Lista 1 - Probabilidade III
Vetores Aleatórios Discretos, Função de Probabilidade Conjunta e Marginal
Prof^{a}: Jessica Kubrusly

1. ([Ross, 2010] - Cap 6) Suponha o lançamento de dois dados justos. Para esse experimento defina as seguintes variáveis aleatórias: X = menor valor observado; Y = maior valor observado.
   (a) Encontre a distribuição conjunta de (X, Y).
   (b) Calcule $P(Y < X + 2)$.

2. (Exercício 1, Lista 1, prof Adrian) Suponha que de um baralho sejam retiradas duas cartas, ao acaso e com reposição. Seja X a v.a. que representa o número de ases e seja Y a v.a. que representa o número de damas.
   (a) Estabeleça a distribuição conjunta do vetor aleatório (X, Y).
   (b) Obtenha as distribuições marginais de X e Y. Elas são conhecidas?
   (c) Repita o exercício para o caso de as retiradas serem sem reposição.

3. (Exercício 2, Lista 1, prof Adrian) Um estudante faz uma prova de 4 questões, cada uma do tipo verdadeiro ou falso. Assuma que ele chute as respostas em cada questão. Defina: X_1 = número de acertos nas 2 primeiras questões; X_2 = número de acertos nas 2 últimas questões.
   (a) Obtenha a função de probabilidade conjunta de (X_1, X_2).
   (b) Encontre as distribuições marginais de X_1 e X_2 e veja se estas são conhecidas.
   (c) Calcule a probabilidade do aluno acertar pelo menos 3 questões.
   (d) Repita este exercício, supondo que cada questão tem agora 4 respostas possíveis.

4. (Exercício 3, Lista 1, prof Adrian) A função de probabilidade de uma variável aleatória bidimensional é dada pela tabela abaixo. Calcule o que se pede nos itens a seguir.

Y \ X	0	1	2
0	0,07	0,17	0,04
1	0,03	0,25	0,24
2	0,13	0,05	0,00
3	0,02	0,00	0,00

   (a) $P(X = 1\ ,\ Y = 2)$ (b) $P(X = 0\ ,\ 1 \leq Y < 3)$ (c) $P(X + Y \leq 1)$ (d) $P(X > Y)$.

5. (Exercício 5, Lista 1, prof Adrian) Calcule $P(X_1X_2 \leq 2)$ sabendo que a função de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X_1, X_2) é definida por:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.4 & , x_1 = x_2 = 1 \\ 0.3 & , x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2 \\ 0.2 & , x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 1 \\ 0.1 & , x_1 = x_2 = 2 \end{cases}$$

6. ([Ross, 2010] - Cap 6) Suponha uma urna com 5 bolas brancas e 8 bolas pretas. Considere o experimento de retirar, sem reposição, 3 bolas dessa urna. Seja,

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ se a i-ésima bola selecionada é branca} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   Encontre a função de probabilidade conjunta de: (a) (X_1, X_2) (b) (X_1, X_2, X_3)

7. ([Ross, 2010] - Cap 6) Para o exercício 6, suponha que as bolas brancas sejam numeradas e defina:
$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ se a i-ésima bola branca foi selecionada} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
Encontre a função de probabilidade conjunta de: (a) (Y_1, Y_2) (b) (Y_1, Y_2, Y_3)

8. ([Ross, 2010] - Cap 6) Em cada lançamento de um dado (não justo) as faces ímpares ocorrem com probabilidade C, cada uma delas, enquanto a probabilidade de uma face par ocorre é de $2C$.
   (a) Encontre C.
   (b) Suponha um lançamento desse dado e defina:
$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ se sair par} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & , \text{ se sair um número maior que 3} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
   Encontre a função de probabilidade conjunta de (X, Y).

9. (a) Quais as propriedades que uma função $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem que satisfazer para que ela seja uma função de probabilidade de algum vetor aleatório discreto?
   (b) Seja p uma função tal que,
$$p(x, y) = \begin{cases} q^2(1-q)^{y-2} & , \text{ se } \ x = 1, 2, \ldots \ \text{ e } \ y = x+1, x+2, \ldots \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
   Use as propriedades listadas no item anterior para verificar que p é função de probabilidade de algum vetor aleatório discreto, qualquer que seja $0 < q < 1$.
   (c) Encontre as funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y. Elas são conhecidas para você?
   (d) Calcule $\mathrm{P}(Y - X > 2)$.

