Listas de Exercícios de Inferência
GET00135

Profª: Jessica Kubrusly

Conteúdo

Lista 1

Revisão

1.1. Sejam $X_1 \sim N(1,1)$, $X_2 \sim N(3,4)$ e $X_3 \sim N(-1,1)$ variáveis aleatórias independentes. Defina $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3$. Qual a distribuição de Y?

1.2. Seja $X \sim N(8,16)$. Calcule:
(a) $\mathrm{P}(X < 14)$ (b) $\mathrm{P}(X > 17)$ (c) $\mathrm{P}(X > 5)$ (d) $\mathrm{P}(X < 3)$ (e) $\mathrm{P}(4 < X < 16)$.

1.3. Seja $X \sim N(-1,4)$. Encontre o valor de c tal que:
(a) $\mathrm{P}(X < c) = 0,85$ (b) $\mathrm{P}(X > c) = 0,10$ (c) $\mathrm{P}(X > c) = 0,95$.

1.4. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Qual a probabilidade de X se distanciar da sua média mais de σ unidades?

1.5. Seja (X,Y) vetor aleatório com distribuição normal bivariada de parâmetros $\mu_X = 3$, $\mu_Y = -2$, $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Y^2 = 9$ e $\rho = -0.25$. Calcule $P(X < Y)$.
Dica: primeiro encontre a distribuição de $X - Y$ e depois calcule $P(X - Y < 0)$.

1.6. Sejam X e W variáveis aleatórias de média nula e distribuição conjunta normal bivariada tais que $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_W^2 = 17/9$ e $\mathrm{E}(XW) = 2$. Defina $Y = 2X - 3W$ e encontre:

(a) a distribuição de Y;

(b) a distribuição conjunta de (X,Y);

(c) a distribuição de $X|Y = y$.

Dica: $\mathrm{Cov}(X,W) = \mathrm{E}(XW) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(W)$ e $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y,Y)$.

1.7. Seja $X = (X_1, X_2, X_3)$ vetor aleatório com distribuição normal multivariada de parâmetros $\mu = (0,1,-1)$ e $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Defina as distribuições marginais de X_1, X_2 e X_3.

(b) Defina a distribuição conjunta de (X_1, X_2).

(c) Defina a distribuição de $X_1|X_3 = x_3$.

(d) As variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes? Justifique sua resposta.

(e) As variáveis aleatórias X_1 e X_3 são independentes? Justifique sua resposta.

(f) As variáveis aleatórias $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ são independentes? Justifique sua resposta.

(g) Seja $Y = (Y_1, Y_2)$ vetor aleatório tal que $Y = AX + a$ com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encontre a distribuição conjunta de (Y_1, Y_2).

1.8. Encontre os valores de $\Gamma(5)$ e $\Gamma(3,5)$.

1.9. Calcule as integrais abaixo usando o resultado da função Gama Modificada. Quando possível encontre a resposta numérica. Quando isso não for possível, reduza ao máximo o argumento da função Gama.

$$\text{(a)} \int_0^\infty x^3 e^{-2x} dx \qquad \text{(b)} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{x}{4}} dx \qquad \text{(c)} \int_0^\infty x^{\frac{9}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

1.10. Seja $W \sim Gama(\alpha, \lambda)$. Encontre $\mathrm{E}\left(\frac{1}{W}\right)$ e $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{W}\right)$ em função dos parâmetros α e λ.

1.11. Seja $W \sim Gama(3, 2)$. Calcule $\mathrm{P}(1 \leq W \leq 2)$ a partir da tabela da distribuição qui-quadrado.

1.12. Suponha que o tempo (em horas) até a ocorrência de um problema na n-ésima bomba de combustível de um certo tipo de aeronave seja uma variável aleatória contínua com distribuição Gama($\alpha = n, \lambda = 1/100$). Se ocorre problema em uma bomba, esta é desligada e outra bomba é automaticamente acionada.

Em uma dessas aeronaves foram instaladas duas bombas de combustível. Quando ocorre um problema na primeira bomba, a segunda bomba é automaticamente acionada. Se ocorrer um problema na segunda bomba durante um voo não há mais bombas para serem acionadas e por isso é necessário realizar um pouso de emergência.

Considerando que essa aeronave irá realizar um voo com duração de 50 horas, responda:

(a) Qual a probabilidade do voo terminar sem que a segunda bomba tenha sido acionada?

(b) Qual a probabilidade de ser necessário realizar um pouso de emergência devido a problemas com a bomba de combustível?

(c) Qual o tempo médio de voo dessa aeronave (com duas bombas) desde a sua decolagem até a realização de um pouso de emergência?

(d) Quantas bombas deveriam ter a aeronave para que a probabilidade de realizar um pouso de emergência devido a problemas com a bomba de combustível seja menor que 1%?

1.13. Cada item a seguir apresenta uma função de densidade. Identifique quais são funções de densidade de uma variável aleatória com distribuição gama ou normal, e no caso de ser uma dessas duas, indique os parâmetros da distribuição. Se quiser relembrar ainda mais os conceitos de probabilidade, identifique todas as distribuições.

(a) $f_X(x) = 1/2, \ -1 < x < 1$

(b) $f_X(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/18}, x \in \mathbb{R}$

(c) $f_X(x) = \dfrac{e^{-x/3}}{3}, \ x > 0$

(d) $f_X(x) = 4x^2 e^{-2x}, \ x > 0$

(e) $f_X(x) = \dfrac{4(1-x)}{9\sqrt[3]{x^2}}, \ 0 < x < 1$

(f) $f_X(x) = \dfrac{2e^{2x^2}}{\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$

(g) $f_X(x) = \dfrac{32}{x^3}, \ x \geq 4$

(h) $f_X(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}, \ x > 0$

1.14. Cada item a seguir apresenta uma função geradora de momentos. Identifique quais são funções geradoras de momentos de uma variável aleatória com distribuição gama ou normal, e no caso de ser uma dessas duas, indique os parâmetros da distribuição. Se quiser relembrar ainda mais os conceitos de probabilidade, identifique todas as distribuições.

(a) $M_X(t) = \sqrt{\dfrac{3}{1-3}}, \ t < 3$

(b) $M_X(t) = \left(\dfrac{1+e^t}{2}\right)^4$

(c) $M_X(t) = e^{2t} e^{4t^2}$

(d) $M_X(t) = e^{e^t - 1}$

(e) $M_X(t) = \dfrac{1}{1-t}, \ t < 1$

(f) $M_X(t) = \dfrac{1}{3 - 2e^t}$

(g) $M_X(t) = e^{t^2}$

(h) $M_X(t) = \left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^5, \ t < 1/2$

Lista 2

Distribuições Amostrais

2.1. ([Larson, 1982] - Capítulo 6) Seja (X_1, X_2) uma amostra aleatória de tamanho 2 de uma população normal de média 0 e variância σ^2. Calcule:

(a) $\mathrm{P}(X_1^2 + X_2^2 \leq \sigma^2)$

(b) $\mathrm{P}(X_1^2 + X_2^2 \leq 2\sigma^2)$

Dica: Qual a distribuição de $(X_1^2 + X_2^2)/\sigma^2$?

2.2. Considere uma amostra aleatória (X_1, X_2, X_3, X_4) de uma população $X \sim N(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathrm{P}(\sum_{j=1}^{4} X_j^2 \geq 1,92\sigma^2)$.
Obs: Use uma tabela ou o computador para achar a resposta numérica.

2.3. Seja uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, onde μ_0 é uma constante conhecida. Defina $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$.

(a) $\hat{\sigma}^2$ é uma estatística? Justifique.

(b) Mostre que $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$.

(c) Encontre a distribuição amostral de $\hat{\sigma}^2$.

2.4. Sejam duas amostras aleatórias independentes $(X_1, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, \ldots, Y_m)$ de populações $X \sim Poisson(\lambda_x)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_y)$, respectivamente. Mostre que

$$n\bar{X} + m\bar{Y} \sim Poisson(n\lambda_x + m\lambda_y).$$

Dica: Primeiro mostre que $n\bar{X}$ e $m\bar{Y}$ são *Poisson*. Quais os parâmetros de cada uma dessas v.a.? Depois mostre que soma de v.a. independentes com distribuição de Poisson também é uma Poisson. Aplique esse último resultado para terminar a demonstração.

