

Régua e Compasso na Geometria Hiperbólica

Jones Colombo

Universidade Federal Fluminense

VIII Bienal de Matemática

Abril de 2017

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Construções Euclidianas Úteis	1
2	Construções com Régua e compasso na Geometria Hiperbólica	7
2.1	Disco de Poincaré	7
2.2	Primeiras Construções	8
3	Ladrilhamento por Triângulo do Plano Hiperbólico	11
3.1	Ladrilhamento	11
3.2	Construção do ladrilhamento por triângulos p, q e 2	14
	Referências Bibliográficas	17

Capítulo 1

Introdução

Quase todos conhecem bem a primeira parte da saga da Geometria hiperbólica - com Bolay e Lobachevsky trabalhando em vão para ganhar reconhecimento sobre suas descobertas sobre o assunto.

A segunda parte - que não é tão bem difundida - começou com Beltrami vindo ao resgate da geometria hiperbólica em 1868, interpretando-a sobre uma superfície de curvatura constante negativa. Ao dar um significado concreto ao plano hiperbólico, ele, primeira vez, colocou o trabalho de Bolay e Lobachevsky sobre um sólido fundamento lógico. Os resultados de Beltrami foram rapidamente seguidos por interpretações em geometria projetiva por Klein em 1871, e nos números complexos por Poincaré em 1882.

A geometria hiperbólica havia chegado, e com Poincaré se tornou parte da matemática contemporânea. Ele a usou imediatamente em equações diferenciais, análise complexa e teoria dos números, e seu lugar tem sido assegurado nas disciplinas desde então. Ele também começou a usá-la em topologia de baixa dimensão, estas idéias foram mantidas vivas por um punhado de topólogos até o florescimento espetacular deste campo sob Thurston no final dos anos 1970. Agora, a geometria hiperbólica é a principal geometria nas dimensões 2 e 3.

Em geral, quando se fala em Geometria Hiperbólica sempre esperamos uma abordagem analítica. Portanto, trazer uma abordagem sintética apresenta um certo ar de novidade. Esta forma de abordar a Geometria Hiperbólica nos permite alcançar alguns resultados de maneira muito mais rápida que na construção analítica.

1.1 Construções Euclidianas Úteis

Neste capítulo só trataremos de propriedades euclidianas. Mas será a boa compreensão destas construções que nos habilitará para construções hiperbólicas que se seguiram.

A primeira coisa que precisamos ter em mente é o conceito de reflexão, vamos iniciar com a reflexão em torno de uma reta. Uma reflexão em torno de uma reta ℓ é uma aplicação do plano no plano, que pega um ponto A e leva em A' de tal forma que a reta ℓ se torna a mediatriz do segmento AA' (veja figura 1.1). Uma outra aplicação é a inversão na circunferência \mathcal{C} de centro O e raio r . A inversão é uma aplicação que

para cada ponto A associa um ponto A' , com a seguinte propriedade: O segmento AA' esta sobre o raio OA da circunferência e $OA \times OA' = r^2$ (veja figura 1.1).

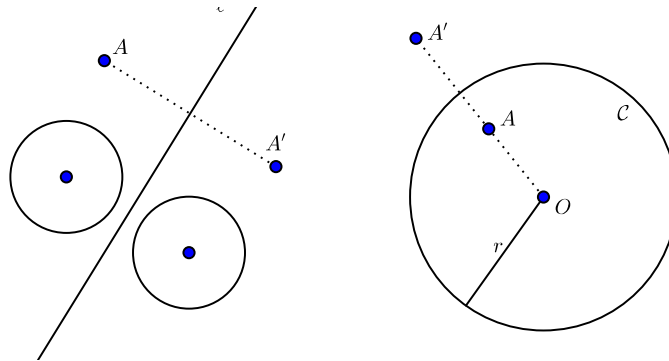


Figura 1.1: Reflexão em torno da reta ℓ e inversão em C

Vamos iniciar a primeira construção.

Construção 1.1 *Construa uma circunferência que passe sobre três pontos não colineares A , B e C .*

Construa os segmentos AB e BC . Sejam ℓ_1, ℓ_2 as mediatrizes correspondentes. Chame de O , o ponto de encontro de ℓ_1 e ℓ_2 . Então a circunferência desejada tem centro O e passa, digamos por A . ■

Construção 1.2 *Inverta um ponto com respeito a uma circunferência C com centro O .*

Existem várias formas de se fazer isso. Aqui esta uma:

Digamos que o ponto B esta fora da circunferência, construa o segmento OB (veja figura 1.2 abaixo), e depois uma outra circunferência C' , com centro no ponto médio do segmento OB e que passe por O . Seja P um dos pontos de intercessão de C e C' (observe que o triângulo OPB é reto, uma vez que OB é o diâmetro de C'). Considere a reta ℓ perpendicular a OB que passa por P . Seja A o ponto de intercessão de ℓ com OB . Então A é o inverso de B com respeito a C . De fato, observando o triângulo OBP e o triângulo OAP , vemos que ambos são semelhantes, uma vez que compartilham o ângulo $B\hat{O}P$. Pela semelhança temos que

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow OA \cdot OB = OP^2, \text{ mas } OP = r.$$

Se queremos inverter um ponto A que esta no interior da circunferência (diferente que o O), basta reverter esta construção. Considere a reta ℓ perpendicular ao segmento OA . Seja P o ponto de intercessão de ℓ com a circunferência. Considere ℓ' a perpendicular a OP passando por P . Então o ponto B será determinado pela intercessão da semi reta OA com ℓ' . ■

Existe um método mais rápido se tivermos uma condição adicional.

