Lista 3 - Probabilidade III
Função de Distribuição Acumulada Conjunta e Marginal
Prof^{a}: Jessica Kubrusly

1. ([Ross, 2010] - Cap 6) Suponha que 2 bolas sejam retiradas, sem reposição, de uma urna que contém inicialmente 2 bolas vermelhas, 3 bolas brancas e 5 azuis. Sejam X e Y variáveis aleatórias que representam o número de bolas vermelhas e brancas retiradas, respectivamente.
   (a) Encontre a Função de Probabilidade Conjunta do vetor aleatório (X, Y).
   (b) Encontre a Função de Distribuição Acumulada Conjunta do vetor aleatório (X, Y).
   (c) Encontre as Funções de Distribuição Acumulada Marginais das variáveis X e Y.

2. Suponha que um vetor aleatório (Z, W) tenha Função Distribuição Acumulada definida por:

$$F_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} 0 & \text{, se } z < 3 \text{ ou } w < 0 \\ 1/10 & \text{, se } 3 \leq z < 4 \text{ e } 0 \leq w < 1 \\ 3/10 & \text{, se } 4 \leq z < 6 \text{ e } 0 \leq w < 1 \\ 4/10 & \text{, se } z \geq 6 \text{ e } 0 \leq w < 1 \\ 3/10 & \text{, se } 3 \leq z < 4 \text{ e } w \geq 1 \\ 6/10 & \text{, se } 4 \leq z < 6 \text{ e } w \geq 1 \\ 1 & \text{, se } z \geq 6 \text{ e } w \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Quais os possíveis valores que o vetor aleatório (Z, W) pode assumir? Esse vetor é discreto ou contínuo?
   (b) Encontre a Função de Probabilidade Conjunta do vetor aleatório (Z, W).
   (c) Encontre as Funções de Probabilidade Marginais das variáveis aleatórias Z e W.
   (d) Encontre as Funções de Distribuição Marginais das variáveis aleatórias Z e W.

3. Suponha que um vetor aleatório (X, Y) tenha Função Distribuição Acumulada definida por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y} - e^{-x} + e^{-(x+2y)} & \text{, se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Verifique que $\lim_{x\to\infty \text{ e } y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$
   (b) Verifique que $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ e $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
   (c) Quais os possíveis valores que o vetor aleatório (X, Y) pode assumir? Esse vetor é discreto ou contínuo?
   (d) Encontre a Função de Densidade Conjunta do vetor aleatório (X, Y).
   (e) Encontre as Funções de Densidade Marginais das variáveis aleatórias X e Y.
   (f) Encontre as Funções de Distribuição Marginais das variáveis aleatórias X e Y.

4. Seja (X, Y) um vetor aleatório continuo com Função Densidade Conjunta definida por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x+2} & \text{, se } x \geq 2 \text{ e } 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{,caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Encontre a Função de Distribuição Conjunta do vetor aleatório (X, Y).
   (b) Encontre as Funções de Distribuições Marginais das variáveis aleatórias X e Y.
   (c) Encontre as Funções de Densidade Marginais das variáveis aleatórias X e Y.

5. Suponha um vetor aleatório (X, Y) com Função Densidade Conjunta definida por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-2(y-x)} & \text{, se } 0 < x < 1 \text{ e } x < y < \infty \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

(a) Encontre a imagem do vetor aleatório (X, Y) e desenhe no plano a região que define esse conjunto.

(b) Encontre as Funções de Densidade Marginais das variáveis aleatórias X e Y.

(c) Calcule $\mathrm{P}(X + Y > 1)$.

(d) Encontre a Função de Distribuição Acumulada Conjunta do vetor aleatório (X, Y).

(e) Encontre as Funções de Distribuição Marginais das variáveis aleatórias X e Y.

6. (Exercício 13, Lista 1, prof Adrian) Considere um vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ cuja densidade é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} k\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & , \text{ se } 0 < x_i < 1 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Encontre k.

(b) Encontre a Função de Distribuição Marginal da variável X_1,isto é, F_{X_1}.

(c) Encontre a Função de Distribuição Marginal do vetor (X_1, X_2), isto é, F_{X_1,X_2}.

Respostas:

1. (a)
(b) (c)
2. (a) $\{(3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (6,0), (6,1)\}$.
(b)

W \ Z	3	4	6
0	1/10	2/10	1/10
1	2/10	1/10	3/10

(c)

$$p_Z(z) = \begin{cases} 3/10 & , \text{ se } z = 3 \text{ ou } z = 4 \\ 4/10 & , \text{ se } z = 6 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$p_W(w) = \begin{cases} 4/10 & , \text{ se } w = 0 \\ 6/10 & , \text{ se } w = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(d)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } z < 3 \\ 3/10 & , \text{ se } 3 \leq z < 4 \\ 6/10 & , \text{ se } 4 \leq z < 6 \\ 1 & , \text{ se } z \geq 6 \end{cases}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } w < 0 \\ 4/10 & , \text{ se } 0 \leq w < 1 \\ 1 & , \text{ se } w \geq 1 \end{cases}$$

3. (c) $(X, Y) = \{(x, y) \in (R)^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$.

(d) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & , \text{ se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$

(e) e (f) $X \sim \exp(\lambda = 1)$ e $Y \sim \exp(\lambda = 2)$

4. (a)

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \text{ ou } y < 1 \\ \frac{(y-1)}{2}\left(1 - e^{-x+2}\right) & , x \geq 2 \text{ e } 1 \leq y < 3 \\ 1 - e^{-x+2} & , x \geq 2 \text{ e } y \geq 3 \end{cases}$$

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 2 \\ 1 - \exp^{-x+2} & , \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } y < 1 \\ \frac{y-1}{2} & , \text{ se } 1 \leq y \leq 3 \\ 1 & , \text{ se } y \geq 3 \end{cases}$$

(c)

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x+2} & , \text{ se } x \geq 2 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ se } 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

5. (b) $f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$ e

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & , \text{ se } 0 < y < 1 \\ (e^2 - 1)e^{-2y} & , \text{ se } y > 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(d) $\mathrm{P}(X + Y > 1) = \frac{3 - e^{-2}}{4}$

6. (a) $k = 1/2$

(b) $F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x_1 < 0 \\ \frac{x_1^2}{4} + 3x_1 & , \text{ se } 0 \leq x_1 < 1 \\ 1 & , \text{ se } x_1 \geq 1 \end{cases}$

(c)

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0 \\ \frac{x_1 x_2}{2}\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + 1\right) & , \text{ se } 0 \leq x_1 < 1 \text{ e } 0 \leq x_2 < 1 \\ \frac{x_2}{4}(x_2 + 3) & , \text{ se } 0 \leq x_1 < 1 \text{ e } x_2 \geq 1 \\ \frac{x_1}{4}(x_1 + 3) & , \text{ se } x_1 \geq 1 \text{ e } 0 \leq x_2 < 1 \\ 1 & , \text{ se } x_1 \geq 1 \text{ e } x_2 \geq 1 \end{cases}$$