Lista 4 - Probabilidade III
Independência de v.a. e Distribuição Condicional
Profª: Jessica Kubrusly

1. (Lista do prof Adrian) Considere o experimento em que dois dados são lançados. Defina as variáveis aleatórias:

   X_1 = valor no 1º dado, X_2 = valor no 2º dado e Y = máximo entre os dois valores.

   (a) Mostre que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes.

   (b) Mostre que X_1 e Y não são variáveis aleatórias independentes.

2. (Lista do prof Adrian) Suponha que experimentos de Bernoulli sejam realizados de forma sequencial. Defina as seguintes variáveis aleatórias:
   X_1 = números de realizações até o 1º sucesso; X_2 = números de realizações até o 2º sucesso.
   As variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes? Justifique sua resposta.

3. ([Ross, 2010] - Cap 6) Para cada item a seguir decida se as variáveis aleatórias X e Y são ou não independentes. Em seguida, encontre as funções densidade de probabilidade marginais.
   (a) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & , x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$ (b) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < y \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$

4. ([Ross, 2010] - Cap 6) Suponha a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & , 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) As variáveis aleatórias X e Y são independentes?

   (b) Encontre a função densidade de probabilidade marginal da variável aleatória X.

   (c) Encontre $\mathrm{P}(X + Y < 1)$.

5. ([Ross, 2010] - Cap 6) Suponha a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & , 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{caso contrório} \end{cases}$$

   (a) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

   (b) Encontre as funções de densidade marginal de X e Y.

6. Demonstre as seguintes afirmações:

   (a) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

   (b) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

   (c) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$.

   OBS: Observe que as recíprocas das afirmações acima também são verdadeiras. Mas demonstrá-las não faz parte do exercício.

7. Um homem e uma mulher combinaram de se encontrar em um certo local. Se a hora de chegada de cada um, independente da hora de chegada do outro, é uma variável aleatória uniforme entre 12:00h e 13:00h, encontre a probabilidade do primeiro que chegar ter que esperar pelo outro mais de 10 min.

8. ([Ross, 2010] - Cap 6) Escolha de forma aleatória um número X dentro do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Em seguida, escolha de forma aleatória um número Y dentro do conjunto $\{1, 2, \ldots, X\}$.

   (a) Encontre a função de probabilidade condicional de Y dado $X = x$, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

   (b) Encontre a função de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y).

   (c) Encontre a função de probabilidade condicional de X dado $Y = y$, para $y = 1, 2, 3, 4, 5$.

(d) X e Y são independentes? Por quê?

9. ([Ross, 2010] - Cap 6) Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias iid com distribuição geométrica de parâmetro p. Defina $Z = X + Y$.

   (a) Encontre a função de probabilidade da variável aleatória Z. Que distribuição é essa?

   (b) Encontre a função de probabilidade da variável aleatória X dado $X+Y = z$, $p_{X|Z}(x|z)$.

   Dica: Fizemos um parecido em sala de aula, mas em vez de geométrica a distribuição era de Poisson.

10. Suponha que o número de pacientes que dão entrada em um hospital por dia seja uma v.a. $X \sim Poisson(\lambda)$. Para cada paciente que chega no hospital a probabilidade dele ser encaminhado para o atendimento infantil é p. Defina Y o número de pacientes que são encaminhados por dia para o atendimento infantil nesse hospital.

    (a) Suponha que chegaram 10 pacientes nesse hospital em um dia, encontre a a probabilidade de y pacientes serem encaminhados para o atendimento infantil. Isto é, encontre $p_{Y|X}(y|10) = P(Y = y|X = 10)$.

    (b) Suponha que chegaram x pacientes nesse hospital em um dia, encontre a a probabilidade de y pacientes serem encaminhados para o atendimento infantil. Isto é, encontre $p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x)$.

    (c) Encontre a função de probabilidade da v.a. Y. Que distribuição é essa?

11. ([Ross, 2010] - Cap 6) A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)} \text{ , se } x > 0 \text{ e } y > 0.$$

    (a) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

    (b) Encontre a função densidade condicional de X dado $Y = y$.

    (c) Encontre a função densidade condicional de Y dado $X = x$.

12. ([Ross, 2010] - Cap 6) Seja $f_{X,Y}(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-x}$, se $0 \leq x < \infty$ e $-x < y < x$, a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y. Encontre a função densidade condicional da variável aleatória Y dado $X = x$.

Respostas:
2. Não, as variáveis aleatórias X_1 e X_2 são dependentes.
3. (a) Independentes. $X \sim Gama(\alpha = 2, \lambda = 1)$ e $Y \sim Exponencial(\lambda = 1)$. (b) Dependentes, $f_X(x) = 2(1 - x), 0 < x < 1$ e $f_Y(y) = 2y, 0 < y < 1$.
4. (a) Não são independentes. (b) $f_X(x) = x + 1/2$, se $0 < x < 1$ (c) 1/3.
5. (a) Sim, elas são independentes. (b) $f_X(x) = 6x(1 - x)$, se $0 < x < 1$ e $f_Y(y) = 2y$, se $0 < y < 1$.
7. 25/36.
8. (a) $p_{Y|X}(y|x) = (1/x)$, se $y = 1, 2, \ldots, x$ e $x = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow Y|X = x$ é uniforme discreta. (b) $p_{X,Y}(x, y) = (1/5)(1/x)$ se $x = 1, 2, 3, 4, 5$ e $y = 1, 2, \ldots, x$. (c) $p_{X|Y}(x|y) = 1/(x \sum_{k=y}^{5} \frac{1}{k})$, se $x = y, \ldots, 5$ e $y = 1, 2, 3, 4, 5$. (d) X e Y não são independentes.
9. $p_{X|Z}(x|z) = 1/(z - 1)$, se $z = 2, 3, ...$ e $x = 0, 1, \ldots z - 1$. Ou seja, $X|Z = z$ é v.a. uniforme discreta.
10. (b) $Y|X = x \sim Binomial(n = x, p)$. (c) $Y \sim Poisson(\lambda p)$.
11. (a) X e Y são v.a. dependentes. (b) $f_{X|Y}(x|y) = (y + 1)^2 xe^{-x(y+1)}$, $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow X|Y = y \sim Gama(\alpha = 2, \lambda = y + 1)$. (c) $f_{Y|X}(y|x) = xe^{-xy}$, $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow Y|X = x \sim Exp(\lambda = x)$.
12. $f_{Y|X}(y|x) = 3(x^2 - y^2)/4x^3$.