Construção 1.3 *Dado um par de circunferências ortogonais C e C' com centro O, O' , respectivamente, e A um ponto sobre C' , construa o inverso de A com respeito a C .*

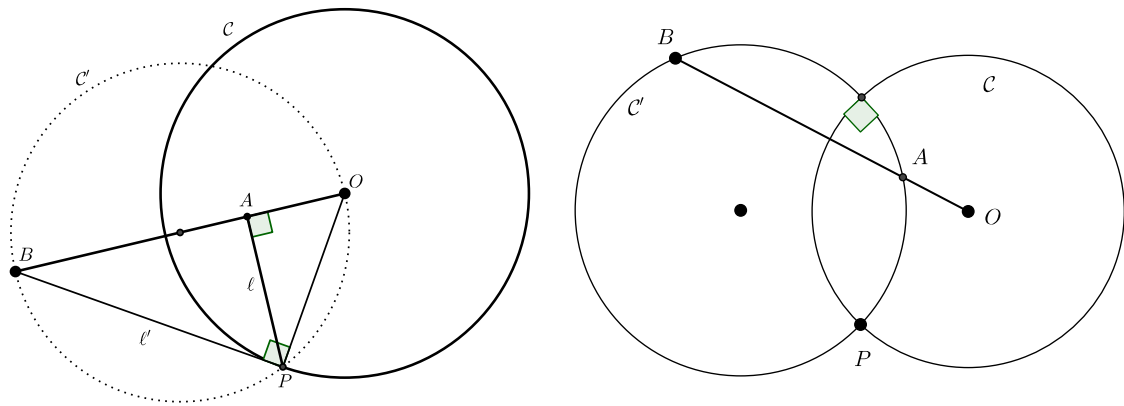


Figura 1.2: Construções 1.1 e 1.2

Simplemente construa a semi reta OA , como na figura 1.2 a direita; um dos pontos de interseção da semi reta OA com C' é o A ; o outro, B , será o inverso de A com respeito a C . Para vermos isso, veja a figura 1.3 a esquerda, marque o ponto P interseção de C e C' e trace os segmentos OP , PB e PA . Agora veja que os triângulo OPA e OBP são semelhantes. ■

Para concluir a semelhança você necessita dos dois seguintes resultados:

Resultado 1: Um ângulo APB inscrito em uma circunferência é metade do ângulo central AOB .

Resultado 2: A medida de um ângulo formado por uma secante e uma tangente APB é igual a metade do arco correspondente POB (veja figura a direita em 1.3).

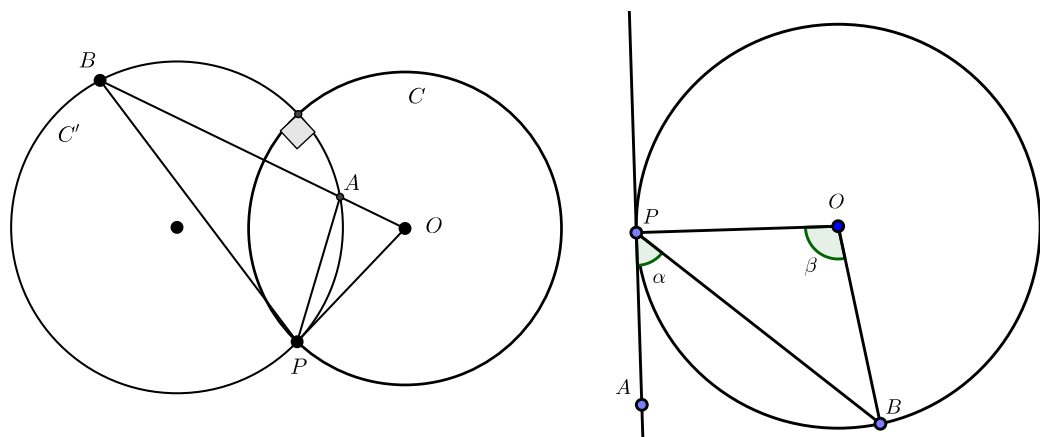


Figura 1.3: Demonstração da construção 1.3

Uma consequência disso é o seguinte:

Lema 1.4 *Seja C, C' são circunferências ortogonais e A é um ponto sobre C' . Então o inverso de A com respeito a C esta sobre C' . Similarmente, se A e B são inversos com respeito a C , estão sobre uma circunferência C' , então C e C' são ortogonais.*

Lema 1.5 *Seja C uma circunferência com centro O . Seja A um ponto diferente de O . Então o lugar geométrico de todas as circunferências passando por A e ortogonais a C é uma reta. Se A*

esta no interior de (sobre, no exterior de) C esta linha esta no exterior da (tangente a, no interior de) C . Além disso, qualquer linha no exterior de, ou tangente a, C é tal lugar geométrico.

Demonstração: Como já vimos toda a circunferência que passa por A e é ortogonal a C passa também sobre o inverso B de A com respeito à circunferência C . Então o lugar geométrico dos centros destas circunferências deve ser a mediatriz do segmento AB , os quais estão no exterior de C . Reciprocamente, qualquer circunferência sobre a mediatriz passando sobre os dois pontos A e B deve ser ortogonal a C .

Se A esta sobre C , então este lugar geométrico deve ser uma linha tangente a C por A .

Também é simples mostrar que qualquer linha no exterior de, ou tangente a C , é um tal lugar geométrico. \square

Construção 1.6 Dado uma circunferência C com centro O , e um ponto A no exterior de C , construído por um único C' com centro A , ortogonal a C .

Seja C'' uma circunferência com centro nos pontos médios do segmento AO e passa sobre A e O , veja a figura à direita da figura 1.4; Seja P um dos pontos de interseção das circunferência C e C'' . Então a circunferência desejada tem centro A e passa sobre P . \blacksquare

No lema 1.4 e construção 1.6 estabelecemos um fato muito importante: com respeito à circunferência C dada, as circunferências ortogonais C' estão em correspondência com pontos no exterior de C (o centro de C' , são chamados seus polos) e cada ponto no interior de C corresponde a uma reta (chamada de polares) no exterior de C .

