Lista 10 - Probabilidade III
Distribuições Multinomial e Normal Multivariada
Profª: Jessica Kubrusly

1. ([Larson, 1982] - Seção 5.7) Seja (X_1, X_2) o número de sucessos e fracassos, respectivamente, em n ensaios de Bernoulli independentes, todos com parâmetro p.
   (a) Qual a distribuição conjunta do vetor aleatório (X_1, X_2) ?
   (b) Qual a correlação entre X_1 e X_2?

2. ([Larson, 1982] - Seção 5.7) O consultório de um médico tem quatro linhas telefônicas e cada uma delas pode ser independentemente escolhida por um de seus pacientes. Considere que em um dia de trabalho a primeira ligação do dia chega na linha 1 com probabilidade de 40%, na linha 2 com probabilidade de 30%, na linha 3 com probabilidade de 20% e na linha 4 com probabilidade de 10%. Considere também que a linha onde chega a primeira ligação do dia é independente para dias diferentes de trabalho.

   Em n dias de trabalho seja observada a linha que recebeu a primeira liação em cada dia e defina Y_i como sendo o número em que a primeira ligação chegou na linha i.
   (a) Qual a distribuição conjunta do vetor aleatório (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)?
   (b) Se $n = 10$ calcule $P(Y_1 = 5, Y_2 = 5, Y_3 = 0, Y_4 = 0)$.
   (c) Se $n = 12$ calcule $P(Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4)$.

3. ([Larson, 1982] - Seção 5.7) Cinco dados justos são lançados ao mesmo tempo.
   (a) Qual a probabilidade de todos os 5 dados mostrarem o mesmo número?
   (b) Qual a probabilidade de saírem 5 número em sequência? (1,2,3,4 e 5 ou 2,3,4,5 e 6)

4. Considere uma loja que venda apenas dois produtos, A e B. Sabe-se que metade dos clientes que entram nessa loja não compra nada, 1/4 dos clientes compra uma única unidade do produto A e 1/4 compra uma única unidade do produto B. Ou seja, nenhum cliente compra dois ou mais itens nessa loja. Considere que o comportamento de compra de cada cliente seja independente um do outro.
   (a) Qual a probabilidade de serem vendidos 3 unidades do produto A e 3 unidades do produto B para os 10 próximos clientes que entrarem nessa loja?
   (b) Se o produto A custa R$1.000,00 e o produto B custa R$2.000,00, qual o gasto médio (em reais) dos 10 próximos clientes a entrarem nessa loja? E qual a variância desse gasto?

5. ([Larson, 1982] - Seção 5.7) Seja X o tempo (em segundos) necessário para um certo atleta de corrida correr o seu primeiro quarto de milha e seja Y o tempo necessário para ele correr o seu segundo quarto de milha, na mesma corrida. Considere que (X, Y) tenha distribuição Normal Bivariada com parâmetros $\mu_X = 59$, $\mu_Y = 60$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ e $\rho = -0.5$.
   (a) Calcule $P(X \leq 60)$ e $P(Y \leq 59)$.
   (b) Assumindo que o primeiro quarto de milha demorou $x = 60$ segundos, calcule a probabilidade do segundo demorar menos de 59 segundos.

6. ([Larson, 1982] - Seção 5.7) Seja X a quantidade de chuva (em mm) registrada em uma estação meteorológica durante o mês de janeiro e Y a quantidade de chuva (em mm) registrada na mesma estação em fevereiro do mesmo ano. Considere (X, Y) um vetor aleatório com distribuição Normal Bivariada com parâmetros $\mu_x = 6$, $\mu_Y = 4$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 0.5$ e $\rho = 0.1$. Calcule:
   (a) $P(X \leq 5)$
   (b) $P(Y \leq 5)$

(c) $P(Y \leq 5 \mid X = 5)$

7. ([Larson, 1982] - Seção 5.7) Seja X a renda bruta e Y a dedução com gastos médicos em uma declaração de imposto de renda. Assuma que X e Y sejam variáveis aleatórias com distribuição normal bivariada de parâmetros $\mu_X = 15.000$, $\mu_Y = 1.000$, $\sigma_X = 800$, $\sigma_Y = 100$ e $\rho = 0.6$.
   (a) Em um formulário cuja renda bruta seja R$16.000,00, qual a probabilidade da dedução com gastos médicos ficar abaixo de R$900,00?
   (b) Encontre o valor de a tal que $P(Y \leq a|X = 16.000) = 0.95$.

8. Seja (X, Y) vetor aleatório com distribuição normal bivariada de parâmetros $\mu_X = 3$, $\mu_Y = -2$, $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Y^2 = 9$ e $\rho = -0.25$. Calcule $P(X < Y)$.
   Dica: primeiro encontre a distribuição de $X - Y$ e depois calcule $P(X - Y < 0)$.

9. Sejam X e Z variáveis aleatórias de média nula e distribuição conjunta normal bivariada tais que $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Z^2 = 17/9$ e $\mathrm{E}[XZ] = 2$. Defina $Y = 2X - 3Z$ e encontre:
   (a) a distribuição de Y;
   (b) a distribuição conjunta de (X, Y);
   (c) a distribuição de $X|Y = y$.

10. Seja $X = (X_1, X_2, X_3)$ vetor aleatório com distribuição normal multivariada de parâmetros $\mu = (0, 1, -1)$ e $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Defina as distribuições marginais de X_1, X_2 e X_3.
   (b) Defina a distribuição conjunta de (X_1, X_2).
   (c) As variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes? Justifique sua resposta.
   (d) As variáveis aleatórias X_1 e X_3 são independentes? Justifique sua resposta.
   (e) As variáveis aleatórias $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ são independentes? Justifique sua resposta.
   (f) Seja $Y = (Y_1, Y_2)$ vetor aleatório tal que $Y = AX + a$ com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encontre a distribuição conjunta de (Y_1, Y_2).

Respostas:
1. (a) $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!x_2!} p^{x_1}(1-p)^{x_2},\ x_1 = 0, 1, \ldots, n$ e $x_2 = n - x_1$ (b) -1.
2. (a) Multinomial$(n, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2, p_4 = 0.1)$ (b) 0.0063 (c) 0.0051.
3. (a) 0.00077 (b) $\frac{2(5!)}{6^5}$.
4.
5. (a) 0.8413 e 0.1587 (b) 0.2810.
6. (a) 0.1587 (b) 0.9773 (c) 0.9826.
7. (a) 0.9406 (b) $a = 1206.20$.
8. 0.1056
9. (a) $Y \sim N(0, 9)$ (b) (X, Y) tem distribuição Normal Bivariada com parâmetros $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Y^2 = 9$ e $\rho = 1/3$ (c) $X|Y = y \sim N(2y/9, 32/9)$.
10.