  $\pi/7$ . Considere o ponto  $Q$  o ponto  $OB \cap \gamma$ . Obtemos desta forma o triângulo hiperbólico  $QOP$  com ângulos  $\pi/2, \pi/7$  e  $\pi/7$ .

Se considerar o triângulo  $ABQ$  vemos que o mesmo é isósceles (dois lados são raios) retângulo de ângulos  $\pi/2$  e  $\pi/4$ . Considere a circunferência com centro em  $A$  e passando por  $Q$ , esta circunferência intercepta  $OA$ , em um ponto que denotamos por  $R$ . Segue que o triângulo hiperbólico  $OQR$  tem ângulos  $\pi/2, \pi/4$  e  $\pi/7$ , como desejamos. De fato, o primeiro que precisamos verificar é que a

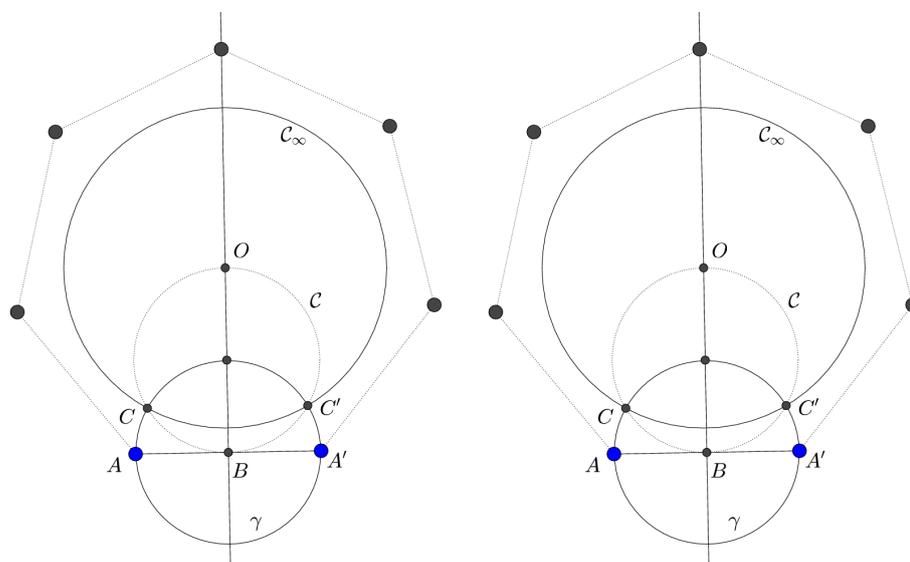


Figura 5.2: Construindo o triângulo 7, 4, 2

circunferência com centro em  $A$  é ortogonal com  $C_\infty$ , isso é equivalente a ver que  $A^\perp$  passa por  $Q$  (isso implica que  $AB$  deve ser o polar de  $Q$ ), mas isso realmente acontece pois o centro de  $\gamma$  é  $B$ . Que o ângulo em  $R$  é de  $\pi/2$  segue que pelo fato de  $A^\perp$  e  $AO$  são ortogonais, que o ângulo em  $Q$  é  $\pi/4$  segue do triângulo  $ABQ$ .

**Passo 2:** Queremos ladrilhar o disco de Poincaré com imagens do nosso triângulo. O método mais grosseiro, e mais geral (e claramente possível) é inverter os pontos  $O$ ,  $Q$  e  $R$  repetidamente através das retas hiperbólicas  $RQ$ ,  $OR$  e  $OQ$ .

No entanto, há algo muito melhor pode ser feito. Em cada estágio, automaticamente nos apropriamos das simetrias diedrais de nosso ladrilhamento. Assim que nós podemos supor que cada ponto, cada reta hiperbólica, polo e polar for criado, suas imagens sob esta simetria são também criadas. Portanto, estamos diante da figura

O próximo passo é adicionar retas hiperbólicas no ponto  $A$  como na figura 5.4. Efetivamente isto é o mesmo que rodar  $\gamma$  por  $k\pi/7$  em  $A$ . Aplique a construção 2.7 como ilustrada em 5.4.