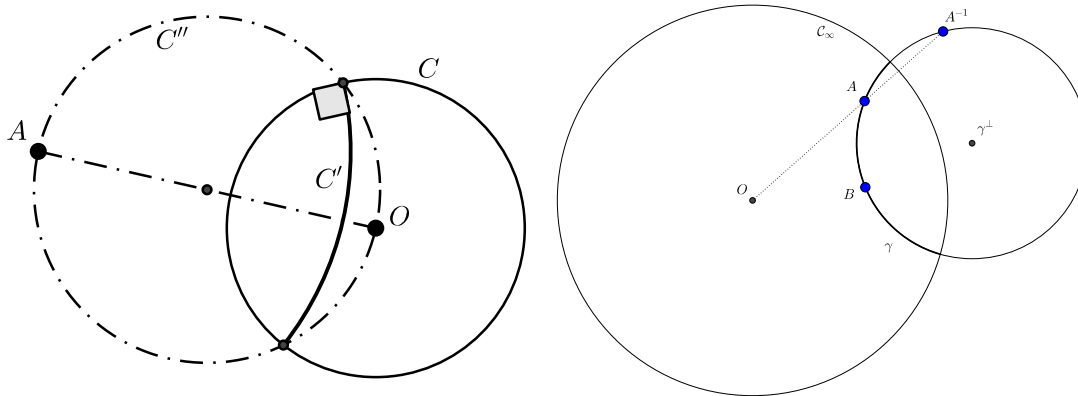


Figura 1.4: Construções 1.6 e Construção 2.1

Fixando a circunferência C , denote o polo da circunferência γ por γ^\perp ; reciprocamente, cada ponto B no exterior de C é um polo de alguma circunferência, denotada por B^\perp , como ilustrado na figura 1.5. Denote o polar de cada ponto A no interior de C por A^\perp ; reciprocamente, cada reta ℓ que não intercepta C é o polar de algum ponto, denotado por ℓ^\perp .

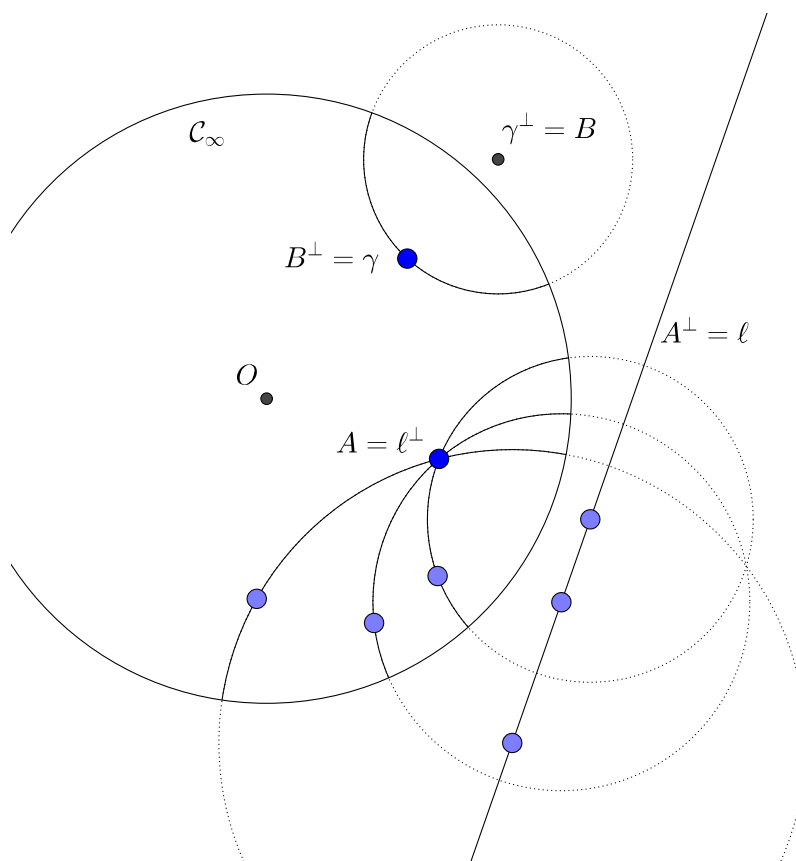


Figura 1.5: Polos e Polares

Falando em um nível mais sofisticado, os polos de nossas geodésicas estão no plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ - então ao juntar os pontos no infinito obtemos os polos que por sua vez são diâmetros de \mathcal{C} . Isso, por sua vez nos fornece uma evidência que o espaço das retas em \mathbb{H}^2 é um aberto da faixa de Möbius, isto é, $\mathbb{R}P^2$ menos um disco fechado limitado por \mathcal{C} .

Capítulo 2

Construções com Régua e compasso na Geometria Hiperbólica

O Espaço hiperbólico é um local onde a geometria (hiperbólica) não-euclidiana pode ser construída. Este espaço deve possuir um atributo incomum que é: à medida que você se afasta de um ponto, o espaço ao seu redor expande exponencialmente. É quase impossível criar modelos físicos precisos deste espaço usando qualquer um dos métodos usuais. Mas em 1997 a matemática Daina Taimina da universidade de Cornell inventou um modelo usando o crochê! Depois disso, todos começaram a ver a geometria hiperbólica em diversos locais - folhas de alface, corais, etc. Quem estiver interessado veja o site <http://www.theiff.org/main.html> do Institute for Figuring.



Figura 2.1: Modelo do Espaço Hiperbólico por Daina Taimina

2.1 Disco de Poincaré

Neste capítulo vamos levar a cabo algumas construções utilizando régua e compasso na geometria hiperbólica. Vamos considerar o modelo do disco de Poincaré. Sempre nos referimos a borda deste disco como \mathcal{C}_∞ e seu centro por O . O disco aberto vamos chamá-lo de \mathbb{D} . Quando nos referir ao inverso, a menos de claro aviso, significa o inverso com respeito a \mathcal{C}_∞ ; X^\perp significa o polar, polo, etc, de algum objeto X com respeito a \mathcal{C}_∞ , sempre no sentido do capítulo anterior.