2.5. ([Larson, 1982] - Capítulo 6) Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de uma população $X \sim Exp(\lambda)$. Encontre a distribuição de:

(a) $\sum_{i=1}^{n} X_i$

(b) $2\lambda n\bar{X}$

2.6. Seja X_1, …, X_n amostra aleatória de X com função densidade $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ e $\theta > 0$.

(a) Mostre que se $Y = -\ln(X)$ então $Y \sim Exp(\theta)$.

(b) Encontre a distribuição amostral de $T(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$.

2.7. Seja X_1, X_2, …, X_n uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$.

(a) $X_{(1)}$ é uma estatística?

(b) Encontre a distribuição de $X_{(1)}$.

2.8. ([Larson, 1982] - Capítulo 5) Seja $U_1, U_2, \ldots, U_n$ uma amostra aleatória de $U \sim U(0,1)$.

(a) Encontre a densidade de $U_{(1)}$.

(b) Encontre a densidade de $U_{(n)}$.

(c) Calcule $\mathrm{P}(U_{(1)} \leq \frac{1}{2})$ e $\mathrm{P}(U_{(n)} \leq \frac{1}{2})$.

2.9. ([Larson, 1982] - Capítulo 5) Seja X uma variável aleatória normal padrão e Y uma qui-quadrado com $\nu = 4$ graus de liberdade, sendo X e Y independentes. Qual o valor de a tal que $\mathrm{P}(|X| \leq a\sqrt{Y}) = 0,9$. Obs: Use uma tabela ou o computador para achar a resposta numérica.

2.10. Suponha que $X_1, \ldots, X_{10}$ formem uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \sigma^2)$. Determine os valores de c e k tais que

$$\frac{c\,(X_1 + X_2)}{\left(\sum_{i=3}^{10} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sim t_k.$$

2.11. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 5) Demonstre as seguintes afirmações:

(a) Se $T \sim t_n \ \Rightarrow \ T^2 \sim F_{1,n}$

(b) Se $X \sim F_{n,m} \ \Rightarrow \ \frac{1}{X} \sim F_{m,n}$

(c) Se $X \sim F_{n,m} \ \Rightarrow \ \frac{\frac{n}{m}X}{1+\frac{n}{m}X} \sim Beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$

2.12. ([Larson, 1982] - Capítulo 6) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ uma amostra aleatória de uma população $N(\mu, \sigma^2)$. Com o auxílio de uma tabela calcule $\mathrm{P}(|\bar{X} - \mu| \leq S)$, onde $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$ e $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2$.

2.13. Suponha que $X_1, \ldots, X_{16}$ sejam uma amostra aleatória de $N(\mu, \sigma^2)$. Calcule, com auxílio de tabelas ou do computador, as seguintes probabilidades:

(a) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu)^2 < 2\sigma^2\right)$

(b) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \bar{X})^2 < 2\sigma^2\right)$

2.14. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam i.i.d $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, que $Y_1, \ldots, Y_m$ sejam i.i.d $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ e que $(X_1, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, \ldots, Y_m)$ sejam vetores aleatórios independentes.

(a) Mostre que $S(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) = \frac{m}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{Y_j - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \sim F_{n,m}$.

(b) $S(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ é uma estatística?

2.15. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam i.i.d $Exp(\lambda_x)$, que $Y_1, \ldots, Y_m$ sejam i.i.d $Exp(\lambda_y)$ e que $(X_1, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, \ldots, Y_m)$ sejam vetores aleatórios independentes.

(a) Encontre as distribuições amostrais das estatísticas $\frac{\lambda_x \bar{X}}{\lambda_y \bar{Y}}$ e $\frac{\lambda_y \bar{Y}}{\lambda_x \bar{X}}$.

(b) Encontre o erro na frase anterior.

Lista 3

Estimação Pontual: Método dos Momentos e da Máxima Verossimilhança

3.1. Para cada item abaixo, considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X definida no item. Encontre o estimador de cada parâmetro distribucional pelo método dos momentos. Verifique em cada item se a imagem do estimador coincide com o espaço paramétrico.

(a) $X \sim Geom(p)$ (b) $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$ (c) $X \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$

Dica: Sejam $Y \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$ e $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então $Y \stackrel{d}{=} e^X$ ou, o que é equivalente, $ln(Y) \stackrel{d}{=} X$. Use essa informação para encontrar os momentos da Lognormal.

3.2. Seja X uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p. Dada uma amostra aleatória com n observações de X, encontre o estimador para p pelo método dos momentos.

3.3. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população $X \sim Exp(\lambda)$.

(a) Encontre o estimador para λ pelo método dos momentos.
(b) Encontre o estimador para $\theta = \lambda^2$ pelo método dos momentos.
(c) Encontre o estimador para λ pelo método da máxima verossimilhança.
(d) Encontre o estimador para $\theta = \lambda^2$ pelo método da verossimilhança.

3.4. Para os itens a seguir, considere $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X. Encontre o estimador dos parâmetros distribucionais a partir do método da máxima verossimilhança.

(a) $X \sim Geom(p)$ (b) $X \sim Bin(N_0, p)$, sendo n_0 conhecido (c) $X \sim U[-\theta, \theta]$

Atenção: Cuidado na resolução dos problemas de maximização. E também não esqueça de fazer o teste da 2ª derivada sempre que preciso.

3.5. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população $X \sim Poisson(\lambda)$. Seja $\eta = \mathrm{E}(X^2)$.

(a) Encontre o estimador para η pelo método dos momentos, vamos chamá-lo de $\hat{\eta}_{MM}$.
(b) Encontre o estimador para η pelo método da máxima verossimilhança, vamos chamá-lo de $\hat{\eta}_{MV}$.

Considere que os seguintes valores representam a observação de uma amostra de tamanho 6 de X: 1 3 3 1 3 0.

(c) Encontre as estimativas para $\hat{\eta}_{MM}$ e $\hat{\eta}_{MV}$.

3.6. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, com μ_0 conhecido.

(a) Encontre o estimador para σ^2 pelo método dos momentos.
(b) Encontre o estimador para σ^2 pelo método da máxima verossimilhança.
(c) Os valores abaixo são a observação de uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_0 = 5, \sigma^2)$. Encontre as estimativas para σ^2 pelos métodos vistos nos itens (a) e (b).

$$6,22 \quad 6,62 \quad 2,57 \quad 3,85 \quad 3,06 \quad 3,96 \quad 6,95 \quad 4,42 \quad 6,25 \quad 7,27 \quad 3,23 \quad 4,87$$

(d) Repita o item (3.6c) agora para a nova amostra de $X \sim N(\mu_0 = 5, \sigma^2)$, apresentada abaixo. O resultado é o que você esperava? Comente.

$$2,36 \quad 3,94 \quad 3,34 \quad 4,48 \quad 1,94 \quad 5,46 \quad 3,32 \quad 4,14 \quad 4,32 \quad 4,83 \quad 7,02 \quad 3,08$$

3.7. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Capítulo 3)
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população $X \sim Exp(\lambda)$.

(a) Encontre o estimador para λ pelo método da máxima verossimilhança.
(b) Encontre o estimador para $\mu = \mathrm{E}(X)$ pelo método da máxima verossimilhança.
(c) Encontre o estimador para $\eta = \mathrm{P}(X > 1)$ pelo método da máxima verossimilhança.
(d) Os valores abaixo são a observação de uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$. Encontre as estimativas por máxima verossimilhança para os parâmetros λ, μ e η definidos acima.

$$0,081 \quad 0,637 \quad 0,183 \quad 0,743 \quad 0,207 \quad 0,318 \quad 0,096 \quad 0,389$$

3.8. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 7 e [Bolfarine e Sandoval, 2000] - Capítulo 3)
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável $X \sim \mathfrak{D}(\theta)$ cuja função densidade é definida por:

$$f_X(x) = \theta x^{\theta-1}, \; 0 \leq x \leq 1 \; \text{ e } 0 \leq \theta \leq \infty.$$

(a) Encontre o estimador para θ pelo método dos momentos.
(b) Encontre o estimador para θ pelo método da máxima verossimilhança.
(c) Encontre o estimador para $\mu = \mathrm{E}(X)$ pelo método dos momentos.
(d) Encontre o estimador para $\mu = \mathrm{E}(X)$ pelo método da máxima verossimilhança.

