Lista 11 - Probabilidade III
Convergência de Varáveis Aleatórias.
Profª: Jessica Kubrusly

1. Seja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \sim U[0, \frac{1}{n}]$.
   (a) Mostre que $X_n \xrightarrow{D} 0$;
   (b) Mostre que $X_n \xrightarrow{P} 0$;
   (c) Mostre que $X_n \xrightarrow{E.Q.M} 0$;
   (d) Algum dos itens acima é consequência de outro(s). Quem é consequência de quem? Mesmo assim, faça as três demonstrações para treinar.

2. ([Magalhães, 2011] - Seção 6.2) Seja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $\mathrm{P}(X_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}$ e $P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$, $n \geq 1$. Defina $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Mostre que $\mathrm{E}[X_n] = 0 \ \forall\ n$.
   (b) Mostre que $\mathrm{Var}(X_n) = 1 \ \forall\ n$.
   (c) Encontre $\mathrm{E}[Y_n]$ e $\mathrm{Var}[Y_n]$.
   (d) Mostre que $Y_n \xrightarrow{P} 0$

3. ([Magalhães, 2011] - Seção 6.2) Sejam $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ duas sequências de variáveis aleatórias e X e Y duas variáveis aleatórias. Supondo que $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$, mostre que:
   (a) $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} aX + bY, \ \forall\ a, b \in \mathbb{R}$
   (b) $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$
   (c) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$, desde que $P(Y_n \neq 0) = 1 \ \forall\ n$.

4. Sejam $X_1, X_2, X_3 \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d tais que $X_i \sim Exp(\frac{1}{2})$.
   Defina $Y_n = \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ e $W_n = Y_n^2 = (\bar{X}_n)^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2}$.
   (a) Mostre que $Y_n \xrightarrow{E.Q.M} 2$;
   (b) Mostre que $Y_n \xrightarrow{P} 2$;
   (c) Mostre que $W_n \xrightarrow{P} 4$;
   (d) Mostre que $W_n - Y_n \xrightarrow{P} 2$;

5. ([Magalhães, 2011] - Seção 6.2) Para $n \geq 1$ considere $X_n \sim U[0, 1]$ variáveis aleatórias i.i.d. Defina $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $W_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $U_n = nY_n$ e $V_n = n(1 - W_n)$. Mostre que:
   (a) $Y_n \xrightarrow{P} 0$.
   (b) $W_n \xrightarrow{P} 1$.
   (c) $U_n \xrightarrow{D} U$, sendo $U \sim Exp(1)$.
   (d) $V_n \xrightarrow{D} V$, sendo $V \sim Exp(1)$.