De maneira semelhante, devemos adicionar retas hiperbólicas nos pontos  $A$ ,  $B$  como na figura 5.5. Mas para fazer isso é só aplicar a construção 2.2, como na figura 5.5. De forma alternativa, nós podemos ir em frente e rodar a reta  $\gamma$  em  $k\pi/4$ , o que nos fornece não só a reta hiperbólica  $AB$  mas também algumas outras.

Nesta altura deve ter ficado claro que podemos aplicar estas duas técnicas repetidamente, caso fiquemos em situação complicada podemos usar a inversão. Nos aproveitando tanto da estrutura interna como da externa, até alcançarmos quantos triângulos desejarmos.

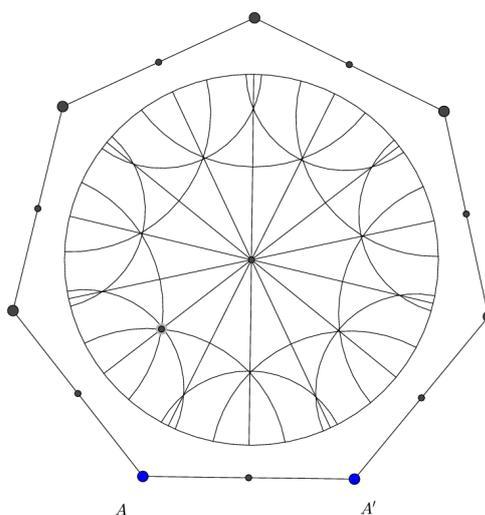


Figura 5.3: Início do Ladrilhamento com o triângulo 7,4,2

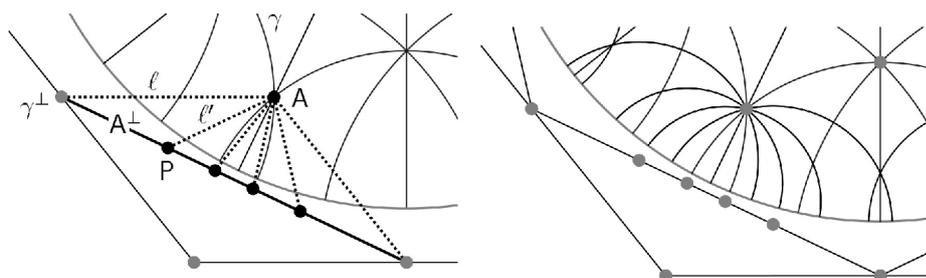


Figura 5.4: Rodando retas em um ponto

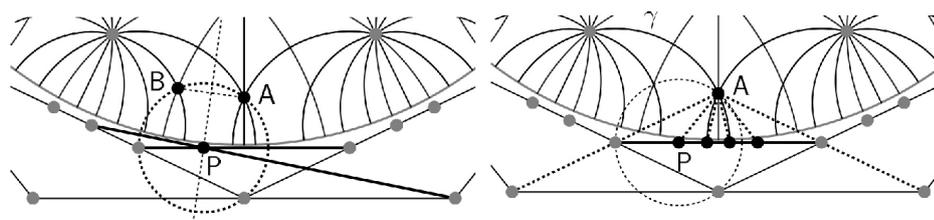


Figura 5.5: Forma mais eficiente de rodar uma reta

## 5.2 Construção do ladrilhamento por triângulos $p, q$ e 2

Vamos descrever somente o passo 1, na construção de um ladrilhamento por triângulos hiperbólicos cujos ângulos são  $\pi/p, \pi/q$  e  $\pi/2$ , com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ .

Vamos iniciar da mesma forma que antes. Considere dois pontos  $O$  e  $A$ ; Rode  $A$  ao redor de  $O$   $2\pi/p$  e produza  $A'$ . Seja  $S$  o ponto médio de  $AA'$ . Agora rode  $AA'$  ao redor de  $A$  o ângulo  $\pi/q - \pi/p$  e produza a reta  $\ell$  (as nossas rotações são

5.2. CONSTRUÇÃO DO LADRILHAMENTO POR TRIÂNGULOS  $P, Q$  E 239

com ângulos com sinais), seja  $B$  a interseção de  $\ell$  com  $OS$ . Nossa primeira reta hiperbólica  $C'$ , é a circunferência centrada em  $B$ , passando por  $A$ , e portanto, por  $A'$ .

Seja  $C$  a circunferência passando por  $O$  e  $B$ , centrada ponto médio de  $OB$ , e sejam  $T$  e  $T'$  a interseção de  $C'$  com  $C$ . Então  $C_\infty$  é a circunferência centrada em  $O$  passando por  $T$ .

Finalmente, seja  $R$  a interseção de  $C' \cap OA$  e seja  $Q$  a  $C' \cap OB$ . Feito isso é possível mostrar que os ângulos do triângulo hiperbólico  $OQR$  são  $\pi/p, \pi/q$  e  $\pi/2$ .

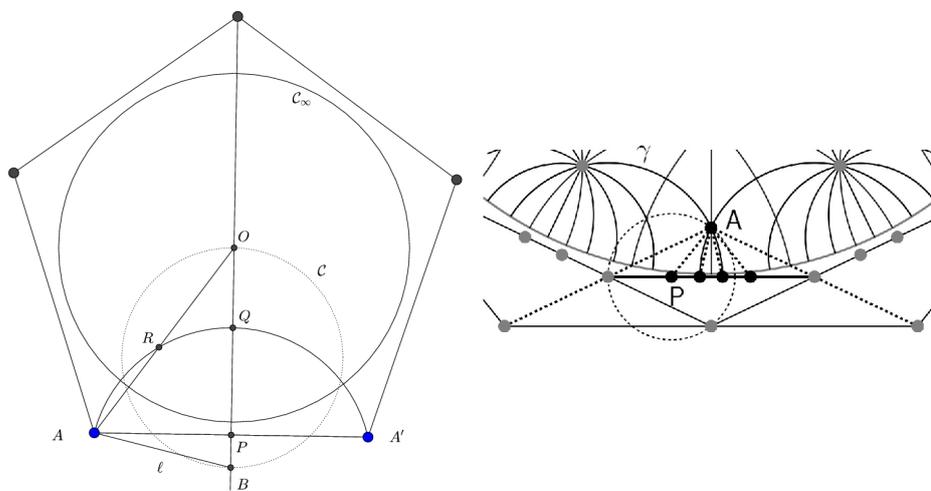


Figura 5.6: Forma mais eficiente de rodar uma reta

Uma vez que temos o triângulo, podemos produzir o ladrilhamento exatamente como descrito anteriormente.

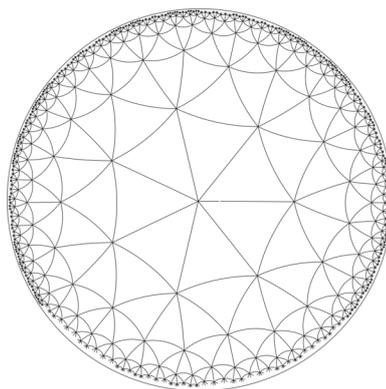


Figura 5.7: Ladrilhamento com o triângulo 2,3,7



## Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J. L. M., *Geometria hiperbólica*, Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG. 2002.
- [2] Coxeter, H.S.M., *The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit II"*, Leonard, **12**, (1979), 19–25.
- [3] Goodmann-Strauss, C., *Compass and straightedge in the Poincaré disk*, American Mathematical Society, January, 2001.
- [4] Katok, S., *Fuchsian groups*, Chicago: Library of Congress Cataloging, 1992.
- [5] Klein, F., *über die transformation siebenter trdnung der elliptischen tunktio-nen*, Math. Ann., **14**(1879), 428–471.
- [6] Stillwell, J., *Sources of hyperbolic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1997.
- [7] Thurston, W.P., *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, Princeton, 1997.