3.9. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 7 e [Bolfarine e Sandoval, 2000] - Capítulo 3)
Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X com densidade descrita abaixo, sendo $\theta > 0$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^2} & , \; x \geq \theta \\ 0 & , \; \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que não existe estimador para θ pelo método dos momentos.
Dica: mostre que não existe nenhum momento de X.
(b) Encontre o estimador para θ pelo método da máxima verossimilhança.
(c) Encontre o estimador para $\eta = \mathrm{E}(1/X)$ pelo método da máxima verossimilhança.

3.10. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 7)

Uma única observação é obtida de uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade $p(.;\theta)$, com $\theta \in \psi = \{1, 2, 3\}$. O quadro ao lado apresenta as possíveis funções de probabilidades para cada $\theta \in \psi$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ.

X	$p(x;1)$	$p(x;2)$	$p(x:3)$
0	1/3	1/4	0
1	1/3	1/4	0
2	0	1/4	1/4
3	1/6	1/4	1/2
4	1/6	0	1/4

3.11. Em um município com 10.000 habitantes foi retirada uma amostra, com reposição, de 100 habitantes, com o objetivo de estimar o número de pessoas que votariam a favor de uma discutível obra proposta pelo prefeito. Sessenta e sete pessoas responderam “sim”. A partir do método dos momentos, forneça uma estimativa do total de pessoas do município que votariam a favor da obra.

3.12. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) João realizou o seguinte experimento: a partir da linha de lance livre lançou uma bola de basquete até fazer uma cesta. Esse experimento foi realizado 5 vezes e João precisou dos seguintes números de arremessos em cada um das vezes: 5, 1, 7, 4 e 9. Encontre a estimativa pelo método dos momentos para a probabilidade de João acertar a cesta em um arremesso a partir da linha de lance livre.

3.13. Considere que em uma cidade existam N táxis circulando sendo que, registrados e com a documentação em dia, são $N_0 = 4.532$ táxis. Com o intuito de checar se existem muitos táxis não regularizados, o órgão de fiscalização precisa estimar o valor de N. Par isso foi feita uma blitz e checadas documentações de 100 táxis, selecionados ao acaso e com reposição. Entre eles, 62 estavam devidamente registrados enquanto os outros 38 não. Encontre uma estimativa pelo método dos momentos para o número total de táxis nessa cidade, isto é, para N.

3.14. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Assuma que o número de carros vendidos por dia por um negociante seja uma variável aleatória de Poisson com média μ. Encontre a estimativa por máxima verossimilhança para μ dado que:

(a) em 20 dias o negociante vendeu 30 carros;
(b) em 20 dos últimos 30 dias ele não fez venda alguma e nos outros 10 dias ele vendeu pelo menos um carro.

3.15. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Considere que o tempo de vida de um componente elétrico seja uma variável aleatória exponencial com o parâmetro λ. Dez destes componentes passaram pelo seguinte teste: os componentes foram ligados e após 100 horas foram observados quais permaneciam em funcionamento e quais falharam. Ou seja, o único registro de dados foi o número de componentes que falharam em menos de 100 horas versus o número que não falhou. Verificou-se que três falharam antes de 100 horas e os outros sete não. Considere que o teste garantiu independência entre os tempos de vidas de componentes diferentes. Encontre a estimativa por máxima verossimilhança para:

(a) O parâmetro λ. (b) O tempo médio de vida desse componente.

Lista 4

Estimação Pontual: Propriedade dos Estimadores

4.1. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Ber(p)$. Encontre o valor de a tal que W definido abaixo seja não-tendencioso para p.

$$W = a\left\{X_1 + X_1^2 + X_2 + X_2^2 + \ldots + X_n + X_n^2\right\}$$

4.2. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Geom(p)$. Encontre os valores de a e b tais que W definido abaixo seja não-tendencioso para $1/p$.

$$W = b\left[X_1(aX_2 - X_1) + X_2(aX_3 - X_2) + \ldots + X_{n-1}(aX_n - X_{n-1})\right]$$

4.3. Considere uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $X \sim Ber(p)$. Mostre que o estimador de máxima verossimilhança para a variância de X é:

(a) assintoticamente não-tendencioso, (b) fraca e fortemente consistente.

4.4. Considere uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e o correspondente estimador de máxima verossimilhança para $\theta = \mu^2$.

(a) Encontre o viés deste estimador e diga se ele é não-tendencioso ou assintoticamente não-tendencioso para μ^2?

(b) Este estimador é fortemente consistente para μ^2? Justifique?

4.5. Seja X_1, ..., X_n amostra aleatória de X com função densidade $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ e $\theta > 0$. Seja $\hat{\theta}_{MV} = -n/\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ o estimador de máxima verossimilhança para θ, encontrado no exercício 3.8(b).

(a) Encontre o viés de $\hat{\theta}_{MV}$ e diga se esse estimador é não tendencioso, assintoticamente não tendencioso ou tendencioso. (Dica: reveja o resultado do exercício 2.6)

(b) Encontre a variância de $\hat{\theta}_{MV}$ e diga se esse estimador é consistente em EQM.

4.6. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\lambda)$ e $\eta = \tau(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)$.

(a) Encontre os estimadores $\hat{\eta}_{MM}$ e $\hat{\eta}_{MV}$.

(b) Mostre que $\hat{\eta}_{MM}$ é não-tendencioso para η.

(c) Mostre que $\hat{\eta}_{MV}$ é assintoticamente não-tendencioso para η.

(d) Mostre que ambos são fracamente consistentes para η.

4.7. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Seja $\{X_1, X_2\}$ uma amostra aleatória de tamanho 2 de $X \sim Exp(\lambda)$. Sejam $T_1 = \sqrt{X_1 X_2}$ e $T_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ estimadores para a média de X. Mostre que T_1 é mais eficiente que T_2. Dica: Você vai precisar encontrar $E(\sqrt{X})$.

4.8. ([Larson, 1982] - Capítulo 7 - modificado) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Ber(p)$. Seja $T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n+1}$ um estimador para p.

(a) Encontre o viés de T.

(b) T é um estimador não-tendencioso?

(c) T é um estimador assintoticamente não-tendencioso?

(d) Calcule o erro médio quadrático de T.

(e) T é consistente em EQM?

4.9. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$. Encontre o valor de a que minimiza $EQM(a\bar{X})$, considerando $a\bar{X}$ um estimador para $\mathrm{E}(X)$.

4.10. ([Larson, 1982] - Capítulo 7 - modificado) Seja X uma variável aleatória cuja densidade é definida por: $f(x) = e^{a-x}, \ x \geq a$.

(a) Encontre o estimador de a pelo método dos momentos.

(b) Encontre o estimador de a pelo método da máxima verossimilhança.

(c) Determine se esses dois estimadores são ou não tendenciosos.

(d) Qual deles é mais eficiente?

(e) Se for o caso, torne os estimadores tendenciosos em não-tendenciosos.

(f) Para os dois estimadores não-tendenciosos finais, decida qual deles é mais eficiente.

4.11. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Dado uma amostra de tamanho n, considere o estimador $a\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ para a variância σ^2 de uma população normal de parâmetros μ e σ^2 desconhecidos. Encontre o valor de a que minimiza $EQM\left[a\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$.
Dica: Como a amostra é normal, conhecemos as distribuições amostrais de S^2 e de $\hat{\sigma}^2$.

Lista 5

Estimadores Não-Viesados

5.1. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de $X \sim Ber(p)$.

(a) Encontre a variância mínima pelo limite de Cramér-Ráo para um estimador não-tendencioso de p.

(b) Existe um estimador eficiente para p?

5.2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, com μ_0 conhecido.

(a) Mostre que $\hat{\sigma}^2_{MV}$ é eficiente para σ^2.

(b) Mostre que não existe estimador eficiente para $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

5.3. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. As condições de regularidade do limite de Cramér-Rao são satisfeitas para os dois parâmetros.

(a) Encontre o limite inferior para a variância de um estimador não-tendenciosos para μ a partir da desigualdade de Cramér-Rao.

(b) Encontre o limite inferior para a variância de um estimador não-tendenciosos para σ^2 a partir da desigualdade de Cramér-Rao.

(c) Você consegue encontrar um estimador não-tendencioso para σ^2 com a variância igual a variância mínima encontrada no item acima?

