Lista 2 - Probabilidade III
Vetores Aleatórios Contínuos,
Função de Densidade Conjunta e Marginal
Prof$^{\text{a}}$: Jessica Kubrusly

1. ([Ross, 2010] - Cap 6) A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) & , \text{ se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 2 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Encontre a imagem do vetor aleatório (X, Y) e desenhe no plano a região que define esse conjunto.

   (b) Verifique que $f_{X,Y}$ acima definida é realmente de uma função de densidade.

   (c) Encontre a função densidade marginal de probabilidade da variável aleatória X.

   (d) Calcule $\mathrm{P}(X > Y)$.

   (e) Calcule $\mathrm{P}(Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.

2. ([Ross, 2010] - Cap 6) A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y} & , \text{ se } -y < x < y \text{ e } 0 < y < \infty \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Encontre a imagem do vetor aleatório (X, Y) e desenhe no plano a região que define esse conjunto.

   (b) Encontre o valor de c.

   (c) Encontre as marginais de X e Y.

   (d) Encontre $\mathrm{E}[X]$.

3. ([Ross, 2010] - Cap 6) A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & , \text{ se } 0 \leq x < \infty \text{ e } 0 \leq y < \infty \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Encontre a imagem do vetor aleatório (X, Y) e desenhe no plano a região que define esse conjunto.

   (b) Calcule $\mathrm{P}(X < Y)$.

   (c) Calcule $\mathrm{P}(X < a)$.

4. (Exercício 6, Lista 1, prof Adrian) Ache $\mathrm{P}(X^2 < Y < X)$ supondo que o vetor aleatório (X, Y) seja contínuo e tenha densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx & , \text{ se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   Dica: Primeiro defina a imagem do vetor aleatório, depois encontre o valor de c e por último faça o que se pede.

5. (Exercício 7, Lista 1, prof Adrian) Assuma que a variável aleatória bi-dimensional (X, Y) tenha densidade $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}$ sobre o quadrado de vértices $(a, 0), (-a, 0), (0, a), (0, -a)$.

   (a) Encontre o valor de a. (b) Encontre as funções de densidade marginal de X e de Y.

6. (Exercício 8, Lista 1, prof Adrian) Considere que o vetor aleatório (S,T) tenha densidade

$$f_{S,T}(s,t) = \begin{cases} k(s+t) & \text{, se } 0 < s < 2 \text{ e } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

(a) Encontre o valor de k. (b) Calcule a probabilidade de $S^2 + T \leq 1$.

7. (Exercício 9, Lista 1, prof Adrian) Encontre a probabilidade de que as raízes da equação do segundo grau $y^2 + 2X_1 y + X_2 = 0$ sejam reais, sabendo que (X_1, X_2) é uniformemente distribuído no retângulo $[0,1] \times [-1,1]$.

8. (Exercício 10, Lista 1, prof Adrian) Suponha que o vetor aleatório (X,Y,Z) tenha distribuição uniforme em $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Calcule $\mathrm{P}(Z > XY)$ e $\mathrm{P}(X < Y < Z)$.

9. Seja f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} & \text{, se } 0 < x < a \text{ e } 1 \leq y \leq x+1 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Verifique que f é função de probabilidade de algum vetor aleatório contínuo, qualquer que seja $a > 1$.

   (b) Encontre a imagem do vetor aleatório (X,Y) e desenhe no plano a região que define esse conjunto.

   (c) Encontre as funções densidade de marginal das variáveis aleatórias X e Y.

   (d) Calcule $\mathrm{P}(X < Y)$ em função de a.

10. (Exercício 11, Lista 1, prof Adrian) Duas pessoas concordam em se encontrar em um certo lugar entre 11 e 12 horas. Eles concordam também que o primeiro a chegar espere pelo outro 30 minutos, isto á, $\frac{1}{2}$ hora. Assumindo que os tempos de chegada sejam duas variáveis aleatórias com distribuição conjunta uniforme, ache a probabilidade de que as duas pessoas se encontrem.

Respostas:

1. (c) $f_X(x) = \begin{cases} (12x^2+6x)/7 & \text{, se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$; (d) 15/56 ; (e) 0,8625 .

2. (b) $c = 1/8$;

(c) $f_X(x) = \begin{cases} (e^x - e^x x)/4 & , -\infty < x < 0 \\ (e^{-x} + e^{-x}x)/4 & , 0 < x < \infty \end{cases}$ e $f_Y(y) = \begin{cases} (e^{-y}y^3)/6 & , 0 < y < \infty \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$;

(d) $\mathrm{E}[X] = 0$.

3. (b) 1/2 ; (c) $1 - e^{-a}$.

4. $\mathrm{P}(X^2 < Y < X) = 1/6$.

5. (a) $a = 1$; (b) $f_X(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 < x < 0 \\ 1-x & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$ e $f_Y(y) = \begin{cases} y+1 & , -1 < y < 0 \\ 1-y & , 0 < y < 1 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$

6. (a) $k = 1/8$; (b) 31/480 .

7. 2/3 .

8. 3/4 e 1/6 .

9. (c) $f_X(x) = 2x/a^2$, $0 < x < a$, e $f_Y(y) = 2(a+1-y)/a^2$, $1 < y < a+1$; (d) $\mathrm{P}(X < Y) = (2a-1)/a^2$.

10. 6/8 .