\mathbb{D} é conhecido como Disco de Poincaré e será o nosso plano hiperbólico. Os pontos desta região são os pontos do plano hiperbólico, até aqui sem muitas novidades. As retas hiperbólicas são os arcos de circunferências ortogonais à C_∞ ou diâmetros de C_∞ .

A geometria hiperbólica satisfaz a maioria dos axiomas de Euclides, mas é preciso alterar o quinto axioma pelo seguinte: Dados uma reta do plano hiperbólico e um ponto fora da mesma, existe um número infinito de retas hiperbólicas que contem o dado ponto e não encontram a reta dada. Outras semelhanças são a possibilidade de definir distância assim como a noção de área no plano hiperbólico. Existe ainda outra diferença importante que a área de um triângulo hiperbólico depende somente de seus ângulos e não do comprimento de seus lados, assim o caso AAA é um caso de congruência na geometria hiperbólica.

2.2 Primeiras Construções

Construção 2.1 Dados pontos A e $B \in \mathbb{D}$, construa a reta hiperbólica AB . De maneira equivalente, dados dois pontos A, B e a circunferência C_∞ construa a única circunferência passando sobre A, B e que seja ortogonal a C_∞ .

Invertendo A (com respeito a C_∞) obtemos A^{-1} . A circunferência procurada é obtida por fazer a circunferência que passa pelos pontos A, B e A^{-1} . ■

Construção 2.2 Dados pontos A e $B \in \mathbb{D}$, e seus polares A^\perp e B^\perp construa a reta hiperbólica AB .

Se conhecemos os polares A^\perp e B^\perp , obtenha P o ponto de interseção e faça a circunferência com centro em P e raio $PA = PB$ (veja figura 3.5 a direita). ■

Na prática se A e B estão relativamente próximos em \mathbb{D} , A^\perp e B^\perp são quase paralelas e P pode ser difícil de encontrar. Por sorte, a mediatriz do segmento (euclidiano) AB também passa em P , o que permite aumentar a precisão da construção.

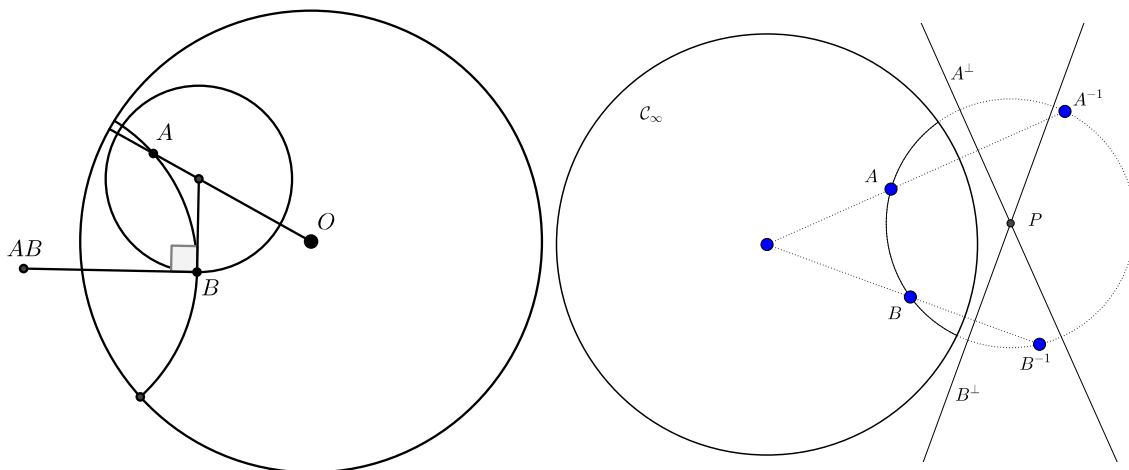


Figura 2.2: Circunferência e Retas Hiperbólicas

Construção 2.3 Dados pontos A e $B \in \mathbb{D}$, construa uma circunferência hiperbólica com centro A e passando por B .

Vamos admitir que sabemos que a curva procurada \mathcal{C} é a única circunferência que é ortogonal a toda geodésica que passa por A . Em particular, \mathcal{C} deve ser ortogonal a OA , desde que o mesmo faz parte de um diâmetro de \mathcal{C}_∞ . Além disso, \mathcal{C} também deve ser perpendicular a reta hiperbólica AB . Então \mathcal{C} deve ser a circunferência (euclidiana) com centro na interseção destas duas linhas e que passa por B . ■

Construção 2.4 Dados pontos A e $B \in \mathbb{D}$, construa a mediatriz do segmento hiperbólico AB . Similarmente, construa o ponto médio do segmento hiperbólico AB .

O procedimento é o mesmo que o realizado no plano euclidiano. Desenhe duas circunferências hiperbólicas \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , com centro em A e B , respectivamente, e passando por B e A . Seja P, Q os pontos de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Então a reta hiperbólica PQ é a mediatriz e o ponto médio de AB é a interseção de PQ com AB . ■