5.4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim Gama(\alpha_0, \lambda)$, α_0 conhecido. Sejam $\tau_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ e $\tau_2(\lambda) = \lambda$.

(a) Encontre as variâncias mínimas de Cramér-Rao para estimadores não-tendenciosos de $\tau_1(\lambda)$ e $\tau_2(\lambda)$.

(b) Mostre que o estimador de máxima verissimilhança de $\tau_1(\lambda)$ é eficiente.

(c) Mostre que não existe estimador eficiente para $\tau_2(\lambda)$.

5.5. Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória de tamanho 2 de $X \sim Geom(p)$.

(a) Mostre que $T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ é suficiente para p.

(b) Mostre que $T(X_1, X_2) = X_1 + 2X_2$ não é suficiente para p.

5.6. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\lambda)$.

(a) Mostre que $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$ é suficiente para λ.

(b) Mostre que $T(X_1, \ldots, X_n) = X_1$ não é suficiente para λ.

5.7. Considere uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $X \sim Ber(p)$.

(a) Mostre que $T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para p.

(b) Mostre que $T(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 + X_3$ não é suficiente para p.

5.8. Mostre que os seguintes modelos estatísticos admitem distribuições pertencentes à família exponencial unidimensional. Em seguida apresente uma estatística suficiente para os parâmetros desconhecidos da distribuição.

(a)	Bernoulli(p)	(b)	Binomial(N, p), N conhecido
(c)	Normal(μ, σ_0^2), σ_0^2 conhecido	(d)	Normal(μ_0, σ^2), μ_0 conhecido
(e)	Binomial Negativa(r_0, p), r_0 conhecido	(f)	Geométrica(p)
(g)	Gama(α_0, λ), α_0 conhecido	(h)	Gama(α, λ_0), λ_0 conhecido
(i)	Beta(α_0, β), α_0 conhecido	(j)	Beta(α, β_0), β_0 conhecido

5.9. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.

(a) Encontre uma estatística suficiente para σ^2.

(b) Obtenha a partir desta estatística um estimador não viciado para σ^2.

(c) Verifique se este estimador é eficiente.

5.10. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Binomial(2, \theta)$.

(a) Encontre uma estatística suficiente para θ.

(b) Obtenha um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente.

(c) Verifique se o estimador é eficiente.

5.11. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1,\ \theta > 0.$$

(a) Mostre que a f.d.p. pertence à família exponencial.

(b) Encontre uma estatística suficiente para θ e sua distribuição amostral. Dica: $-\ln(X) \sim Exp(\theta)$.

(c) Sugira um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente e verifique se ele é eficiente. (Dica: reveja o resultado do exercício 4.5)

5.12. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com f.d.p. dada por

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta,\ \theta > 0$$

(a) Encontre uma estatística suficiente para θ.

(b) Baseado nesta estatística, obtenha um estimador não viciado para θ.

5.13. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$.

(a) Mostre que o estimador $\hat{\eta} = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ é não viciado para $\eta = \mu^2$.

(b) Existe ENVVUM para μ^2?

(c) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de $\eta = \mu^2$ e verifique se $\hat{\eta}$ é eficiente.

5.14. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Bernoulli(\theta)$. Obtenha o ENVVUM para $\eta = \theta(1-\theta) = \mathrm{Var}(X)$.
Sugestão: verifique se $S^2 = \dfrac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})$ é não viciado para $\theta(1-\theta)$.

5.15. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 2.6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição geométrica alternativa com parâmetro θ, isto é, sua função de probabilidade é

$$p(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad 0 < \theta < 1.$$

Encontre o ENVVUM para $1/\theta$.

5.16. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$.

(a) Encontre o ENVVUM de λ. Esse estimador é eficiente?

(b) Encontre o ENVVUM de $\mu = \mathrm{E}[X]$. Esse estimador é eficiente?

(c) Encontre o ENVVUM de $\theta = \mathrm{Var}(X)$. Esse estimador é eficiente?

Dica: Se preciso "Fabrique" um estimador não tendencioso a partir do estimador de MV.

5.17. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 7) Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$, com α conhecido. Encontre o ENVVUM para $\eta = \frac{1}{\lambda}$.

5.18. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 7) Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre o ENVVUM de $\sigma \equiv \sqrt{\sigma^2}$. Dica: "Fabrique" um estimador não tendencioso para σ a partir de $S = \sqrt{S^2}$.

5.19. Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X com função densidade $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ e $\theta > 0$. Seja $\hat{\theta}_{MV} = -n/\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ o estimador de máxima verossimilhança para θ, encontrado no exercício 3.8(b). Encontre o ENVVUM para θ e diga se este estimador é eficiente. Dica: reveja o resultado do exercício 3.5.

Lista 6

Intervalo de Confiança

6.1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$.

(a) Encontre uma quantidade pivotal para λ e deduza um $IC_{\lambda,100(1-\alpha)\%}$ bilateral exato.

(b) Encontre uma quantidade pivotal assintótica para λ e deduza um $IC_{\lambda,100(1-\alpha)\%}$ bilateral aproximado.

(c) Suponha que a amostra abaixo tenha sido retirada de uma população $X \sim Exp(\lambda)$. Considere o coeficiente de confiança de 95% e encontre as estimativas para os intervalos deduzidos nos itens acima.

$$0,07 \quad 3,11 \quad 1,61 \quad 0,57 \quad 3,38 \quad 5,42 \quad 0,83 \quad 0,02 \quad 1,76$$

6.2. No programa R podemos gerar amostras de variáveis aleatórias. Por exemplo, a função `rexp(n,rate)` gera uma amostra de tamanho `n` de uma variável aleatória exponencial com parâmetro λ igual a `rate`. Use o programa R para gerar 100 amostras distintas de $X \sim Exp(\lambda = 1)$. Em seguida, para cada uma das 100 amostras geradas, encontre a estimativa do intervalo de confiança exato para λ, com confiabilidade de 95%, e contabilize quantos dos 100 intervalos contém o real valor de λ ($\lambda = 1$). Quantos intervalos você espera que contenha o valor 1?

6.3. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) O tempo até a falha de um equipamento eletrônico pode ser considerado uma variável aleatória exponencial com parâmetro λ (desconhecido), isto é, $T \sim Exp(\lambda)$ onde T é o tempo até a ocorrência de uma falha. Foram testados 20 desses equipamentos e medidos os respectivos tempos (em horas) até a ocorrência de falha. Supondo independência entre tais observações, levantou-se a seguinte amostra após os testes:

377,6	590,8	72,9	69,9	218,0	1.447,5	614,8	269,8	478,3	73,5
695,4	381,0	618,8	2.212,0	527,3	517,6	938,0	327,4	168,5	294,2

Para as contas dos itens a seguir considere o coeficiente de confiança de 90% e, se preciso, $\sum_{i=1}^{20} t_i = 10.893,3$, onde t_i é o tempo até a falha do i-ésimo equipamento testado.

(a) Encontre a estimativa para o intervalo de confiança bilateral para o parâmetro $\mu = 1/\lambda$.

(b) Encontre a estimativa para o intervalo de confiança bilateral para o parâmetro $p = \mathrm{P}(T > 100)$, que é a confiabilidade do equipamento para um período de 100 horas.

6.4. Usando os mesmos dados do exercício (3), defina limites inferiores para os parâmetros μ e p a partir de intervalos de confiança unilaterais para tais parâmetros. Use novamente coeficiente de confiança de 90%. Qual a interpretação para tais limites?

6.5. Repita o exercício 3 considerando agora intervalos assintóticos.

6.6. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 5.6) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\theta, \theta)$. Sugira uma quantidade pivotal e construa um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

6.7. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) O numero de casas vendidas por semana por uma firma de corretagem pode ser considerada uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ. Foram observados, em 15 semanas consecutivas, os totais de venda:

$$3 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 4.$$

Suponha que 15 seja "grande o suficiente" e que pode ser assumida independência entre as semanas. Considerando o coeficiente de confiança de 95%, encontre:

(a) um intervalo de confiança bilateral aproximado para o número médio de casas vendidas por semana;

(b) um limite superior para o número médio de casas vendidas por semana a partir de um intervalo de confiança unilateral aproximado.

6.8. Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim U[0, \theta]$.

(a) Defina uma quantidade pivotal exata para θ e a partir dela deduza um intervalo de confiança exato para θ. Procure o intervalo com menor amplitude.