   Dica: Lembre-se que $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Logo, $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$, se $a < 1$.

10. Suponha um dado onde uma face tem o número 1, duas faces têm o número 2 e três faces o número 3. Suponha o experimento de lançar duas vezes esse dado e observar o número na face superior.
    (a) Determine o espaço amostral do experimento, isto é, o conjunto S formado por todas as possíveis saídas do experimento. Quantos elementos tem o conjunto S?

    Para esse experimento, defina as seguintes variáveis aleatórias:

    X = menor número entre os dois lançamentos.

    Y = maior número entre os dois lançamentos.

    (b) Determine a imagem do vetor aleatório (X, Y).
    (c) Encontre a função de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y).
    (d) Calcule $\mathrm{P}(X + Y \leq 3)$.

    Suponha agora que esse mesmo dado seja lançado até sair a face com o número 1. Para esse novo experimento defina as seguintes variáveis aleatórias:

    W = o número de vezes que o dado foi lançado até o final do experimento.

    Z = o número de saídas iguais à 3.

(e) Encontre a função de probabilidade conjunta do vetor aleatório (W, Z).
Dica: Primeiro defina a imagem do vetor aleatório (W, Z). Depois, fazendo associações com o que aprendemos em Probabilidade II, encontre a função de probabilidade em alguns desses valores. Por último, tente encontrar uma regra geral para a função de probabilidade conjunta.

Respostas:

1. (a)

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	0	0	0	0	0
2	2/36	1/36	0	0	0	0
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36

(b) 4/9

2. (a)

Y \ X	0	1	2
0	0.716	0.130	0.006
1	0.130	0.012	0.000
2	0.006	0.000	0.000

(b) $X = Y \sim \text{binomial}(n = 2, p = \frac{4}{52})$
(c)

Y \ X	0	1	2
0	0.713	0.133	0.005
1	0.133	0.012	0.000
2	0.005	0.000	0.000

$X = Y = \text{hipergeométrica}(N = 52, m = 4, n = 2)$

3. (a)

Y \ X	0	1	2
0	0.0625	0.125	0.0625
1	0.125	0.25	0.125
2	0.0625	0.125	0.0625

(b) $X = Y \sim \text{binomial}(n = 2, p = \frac{1}{2})$
(c) 0.3125
(d)

Y \ X	0	1	2
0	0,316	0,211	0,035
1	0,211	0,141	0,023
2	0,035	0,023	0,004

$X = Y \sim \text{binomial}(n = 2, p = \frac{1}{4})$

4. (a) 0.05 (b) 0.16 (c) 0.27 (d) 0.45

5. $\text{P}(X_1 X_2 \leq 2) = 0.9$

6. (a)

Y \ X	0	1
0	14/39	10/39
1	10/39	5/39

(b) $p(0,0,0) = 84/429$, $p(0,0,1) = p(0,1,0) = p(1,0,0) = 70/429$, $p(0,1,1) = p(1,0,1) = p(1,1,0) = 40/429$ e $p(1,1,1) = 15/429$.

7. (a)

Y \ X	0	1
0	15/26	5/26
1	5/26	1/26

(b) $p(0,0,0) = 360/858$, $p(0,0,1) = p(0,1,0) = p(1,0,0) = 135/858$, $p(0,1,1) = p(1,0,1) = p(1,1,0) = 30/858$ e $p(1,1,1) = 3/858$.

8. (a) $C = 1/9$
(b)

Y \ X	0	1
0	2/9	2/9
1	1/9	4/9

9.
(c) $X \sim \textit{geometrica}(p)$ e
$Y \sim \textit{binomail negativa}(p, 2)$.

10.
(a) $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
(b) $Im(X,Y) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
(c)

Y \ X	1	2	3
1	1/36	0	0
2	4/36	4/36	0
3	6/36	12/36	9/36

(d) 5/36
(e) $p_{W,Z}(w,z) = \binom{w-1}{z}\left(\frac{1}{2}\right)^z\left(\frac{1}{3}\right)^{w-1-z}\frac{1}{6}$,
se $w = 1,2,3,\ldots$ e $z = 0,1,2,\ldots,w-1$.