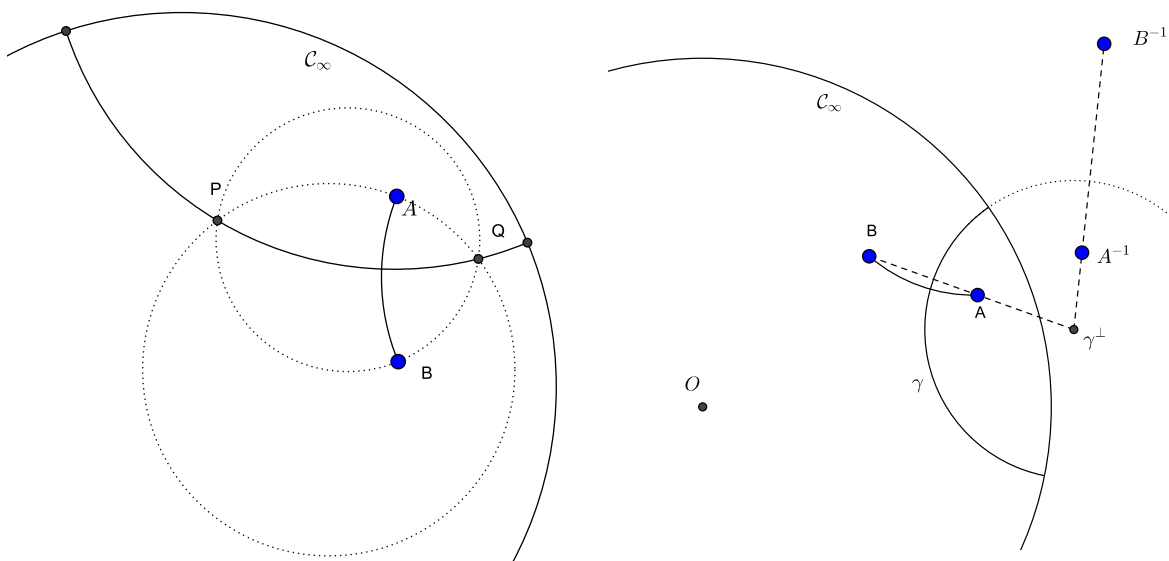


Figura 2.3: Mediatriz Hiperbólica

Construção 2.5 Dado o ponto $A \in \mathbb{D}$ e uma reta hiperbólica γ , construa a reflexão de A por γ .

Imitando a construção no caso euclidiano, construa uma circunferência hiperbólica com centro em A e com raio suficientemente grande para cortar γ em dois pontos: B e C . Construa circunferências hiperbólicas centradas nos pontos B e C que passem por A . O ponto procurado A' será o outro ponto de intercessão dessas duas circunferências. Observe que se traçar o segmento AA' , obteremos a mediatriz hiperbólica do segmento hiperbólico BC . ■

Na construção acima é importante observar que o ponto A' é a inversão de A através de γ , desta forma os conceitos de inversão em uma circunferência e a reflexão em uma reta hiperbólica se mostram equivalentes. Então ao introduzir uma inverão em uma circunferência não estamos introduzindo um conceito novo. Além disso, com esta propriedade em mente, podemos fazer a construção 2.4 da seguinte forma: Considere que já conhecemos a mediatriz hiperbólica γ de AB . Então a inversão através de γ permuta A e B . Por outro lado, γ deve ser ortogonal a \mathcal{C}_∞ , então a inversão

(através de γ) também deve intercambiar A^{-1} e B^{-1} . Daí γ^\perp esta sobre a interseção AB e $A^{-1}B^{-1}$ (veja figura 2.3 a direita).

Construção 2.6 *Sejam $A, B, C \in \mathbb{D}$, construa uma circunferência hiperbólica com centro em A e com raio congruente ao segmento hiperbólico BC .*

Inicie construindo a mediatriz hiperbólica γ do segmento AB . Inverta C através de γ e obtenha P . A circunferência desejada tem centro A e passa por P . ■

Construção 2.7 *Sejam γ uma reta hiperbólica, A um ponto de γ e um ângulo euclidiano α . Construa uma outra reta hiperbólica que encontra γ em A formando com esta ângulo α .*

Veja a figura 2.4. Considere em A^\perp o ponto γ^\perp . Seja ℓ a reta que passa por A e γ^\perp . Marque ℓ' a reta que passa por A e forma com ℓ o ângulo α . Seja P a interseção de ℓ com ℓ' . Afirmação: A reta procurada é dado por P^\perp . ■

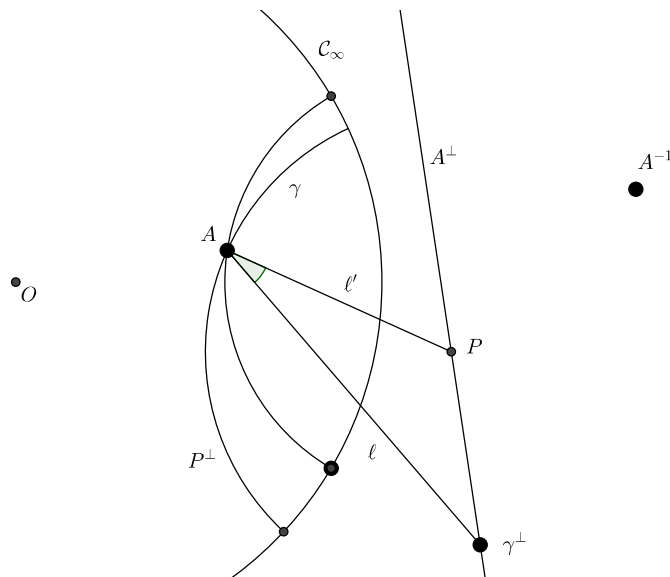


Figura 2.4: Construção do ângulo hiperbólico

Capítulo 3

Ladrilhamento por Triângulo do Plano Hiperbólico

Neste capítulo vamos fazer algumas conexões inusitadas, uma delas será uma hipótese da origem das técnicas utilizadas por Escher para compor uma série de seus trabalhos, tais como:



Figura 3.1: Círculo Limite III - C. Escher

Na referência [1], Coxeter descreve um contato por correspondência que o mesmo manteve com Escher. No Congresso Internacional de Matemática de 1954 em Amsterdã, Coxeter enviou a Escher um esboço num papel de um reticulado. Coxeter ficou bastante satisfeito e surpreso ao receber, por correio, a gravura *Círculo Limite I* em dezembro de 1958. É notável que o desenho enviado por Coxeter a Escher era bastante elementar e não mostrava o "andaime" que Coxeter usou na sua construção. Apesar disso, Escher deduziu e generalizou a técnica de sua construção.