(b) Defina uma quantidade pivotal assintótica para θ e a partir dela deduza um intervalo de confiança aproximado para θ. Procure o intervalo com menor amplitude.
Dica: lembre-se que o estimador $\hat{\theta}_{MM} = 2\bar{X}$ é fortemente consistente para θ.

(c) Baseado na amostra de X apresentada a seguir e considerando o coeficiente de confiança de 95%, encontre estimativas para os dois intervalos de confiança para θ deduzidos nos itens anteriores.

$$0,38 \quad 0,10 \quad 0,59 \quad 0,89 \quad 0,88 \quad 0,95 \quad 0,01 \quad 0,40 \quad 0,86 \quad 0,13 \quad 0,24 \quad 0,04$$

6.9. ([Roussas, 2003] - Seção 10.1) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X cuja função densidade é definida por:

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \;, \qquad x \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; \lambda > 0.$$

(a) Mostre que $Y_i = |X_i| \sim Exp(\lambda)$.

(b) Mostre que $Q = 2\lambda n\bar{Y} = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \chi^2_{2n}$.

(c) A partir de Q deduza um intervalo de confiança para λ.

(d) Suponha a amostra de X apresentada a seguir. Encontre estimativas para o intervalo de confiança deduzido acima para os diferentes níveis de confiança: 90%, 95% e 99%.

$$0,067 \;\; 0,087 \;\; -0,438 \;\; -0,099 \;\; -0,774 \;\; -0,393 \;\; -0,555 \;\; 0,348 \;\; -0,181 \;\; 0,317$$

6.10. ([Roussas, 2003] - Seção 10.1) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X cuja função densidade é definida por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \;, \qquad x > \theta \;,\; \lambda > 0 \;\text{ e }\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Considerando λ um parâmetro conhecido, vamos buscar um intervalo de confiança para θ.

(a) Mostre que $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\theta)}$, $x > \theta$.

(b) Veja que $\hat{\theta}_{MV} = X_{(1)}$. Mostre que $f_{X_{(1)}}(x) = n\lambda e^{-n\lambda(x-\theta)}$, $x > \theta$.

(c) Seja $Q = n\lambda(X_{(1)} - \theta)$. Mostre que $Q \sim Exp(1)$, logo Q é quantidade pivotal para θ.

(d) A partir de Q deduza um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança de $1 - \alpha$. Busque o intervalo de menor amplitude.

(e) Considere os valores abaixo uma amostra de X para $\lambda = 1/2$. Encontre a estimativa para o intervalo de confiança deduzido acima com coeficiente de confiança de 95%.

$$7,79 \qquad 5,94 \qquad 7,07 \qquad 5,49 \qquad 10,13 \qquad 8,12 \qquad 5,19 \qquad 5,62$$

6.11. ([Larson, 1982] - Capítulo 7) A cada hora uma estação de rádio transmite um "beep". A estação tem um quartz que é usado para engatilhar o instante do beep. A menos que o quartz seja de qualidade muito boa e mantido sob condições extremamente cuidadosas, este não é 100% acurado. Assumindo que a diferença entre a hora do "beep" e a hora exata é, em micro-segundos, uma v.a. $X \sim U[-\theta, \theta]$, e considerando os valores abaixo um amostra de X, construa um intervalo de confiança para θ. Dica: Se $X \sim U[-\theta, \theta] \;\Rightarrow\; Y = |X| \sim U[0, \theta]$.

$$221 \quad 265 \quad -140 \quad 327 \quad -401 \quad 308 \quad -317 \quad 447 \quad -137 \quad -228 \quad -477 \quad 69 \quad 475 \quad 56 \quad -101.$$

6.12. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 9) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X cuja função de distribuição F está definida a seguir. Considere α_0 conhecido e $\beta > 0$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ (x/\beta)^{\alpha_0} & , 0 \leq x \leq \beta \\ 1 & , x > \beta \end{cases}$$

(a) Encontre $\hat{\beta}_{MV}$ e, a partir dele, encontre uma quantidade pivotal para β.

(b) Construa um intervalo de confiança para β com coeficiente de confiança de 95%.

(c) O tamanho (em milimetros) de ovos de uma certa espécie de pássaros pode ser modelada por essa distribuição. Supondo a amostra abaixo e que $\alpha_0 = 12$, encontre a estimativa para o intervalo de confiança obtido no item acima.

$$22,0 \quad 23,9 \quad 20,9 \quad 23,8 \quad 25,0 \quad 24,0 \quad 21,7 \quad 23,8 \quad 22,8 \quad 23,1 \quad 23,1 \quad 23,5 \quad 23,0 \quad 23,0$$

6.13. Uma pesquisa foi realizada com o objetivo de verificar a eficácia de uma certa vacina no combate a uma certa doença. Dois grupos de pessoas, o primeiro com 195.365 pessoas e o segundo com 154.568 pessoas, participaram do estudo. A vacina foi aplicada nas pessoas do segundo grupo, enquanto que as pessoas do primeiro grupo receberam um placebo. Após a vacinação os casos da doença observados nos dois grupos foram 135 e 45, respectivamente. Estabeleça um procedimento, com base em estimação intervalar, para analisar a eficácia da vacina. Use um nível de confiança de 90%.

6.14. ([Bolfarine e Sandoval, 2000] - Seção 5.6 e [Roussas, 2003] - Seção 10.1)
Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\theta_1)$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de $Y \sim Exp(\theta_2)$. Assumindo que as duas amostras são independentes,

(a) obtenha uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ_1/θ_2.

(b) Suponha que $\theta_1 = 1,5$ e $\theta_2 = 2,0$. No computador, simule uma amostra aleatória com $n = 10$ da variável X e com $m = 15$ da variável aleatória Y. Como fica o seu intervalo obtido a partir da quantidade pivotal encontrada em (a)?

6.15. Seja X_1, ..., X_n amostra aleatória de X com função densidade $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ e $\theta > 0$.

(a) Encontre um intervalo de confiança bilateral para θ com confiabilidade de 95% para uma amostra de tamanho 12.

(b) Encontre um intervalo de confiança bilateral para E(X) com confiabilidade de 95% para uma amostra de tamanho 12.

(c) Suponha que os valores abaixo formem uma amostra aleatória de X.

$$0,89 \quad 0,55 \quad 0,15 \quad 0,18 \quad 0,03 \quad 0,09 \quad 0,22 \quad 0,06 \quad 0,78 \quad 0,69 \quad 0,55 \quad 0,18$$

Encontre as estimativas para os intervalos de confiança para θ e $E(X)$ definidos nos itens acima.

Dica: reveja o resultas do exercício 2.6.

Lista 7

Teste de Hipótese

7.1. ([Larson, 1982] - Capítulo 8) Seja $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ amostra aleatória de $X \sim Ber(p)$. Suponha as hipóteses $H_0 : p = \frac{1}{4}$ contra $H_1 : p = \frac{3}{4}$. Considere o teste que rejeita H_0 somente se forem obtidos 4 sucessos na amostra. Calcule α e β para esse teste.

7.2. ([Larson, 1982] - Capítulo 8) Dado que $X \sim U[0, \theta]$, é de interesse testar $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta = 2$, a partir de uma amostra aleatória de tamanho $n = 2$ e com o teste Γ : "Rejeite-se H_0 se e só se $\bar{x} > 0.99$". Calcule as probabilidades de erro tipo 1 e tipo 2 deste teste.

7.3. Assuma que temos uma amostra aleatória de tamanho n de uma v.a. contínua X e gostaríamos de testar a hipótese simples que a densidade de X é $f_X(x) = 2x$, $0 < x < 1$, contra a hipótese alternativa, também simples, de que a densidade de X é $f_X(x) = 1$, $0 < x < 1$.

(a) ([Larson, 1982] - Capítulo 8) Encontre o teste UMP para tais hipóteses. Dica: Veja que sob H_0 temos $X \sim Beta(2, 1)$ e sob H_1 temos $X \sim Beta(1, 1)$.

(b) Reescreva a região crítica considerando $\alpha = 0,05$ e $n = 10$. Dica: Se $X \sim Beta(\alpha, 1)$ então $Y = -\ln(X) \sim Exp(\alpha)$.

