Lista 12 - Probabilidade III
Lei dos Grandes Números e Teorema Central do Limite
Prof^{a}: Jessica Kubrusly

1. Enuncie a Lei Fraca e Lei Forte dos Grandes Números. Qual a diferença entre elas?

2. Verifique se a Lei dos Grandes Números pode ser aplicada para as seguintes sequências de de variáveis aleatórias independentes.
   (a) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_{X_i}(x) = \frac{1}{x^2}, x > 1$;
   (b) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$;
   (c) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $X_i \sim bernoulli(p = \frac{1}{i})$;

   Caso positivo, qual conclusão pode ser tirada? Caso negativo, justifique o motivo pelo qual a lei não pode ser aplicada.

3. ([Magalhães, 2011] - Seção 6.5) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ varáveis aleatórias i.i.d. com $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, ambos finitos. Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{E.Q.M} \mu$.

4. ([Magalhães, 2011] - Seção 6.5) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ varáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro λ. Mostre que $\{X_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números. Que conclusão podemos tirar da aplicação dessa lei?

5. Enuncie o Teorema Central do Limite.

6. ([Ross, 2010] - Cap 8) Uma pessoa tem 100 lâmpadas, cujos tempos de vida podem ser considerados variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com 5 horas de média. Suponha que quando uma lâmpada queima ela é substituída imediatamente por uma nova. Despreze o tempo de troca das lâmpadas. Qual a probabilidade (aproximada) de ainda existir uma lâmpada funcionando depois de 525 horas?

7. ([Ross, 2010] - Cap 8) Um dado é lançado sequencialmente até que a soma exceda 300. Encontre a probabilidade aproximada de que seja necessário lançar o dado pelo menos 80 vezes.

8. ([Ross, 2010] - Cap 8) Um certo componente é fundamental para o funcionamento de um sistema elétrico e deve ser trocado assim que para de funcionar. Se o tempo médio de vida de cada componente é de 100 horas e o desvio padrão desse tempo é de 30 horas, quantos componentes devem ser estocados para garantir, com pelo menos $0,95$ de probabilidade, que o sistema funcione pelas próximas 2000 horas?

9. ([Ross, 2010] - Cap 8) A professora passou para João e Maria 20 exercícios. Cada um fará seus exercícios de forma sequencial. Suponha que o tempo que um aluno gasta em um exercício é independente do tempo que ele gasta em outro. Se Maria gasta em média 50 minutos em cada exercício, com desvio padrão de 10 minutos, e João gasta em média 52 minutos em cada exercício, com desvio padrão de 15 minutos, determine:
   (a) A probabilidade de Maria terminar seus exercícios em menos de 900 minutos;
   (b) A probabilidade de Maria terminar seus exercícios antes de João.

10. ([Ross, 2010] - Cap 8) Seja X uma v.a. de Poisson com média 20 e defina $p = \mathrm{P}(X \geq 26)$.
    (a) Use a desigualdade de Markov para obter um limite superior para p.
    (b) Use a desigualdade de Chebyshev unilateral para obter um limite superior para p.
    (c) Aproxime o valor de p usando o teorema central do limite.
    (d) Sabendo que $p \approx 0.112185$, o que você pode dizer sobre a precisão das aproximações.
    (e) Por que usar aproximações para p? Você saberia encontrar p de forma exata?

Respostas:
6. 0,3085; 7. 0,9049; 8. $n \geq 23$; 9. (a) 0,013 (b) 0,691; 10. (a) 0,769 (b) 0,357 (c) 0,1093.