3.1 Ladrilhamento

Vamos construir ladrilhamentos por triângulo do plano hiperbólico, existem muitas descrições de tais ladrilhamentos e suas conexões. Uma das primeiras abordagens

deste assunto foi dada por Klein (veja [4]).

Sem entrar em tantos detalhes e nos mantendo em um nível elementar, vamos começar observando que qualquer ladrilhamento é descrito, a menos de isometrias hiperbólicas, por uma tripla de números desordenados p, q e r com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Podemos provar, através de mais de um método, que existe um ladrilhamento do plano hiperbólico por triângulos com seus ângulos internos iguais, a $\pi/p, \pi/q$ e π/r , gerado por inversões através de seus lados.

Todo ladrilhamento consiste de dois passos: primeiro, construir um triângulo com os ângulos adequados, segundo estender a um ladrilhamento ao plano hiperbólico.

Passo 1: Vamos iniciar construindo um triângulo com ângulos $\pi/7, \pi/4, \pi/2$. sabemos que $\pi/7$ não é construtível, mas tal ângulo com certeza existe! Vamos considerar este ângulo dado.

Todo o processo de construção tem como referência a figura 3.2.

O ponto importante do processo é que a circunferência que determina os limites do plano hiperbólico será obtido durante a construção. O ponto que será o centro do modelo será denotado por O escolha outro ponto A (ponto qualquer). Seja A' a imagem de A da rotação de $2\pi/7$ com centro em O (rotação anti-horário). Denote por B o ponto médio do segmento AA' . Seja C a circunferência com centro em B passando por A , e por A' . Pelo ponto médio do segmento OB , trace a circunferência γ passando por B . Sejam C e C' os pontos na $C \cap \gamma$. A circunferência que tem centro O e passa por C é circunferência que delimita o plano hiperbólico, denotamos por C_∞ .

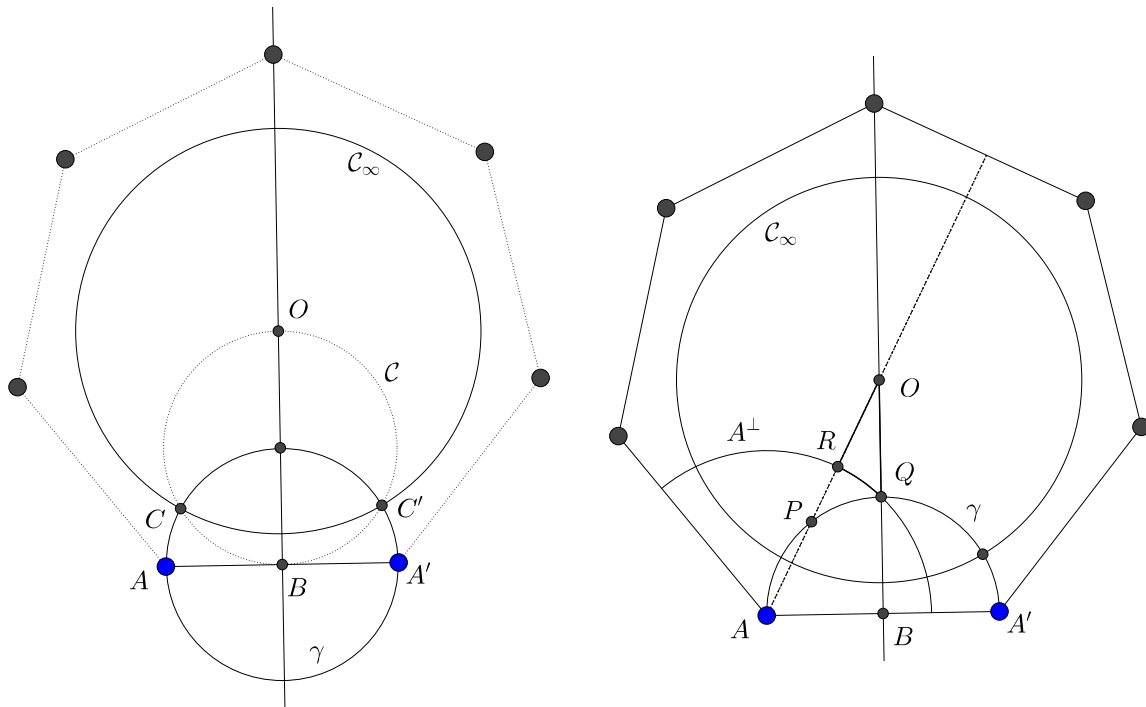


Figura 3.2: Construindo o triângulo 7, 4, 2

O triângulo OCB está contido em uma semicircunferência e portanto é retângulo em C , o que mostra que a circunferência γ determina uma reta hiperbólica. Portanto, também deve ser ortogonal ao segmento OB . Trace o segmento OA e considere P o ponto $\gamma \cap OA$. Considere o triângulo APB , uma vez que o ângulo $PAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$ e também é igual a BPA (por serem raios de γ), este triângulo é isósceles. Daí concluímos que o ângulo entre γ e AO é de $\pi/7$. Considere o ponto Q o ponto $OB \cap \gamma$. Obtemos desta forma o triângulo hiperbólico QOP com ângulos $\pi/2, \pi/7$ e $\pi/7$.