(c) Qual decisão tomar se for recolhida a amostra de X a seguir?

$$0,0472 \quad 0,821 \quad 0,241 \quad 0,543 \quad 0,00717 \quad 0,207 \quad 0,0301 \quad 0,191 \quad 0,319 \quad 0,779$$

7.4. Sabe-se que uma variável aleatória X tem distribuição Normal com média $\mu = 5$, mas variância σ^2 desconhecida.

(a) ([Larson, 1982] - Capítulo 8) Qual seria a região crítica do teste UMP para testar $H_0 : \sigma^2 = 10$ contra $H_1 : \sigma^2 = 20$, a partir de uma amostra aleatória de X de tamanho n? Como ficaria a sua resposta se a hipótese alternativa fosse trocada para $H_1 : \sigma^2 = 5$?

(b) Reescreva cada região crítica do item acima considerando $n = 15$ e $\alpha = 0.05$.

(c) Calcule o poder de cada um dos dois testes criados.

7.5. ([Bolfarine e Sandoval, 2000]-Capítulo 6) Seja $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim Poisson(\theta)$. Considere as hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.

(a) Defina a região crítica do teste UMP para testar as hipóteses acima.

(b) Reescreva a região crítica considerando $\alpha = 0,05$, $\theta_0 = 1$ e $n = 25$. Dica: Use o TCL para aproximar a soma de variáveis aleatórias de *Poisson* por uma Normal.

(c) Para os mesmos valores de α, θ_0 e n, defina a função poder e esboce seu gráfico.

7.6. ([Bolfarine e Sandoval, 2000]-Capítulo 6) Seja $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim N(0, \sigma^2)$. Considere as hipóteses: $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ contra $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

(a) Defina a região crítica do teste UMP para testar as hipóteses acima.

(b) Reescreva a região crítica considerando $\alpha = 0,05$, $\sigma_0^2 = 9$ e $n = 9$.

(c) Para os mesmos valores de α, σ_0^2 e n, defina a função poder e esboce seu gráfico.

7.7. ([Roussas, 2003] - Seção 11.4 e [Bolfarine e Sandoval, 2000]-Capítulo 6) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$, com μ_0 conhecido.

(a) Encontre o teste da razão de verossimilhança generalizado de nível α para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contra $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Dica: A função $g(y) = y^{n/2}e^{-y/2}$ é crescente para $y < n$ e decrescente para $y > n$, atingindo o máximo em $y = n$. Então $y^{n/2}e^{-y/2} < c$ se e somente se $y < c_1$ e $y > c_2$.

(b) Reescreva a região crítica desse teste para $n = 40$ e $\alpha = 0.01$.

7.8. Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim Exp(\lambda)$ e média $\mu = 1/\lambda$. Para as hipóteses consideradas nos itens a seguir defina a região crítica dos testes baseados em intervalos de confiança, considerando nível de significância $\alpha = 0.05$. Em seguida, tome a decisão caso a amostra recolhida para X seja:

$$0,983 \quad 10,273 \quad 4,336 \quad 2,064 \quad 7,183 \quad 3,274 \quad 8,733 \quad 6,376 \quad 0,380 \quad 1,250. \quad \left(\sum_{i=1}^{10} x_i = 44,852\right)$$

(a) $H_0 : \mu = 5 \ \times \ H_1 : \mu \neq 5$ (b) $H_0 : \mu = 5 \ \times \ H_1 : \mu < 5$ (c) $H_0 : \mu \leq 5 \ \times \ H_1 : \mu > 5$.

7.9. ([Bolfarine e Sandoval, 2000]-Capítulo 6) Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim N(\mu_X, 9)$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ amostra aleatória de $Y \sim N(\mu_Y, 25)$. Suponha independência entre X e de Y.

(a) Defina a regra de decisão para o teste de nível $\alpha = 0.05$ baseado em um intervalo de confiança para as seguintes hipóteses: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ versus $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$. Dica: primeiro encontre um IC para a diferença das médias das duas populações.

(b) Suponha amostras de X e Y tais que: $n = 9$; $\sum_{i=1}^{9} x_i = 3,4$; $m = 16$ e $\sum_{i=1}^{16} y_i = 4,3$. Qual a sua conclusão sobre as hipóteses acima, ao nível de significância de 5%?

Os exercícios 10-12 a seguir definem problemas. Para resolvê-los, primeiro defina o modelo estatístico e formule o problema em forma de um teste de hipótese. Em seguida, crie um teste para as hipóteses formuladas. Por fim, decida entre rejeitar ou não H_0 baseado na amostra observada e no nível de significância escolhido.

7.10. ([Larson, 1982] - Capítulo 8) Assuma que 13 mulheres seguiram uma mesma dieta durante um período de 2 meses. O total de peso perdido por cada uma, em quilograma, foi

3,9 4,3 5,6 5,6 4,1 6,5 3,7 5,9 4,3 3,7 4,4 5,9 5,0.

Assumindo que essa é uma amostra aleatória de uma população normal, você aceitaria a hipótese de que as mulheres que seguem esta dieta durante 2 meses perdem em média pelo menos 4,5 quilos, com nível de significância $\alpha = 0,1$?

7.11. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 8) Em 1.000 lançamentos de uma moeda saíram 560 caras e 440 coroas. É razoável assumir que essa moeda é justa?

7.12. Uma pesquisa foi realizada com o objetivo de verificar a eficácia de uma certa vacina no combate a uma certa doença. Dois grupos de pessoas, o primeiro com 195.365 pessoas e o segundo com 154.568 pessoas, participaram do estudo. A vacina foi aplicada nas pessoas do segundo grupo, enquanto que as pessoas do primeiro grupo receberam um placebo. Após a vacinação os casos da doença observados nos dois grupos foram 135 e 45, respectivamente. Qual a conclusão sobre a eficácia dessa vacina ao nível de significância de 10%?

7.13. Calcule o p-valor do teste realizado no exercício 3.

7.14. Calcule o p-valor para o teste formulado no exercício 6 se for observada a seguinte amostra para X. Em seguida decida entre aceitar ou rejeitar H_0.

$$0,69 \quad 4,62 \quad -0,67 \quad -3,81 \quad 0,05 \quad -5,07 \quad 3,06 \quad -0,65 \quad -3,02 \quad 0,55.$$

7.15. Seja X_1, ..., X_n amostra aleatória de X com função densidade $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ e $\theta > 0$.

(a) Suponha que queremos testar as hipóteses

$$H_0 : \theta \geq 1 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta < 1.$$

Apresente a região crítica de um teste para as hipóteses acima, com nível de significância de 5% para uma amostra de tamanho 12.

(b) Suponha que os valores abaixo formem uma amostra aleatória de X.

$$0,89 \quad 0,55 \quad 0,15 \quad 0,18 \quad 0,03 \quad 0,09 \quad 0,22 \quad 0,06 \quad 0,78 \quad 0,69 \quad 0,55 \quad 0,18$$

Qual a decisão tomar em relação às hipóteses formuladas no item acima?

Dica: reveja o resultado do exercício 2.6.

Referências

[Bolfarine e Sandoval, 2000] Bolfarine, H. e Sandoval, M. C. (2000). *Introdução à Inferência Estatística*.

[Casella e Berger, 2002] Casella, G. e Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury, 2ª edição.

[Larson, 1982] Larson, H. J. (1982). *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*. John Wiley & Sons, 3ª edição.

[Roussas, 2003] Roussas, G. G. (2003). *An introduction to probability and statistical inference*. Academic Press.

Respostas dos Exercícios

Lista 1 - Revisão

1.1. $Y \sim N(-4, 17)$.

1.2. (a) 0,9332 (b) 0,0122 (c) 0,7734 (d) 0,1056 (e) 0,8185.

1.3. (a) 1,08 (b) 1,56 (c) -4,3.

1.4. 0,3174.

1.5. 0,1056.

1.6. (a) $Y \sim N(0, 9)$ (b) (X, Y) tem distribuição Normal Bivariada com parâmetros $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Y^2 = 9$ e $\rho = 1/3$ (c) $X|Y = y \sim N(2y/9, 32/9)$.

1.8. .

1.9.

1.10. .

1.11. .

1.12. (a) (b) (c) (d) .