Se considerarmos o triângulo ABQ vemos que o mesmo é isósceles (dois lados são raios) retângulo de ângulos $\pi/2$ e $\pi/4$. Considere a circunferência com centro em A e passando por Q , esta circunferência intercepta OA , em um ponto que denotamos por R . Segue que o triângulo hiperbólico OQR tem ângulos $\pi/2, \pi/4$ e $\pi/7$, como desejamos. De fato, o primeiro que precisamos verificar é que a circunferência com centro em A é ortogonal com C_∞ , isso é equivalente a ver que A^\perp passa por Q (isso implica que AB deve ser o polar de Q), mas isso realmente acontece pois o centro de γ é B . Que o ângulo em R é de $\pi/2$ segue que pelo fato de A^\perp e AO são ortogonais, que o ângulo em Q é $\pi/4$ segue do triângulo ABQ .

Passo 2: Queremos ladrilhar o disco de Poincaré com imagens do nosso triângulo. O método mais grosseiro, e mais geral (e claramente possível) é inverter os pontos O, Q e R repetidamente através das retas hiperbólicas RQ, OR e OQ .

No entanto, há algo muito melhor que pode ser feito. Em cada estágio, automaticamente nos apropriamos das simetrias diedrais de nosso ladrilhamento. Assim que nós podemos supor que cada ponto, cada reta hiperbólica, polo e polar for criado, suas imagens sob esta simetria são também criadas. Portanto, estamos diante da figura 3.3.

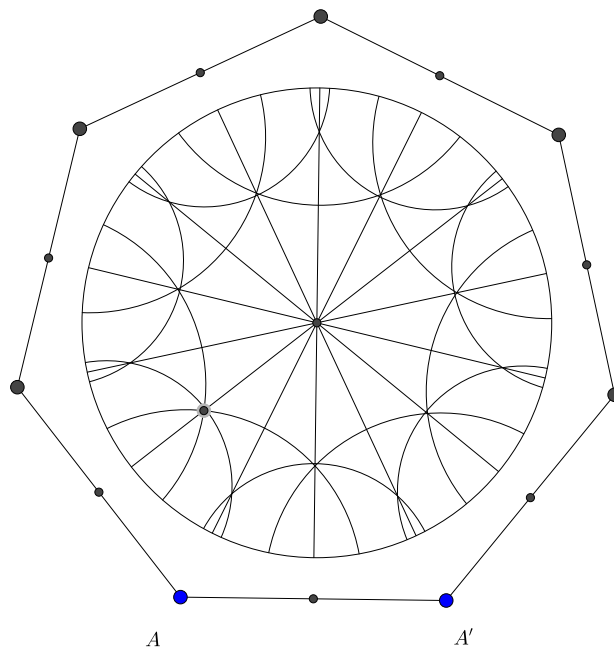


Figura 3.3: Início do Ladrilhamento com o triângulo 7,4,2

O próximo passo é adicionar retas hiperbólicas no ponto A como na figura 3.4.

Efetivamente isto é o mesmo que rodar γ por $k\pi/7$ em A . Aplique a construção 2.7 como ilustrada em 3.4.

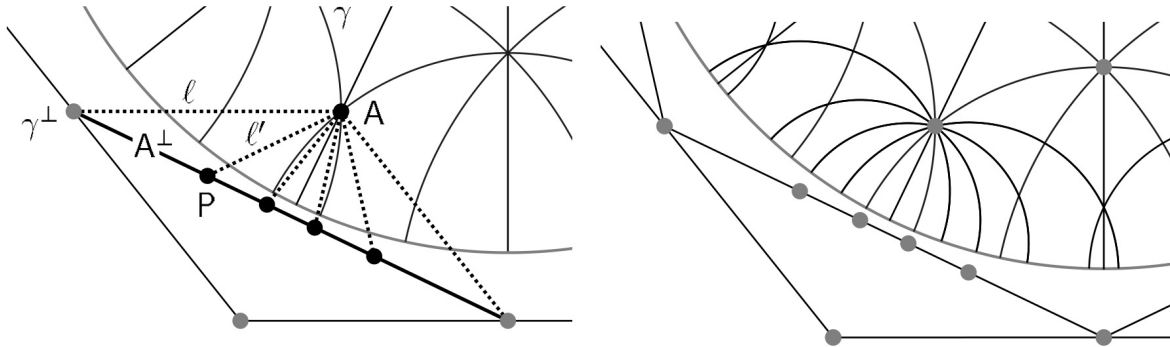


Figura 3.4: Rodando retas em um ponto

De maneira semelhante, devemos adicionar retas hiperbólicas nos pontos A, B como na figura 3.5. Mas para fazer isso é só aplicar a construção 2.2, como na figura 3.5. De forma alternativa, nós podemos ir em frente e rodar a reta γ em $k\pi/4$, o que nos fornece não só a reta hiperbólica AB mas também algumas outras.

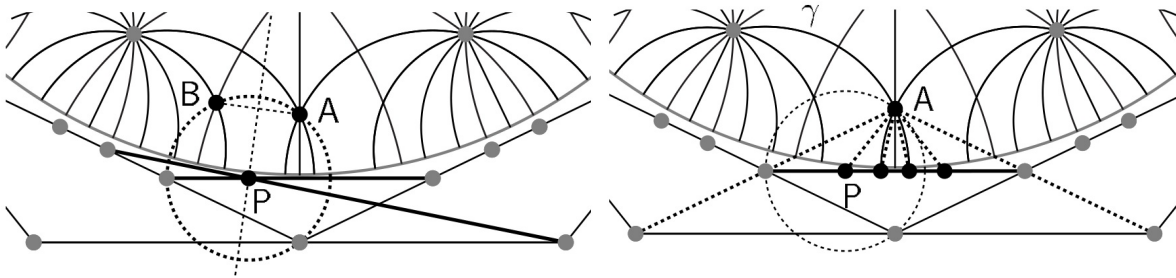


Figura 3.5: Forma mais eficiente de rodar uma reta

Nesta altura deve ter ficado claro que podemos aplicar estas duas técnicas repetidamente, caso fiquemos em situação complicada podemos usar a inversão. Nos aproveitando tanto da estrutura interna como da externa, até alcançarmos quantos triângulos desejarmos.