1.13. (a) Não é gama nem normal, $X \sim U[-1, 1]$ (b) $X \sim N(1, 9)$ (c) $X \sim Gama(1, 1/3)$ (d) $X \sim Gama(3, 2)$ (e) Não é gama nem normal, $X \sim Beta(1/3, 2)$ (f) $X \sim N(0, 1/4)$ (g) Não é gama nem normal, $X \sim Pareto(2, 4)$ (h) $X \sim Gama(1/2, 1)$.

1.14. (a) $X \sim Gama(1/2, 3)$ (b) Não é gama nem normal, $X \sim Binomial(1/2, 4)$ (c) $X \sim N(2, 8)$ (d) Não é gama nem normal, $X \sim Poisson(1)$ (e) $X \sim Gama(1, 1)$ (f) Não é gama nem normal, $X \sim Geo(1/3)$ (g) $X \sim N(0, 4)$ (h) $X \sim Gama(5, 1/2)$.

Lista 2 - Distribuições Amostrais

2.1. (a) 0,3935 (b) 0,6321.

2.2. 0,75.

2.3. (a) Sim (c) $\hat{\sigma}^2 \sim Gama\left(n/2, n/(2\sigma^2)\right)$.

2.5. (a) $\sum_{i=1}^n X_i \sim Gama(n, \lambda)$ (b) $2\lambda n\bar{X} \sim \chi^2_{2n}$.

2.6. (b) $T(\mathbf{X}) \sim Gama(n, \theta)$.

2.7. (a) Sim (b) $X_{(1)} \sim Exp(n\lambda)$.

2.8. (a) $f(u) = n(1-u)^{n-1}, 0 < u < 1$ (b) $f(u) = nu^{n-1}, 0 < u < 1$ (c) $\mathrm{P}(U_{(1)} \leq \frac{1}{2}) = 1 - 1/2^n$ e $\mathrm{P}(U_{(n)} \leq \frac{1}{2}) = 1/2^n$.

2.9. $a = 1,066$.

2.10. $c = 2$ e $k = 8$.

2.12. 0,99.

2.13 (a) 0,9389 (b) 0,9174.

2.15. (a) $\frac{\lambda_x \bar{X}}{\lambda_y \bar{Y}} \sim F_{2n,2m}$ e $\frac{\lambda_y \bar{Y}}{\lambda_x \bar{X}} \sim F_{2m,2n}$.

Lista 3 - Métodos de Estimação: Momentos e Máxima Verossimilhança

3.1. (a) $\hat{p} = 1/\bar{X}$ (b) $\hat{\alpha} = \bar{X}^2/(M_2 - \bar{X}^2)$ e $\hat{\lambda} = \bar{X}/(M_2 - \bar{X}^2)$ (c) $\hat{\mu} = 2\ln(\bar{X}) - \ln(M_2)/2$ e $\hat{\sigma}^2 = \ln(M_2) - 2\ln(\bar{X})$, onde $M_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$.

3.2. $\hat{p} = \bar{X}$.

3.3. (a) $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$ (b) $\hat{\eta} = 2n/\sum_{i=1}^n X_i^2$. (c) $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$ (d) $\hat{\eta} = 1/\bar{X}^2$

3.4. (a) $\hat{p} = 1/\bar{X}$ (b) $\hat{p} = \bar{X}/N_0$ (c) $\hat{\theta} = \max\{-X_{(1)}, X_{(n)}\}$.

3.5. (a) $\hat{\eta}_{MM} = M_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ (b) $\hat{\eta}_{MV} = \bar{X}^2 + \bar{X}$ (c) $\hat{\eta}_{MM} = 4,83$ e $\hat{\eta}_{MV} = 5,19$.

3.6. (a) $\hat{\sigma}^2_{MM} = \sum_{i=1}^n X_i^2/n - \mu_0^2$ (b) $\hat{\sigma}^2_{MV} = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2/n$ (c) $\hat{\sigma}^2_{MM} = 1,907$ e $\hat{\sigma}^2_{MV} = 2,516$ (d) $\hat{\sigma}^2_{MM} = -7,099$ e $\hat{\sigma}^2_{MV} = 2,709$.

3.7. (a) $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$ (b) $\hat{\mu}) = \bar{X}$ (c) $\hat{\eta} = e^{-1/\bar{X}}$ (d) $\hat{\lambda} = 3,01$, $\hat{\mu} = 0,331$ e $\hat{\eta} = 0,0491$.

3.8. (a) $\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}/(1-\bar{X})$ (b) $\hat{\theta}_{MV} = -n/(\sum_{i=1}^n \ln(X_i))$ (c) $\hat{\mu}_{MM} = \bar{X}$ (d) $\hat{\mu}_{MV} = n/\left((\sum_{i=1}^n \ln(X_i)) - n\right)$.

3.9. (b) $\hat{\theta} = X_{(1)}$ (c) $\hat{\eta} = 1/2X_{(1)}$.

3.10. Se $X_1 = 0$ ou $X_1 = 1$, $\hat{\theta} = 1$; se $X_1 = 2$, $\hat{\theta} = 2$ ou 3; se $X_1 = 3$ ou $X_1 = 4$, $\hat{\theta} = 3$.

3.11. 6.700 pessoas votariam a favor da obra.

3.12. $0,192$.

3.13. $\hat{N} = 7.310$ táxis.

3.14. (a) 1,5 (b) 0,405.

3.15. (a) $\hat{\lambda} = 0,00357$ (b) $\hat{\mu} = 280,4$ horas.

Lista 4 - Propriedade dos Estimadores

4.1. $a = 1/2n$.

4.2. $b = 1/(n-1)$ e $a = 2$.

4.4. (a) $B(\hat{\theta}) = \sigma^2/n$ e $\hat{\theta}$ é assintoticamente não-tendencioso. (b) Sim, $\hat{\theta}$ é fortemente consistente.

4.5. (a) $B(\hat{\theta}_{MV}) = \theta/(n-1)$ e $\hat{\theta}_{MV}$ é assintoticamente não tendencioso. (b) $\text{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = (n^2/(n-1)^2(n-2))\theta^2$ e $\hat{\theta}_{MV}$ é consistente em EQM.

4.6. (a) $\hat{\eta}_{MM} = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ e $\hat{\eta}_{MV} = \bar{X}(\bar{X}+1)$.

4.7. $EQM(T_1) = (4-\pi)/2\lambda^2$ e $EQM(T_2) = 1/2\lambda^2$, como $4 - \pi < 1 \Rightarrow EQM(T_1) < EQM(T_2)$.

4.8. (a) $B(T) = -p/(n+1)$ (b) não (c) sim (d) $EQM(T) = (np(1-p)+p^2)/(n+1)^2$ (e) sim.

4.9. $a = n/(n+1)$.

4.10. (a) $\hat{a}_{MM} = \bar{X} - 1$ (b) $\hat{a}_{MV} = X_{(1)}$ (c) $\hat{a}_{MM}$ é não-tendencioso e $\hat{a}_{MV}$ é assintoticamente não-tendencioso. (d) Para $n > 2$ $\hat{a}_{MV}$ é mais eficiente que $\hat{a}_{MM}$ (e) $\hat{a} = X_{(1)} - 1/n$ é não-tendencioso (f) $\hat{a} = X_{(1)} - 1/n$ é mais eficiente que $\hat{a}_{MM}$

4.11. $a = 1/(n+1)$.

Lista 5 - Estimadores Não-Viesados

5.1. (a) $p(1-p)/n$ (b) sim, $\bar{X}$.

5.3. (a) σ^2/n (b) $2\sigma^4/n$ (c) não.

5.9. (a) $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ (b) $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ (c) Sim, $\hat{\sigma}^2$ é eficiente.

5.10. (a) $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ (b) $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n X_i/2n$ (c) Sim, $\hat{\theta}$ é eficiente.

5.11. (b) $T(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^n \ln(X_i) \sim Gama(n, \theta)$ (c) $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n (n-1)/(-\sum_{i=1}^n \ln(X_i))$, $\hat{\theta}$ não é eficiente, pois não é o de MV.

5.12. (a) $T(\mathbf{X}) = X_{(1)}$ (b) $\hat{\theta} = X_{(1)} - 1/n$.

5.13. (b) Sim, $\hat{\eta}$ (b) $\hat{\eta}$ não é eficiente pois não é estimador de MV, $V_{min} = 4\mu^2/n$.