3.2 Construção do ladrilhamento por triângulos p, q e 2

Vamos descrever somente o passo 1, na construção de um ladrilhamento por triângulos hiperbólicos cujos ângulos são $\pi/p, \pi/q$ e $\pi/2$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$.

Vamos iniciar da mesma forma que antes. Considere dois pontos O e A ; Rode A ao redor de O $2\pi/p$ e produza A' . Seja S o ponto médio de AA' . Agora rode AA' ao redor de A o ângulo $\pi/q - \pi/p$ e produza a reta l (as nossas rotações são com ângulos com sinais), seja B a interseção de l com OS . Nossa primeira reta hiperbólica C' , é a circunferência centrada em B , passando por A , e portanto, por A' .

Seja C a circunferência passando por O e B , centrada ponto médio de OB , e sejam T e T' a interseção de C' com C . Então C_∞ é a circunferência centrada em O passando por T .

Finalmente, seja R a interseção de $C' \cap OA$ e seja Q a $C' \cap OB$. Feito isso é possível mostrar que os ângulos do triângulo hiperbólico OQR são $\pi/p, \pi/q$ e $\pi/2$.

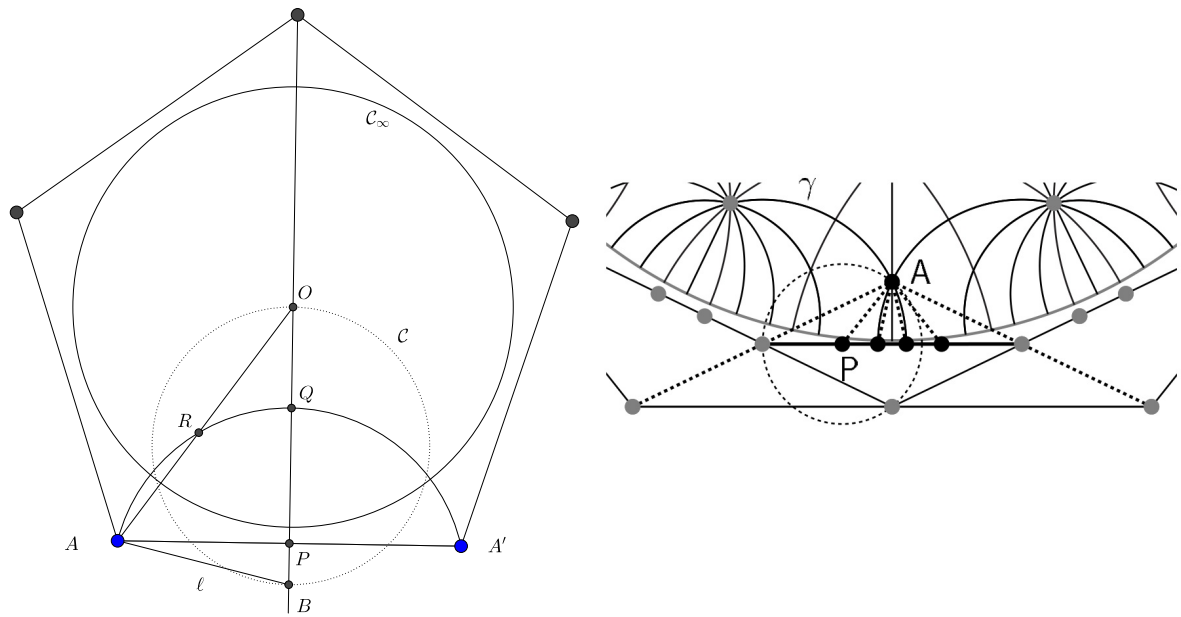


Figura 3.6: Forma mais eficiente de rodar uma reta

Uma vez que temos o triângulo, podemos produzir o ladrilhamento exatamente como descrito anteriormente.

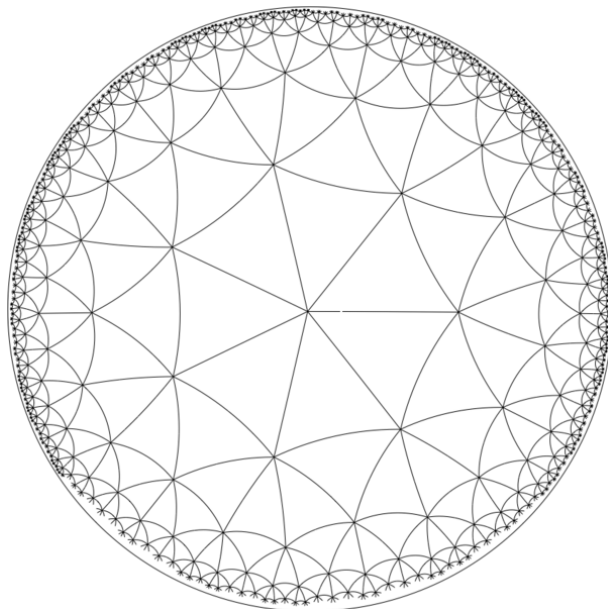


Figura 3.7: Ladrilhamento com o triângulo 2,3,7

Referências Bibliográficas

- [1] Coxeter, H.S.M., *The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit II"*, Leonard, **12**, (1979), 19–25.
- [2] Goodmann-Strauss, C., *Compass and Straightedge in the Poincaré disk*, American Mathematical Society, January, 2001.
- [3] Katok, S., *Fuchsian Groups*, Chicago: Library of Congress Cataloging, 1992.
- [4] Klein, F., *über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*, Math. Ann., **14**(1879), 428–471.
- [5] Stillwell, J., *Geometry of surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [6] Stillwell, J., *Sources of hyperbolic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1997.
- [7] Stillwell, J., *Sources of hyperbolic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1997.
- [8] Thurston, W.P., *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, Princeton, 1997.