5.14. $n\bar{X}(1-\bar{X})/(n-1)$ é o ENVVUM para $\theta(1-\theta)$.

5.15. $1 + \bar{X}$ é o ENVVUM para $1/\theta$.

5.16. (a) $\hat{\lambda} = (n-1)/\sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\lambda}$ não é eficiente (b) $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\mu}$ é eficiente (c) $\hat{\theta} = n\bar{X}^2/(n+1)$, $\hat{\theta}$ não é eficiente.

5.17. $\hat{\eta} = \bar{X}/\alpha$.

5.18. $\sqrt{(n-1)/2}\Gamma((n-1)/2)S/\Gamma(n/2)$, com $S = \sqrt{S^2}$.

5.19. $\hat{\theta}_{ENVVUM} = -(n-1)/\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ e o $\hat{\theta}_{ENVVUM}$ não é eficiente.

Lista 6 - Intervalo de Confiança

6.1. (a) $IC_{exa} = \left(q_1/2n\bar{X}\ ,\ q_2/2n\bar{X}\right)$, onde q_1 e q_2 são quantis da distribuição χ^2_{2n} (b) Duas opções: $IC_{1ass} = \dfrac{1}{\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\bar{X}/\sqrt{n}}$ ou $IC_{2ass} = \dfrac{1}{\bar{X}} \pm \dfrac{z_{1-\alpha/2}}{\bar{X}\sqrt{n}}$ (c) $ic_{exa} = (0.2454\ ,\ 0.9399)$, $ic_{1ass} = (0.3246\ ,\ 1.5481)$ e $ic_{2ass} = (0.1860\ ,\ 0.8873)$.

6.3. (a) $IC_\mu = (390.73\ ,\ 821.85)$ (b) $IC_p = (0.77\ ,\ 0.89)$.

6.4. Com 90% de confiança podemos afirmar que o tempo médio até a ocorrência de uma falha é maior que 420,54 horas e que a probabilidade da falha ocorrer depois de 100 horas de funcionamento é maior que 78,8%.

6.5 $IC_\mu = (344.33\ ,\ 744.99)$ e $IC_p = (0.75\ ,\ 0.88)$.

6.6. $IC_\theta = \bar{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{S^2/n}$ ou $IC_\theta = \left((n-1)S^2/q_{n-1,1-\alpha/2}\ ,\ (n-1)S^2/q_{n-1,\alpha/2}\right)$.

6.7. (a) $IC_{\lambda,95\%} = (2.35\ ,\ 4.18) \Rightarrow$ com 90% de confiança são vendidas em média entre 2.35 e 4.18 casas por semana
(b) $IC_{\lambda,95\%} = (-\infty\ ,\ 4.04) \Rightarrow$ com 90% de confiança são vendidas em média menos de 4.04 casas por semana.

6.8. (a) $Q = X_{(n)}/\theta \sim Beta(n,1)$ e $IC_\theta = \left(X_{(n)}\ ,\ X_{(n)}/\alpha^{1/n}\right)$ (b) $Q = (2\bar{X} - \theta)/(2\bar{X}/\sqrt{3n}) \rightarrow N(0,1)$ e $IC_\theta = 2\bar{X}\pm$

$z_{1-\alpha/2}2\bar{X}/\sqrt{3n}$ (c) intervalo exato: $IC_{\theta,95\%} = (0.95\ ,\ 1.2194)$; intervalo aproximado: $IC_{\theta,95\%} = (0.6138\ ,\ 1.2095)$.

6.9. (c) $IC = \left(q_1/2\sum_{i=1}^{n}|X_i|\ ,\ q_2/2\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)$, onde q_1 e q_2 são quantis da distribuição χ_{2n} (d) $IC_{\lambda,90\%} = (1.66\ ,\ 4.82)$, $IC_{\lambda,95\%} = (1.47\ ,\ 5.25)$ e $IC_{\lambda,99\%} = (1.14\ ,\ 6.14)$.

6.10. (d) $IC_\theta = \left(X_{(1)} + \ln(\alpha)/n\lambda\ ,\ X_{(1)}\right)$ (e) $IC_\theta = (4.4411\ ,\ 5.19)$.

6.11. $IC_{\theta,90\%} = (477.16\ ,\ 679.08)$

6.12. (a) $\hat{\beta}_{MV} = X_{(n)}$ (b) $IC_{\beta,95\%} = (X_{(n)}, X_{(n)}/(0,05^{1/n\alpha_0}))$ (c) $IC_{\beta,95\%} = (25.00\ ,\ 25.45)$.

6.13. A partir do IC unilateral aproximado podemos encontrar um limite inferior para $p_1 - p_2$: $IC_{p_1-p_2} = (0.0003055526, \infty)$ e concluir, com 90% de confiança, que $p_1 - p_2 > 0.0003055526$, ou seja, a prevalência da doença é maior entre os não vacinados.

6.14. (a) $Q = \theta_1\bar{X}/\theta_2\bar{Y} \sim F_{2n,2m}$ (b) $IC = \left(f_1\bar{Y}/\bar{X}\ ,\ f_2\bar{Y}/\bar{X}\right)$, onde f_1 e f_2 são quantis da distribuição $F_{2n,2m}$.

6.15. (a) (b) (c) .

Lista 7 - Teste de Hipótese

7.1. $\alpha = 0.0039$ e $\beta = 0.684$.

7.2. $\alpha = 0.0002$ e $\beta = 0.49$.

7.3. (a) $R = \{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \le c\}$ (b) $R = \{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \le -7,85\}$ (c) Como $\sum_{i=1}^{10}\ln(x_i) = -18.348 < -7,85$, rejeita H_0.

7.4. (a) $R_A = \{\mathbf{x}|\sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2 \ge c_A\}$, $R_B = \{\mathbf{x}|\sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2 \le c_B\}$ (b) $R_A = \{\mathbf{x}|\sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2 \ge 249,96\}$, $R_B = \{\mathbf{x}|\sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2 \le 72,61\}$ (c) β_A está entre 0,5 e 0,75 e $\beta_B \approx 0,50$.

7.5. (a) $R = \{\sum_{i=1}^{n}x_i > c\}$ (b) $R = \{\sum_{i=1}^{n}x_i > 33,2\}$ (c) $\pi(\theta) \approx 1 - \Phi\left(\left(\frac{33,2}{25} - \lambda\right)\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

7.6. (a) $R = \{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 > c\}$ (b) $R = \{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 > 152,271\}$.

7.7. (a) $R = \left\{\underline{x}|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \le \chi^2_{n,1-\alpha/2} \text{ ou } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \ge \chi^2_{n,\alpha/2}\right\}$ (b) $R = \left\{\underline{x}|\sum_{i=1}^{40}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \le 20,707 \text{ ou } \sum_{i=1}^{40}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \ge 66,766\right\}$.

7.8. (a) $RC = \{\mathbf{x} \in S|5 < \frac{2n\bar{X}}{q_{2n,1-\alpha/2}}$ ou $5 > \frac{2n\bar{X}}{q_{2n,\alpha/2}}\}$, para a amostra apresentada não rejeitamos H_0. (b) (c)

7.9. (a) " Rejeita se $|\bar{x}-\bar{y}| > 1.96\sqrt{\frac{9}{n}+\frac{25}{m}}$ " (b) Não rejeitamos H_0, isto é, não rejeitamos a hipótese de que $\mu_X = \mu_Y$.

7.10. $R = \{\underline{x}|4,5 > \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{13}}1,356217\} = \{\underline{x}|4,5 > \bar{x} + s0,376\}$, não rejeita H_0.

7.11. Temos $X \sim Ber(p)$, $H_0 : p = 0.5$ contra $H_1 : p > 0.5$. Usando o teste baseado no IC assintótico unilateral com limite inferior para p encontramos $IC = (0.5399, \infty)$ e decidimos por rejeitar H_0 com α =5%.

7.12. Queremos testar $H_0 : p_1 = p_2$ contra $H_1 : p_1 > p_2$. Usando o teste baseado no IC assintótico unilateral com limite inferior para $p_1 - p_2$ encontramos $IC = (0.0003055526, \infty)$ e decidimos por rejeitar H_0 e concluir que a vacina é eficaz.

13.7. p-valor $= 5,04 \times 10^{-8}$.

7.14. p-valor $= 0,5247$, decidimos por não rejeitar H_0.

7.15. (a) (b) .