Lista 5 - Probabilidade III
Método Jacobiano
Prof$^{\underline{a}}$: Jessica Kubrusly

1. ([Ross, 2010] - Cap 6) A função densidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por $f_{X,Y}$ definida a seguir. Encontre a função densidade da variável aleatória $Z = XY$.

$$f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)}, \quad \text{se} \quad x > 0 \text{ e } y > 0.$$

2. ([Ross, 2010] - Cap 6) Sejam X e Y variáveis aleatórias cuja função densidade conjunta é definida por f definida a seguir. Encontre a função densidade conjunta de $U = XY$ e $V = X/Y$. Encontre também as marginais de U e V.

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}, \quad \text{se} \quad x \geq 1 \quad \text{e} \quad y \geq 1.$$

3. ([Ross, 2010] - Cap 6) Sejam X e Y variáveis aleatórias iid com distribuição uniforme no intervalo (0,1). Encontre a função densidade conjunta de U e V para cada caso a seguir.
   (a) $U = X + Y$ e $V = X/Y$; (b) $U = X$ e $V = X/Y$; (c) $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$.

4. ([Ross, 2010] - Cap 6) Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, ambas exponenciais com parâmetro λ, encontre a função densidade conjunta de $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = e^{X_1}$.

5. ([Ross, 2010] - Cap 6) Sejam X, Y e Z v.a. i.i.d. com distribuição $Exp(1)$. Encontre a função densidade conjunta das variáveis aleatórias $U = X + Y$, $V = X + Z$ e $W = Y + Z$.

6. ([Magalhães, 2011] - Seção 3.3) Sejam X e Y variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $Exp(1)$. Encontre a distribuição de $Z = X–Y$.

7. ([Magalhães, 2011] - Seção 3.3) A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por: $f_{X,Y}(x, y) = 2(x + y)$, se $0 < x < y < 1$.
   (a) Encontre a função densidade da variável aleatória $W = X + Y$.
   (b) Calcule $\text{P}(X + Y > 1)$. (c) Calcule $\text{P}(X + Y > 1 \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$

8. ([Magalhães, 2011] - Seção 3.4) Para algum $\alpha > 0$ as variáveis aleatórias contínuas X e Y têm a seguinte densidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\alpha^{-2}e^{-\frac{(x+y)}{\alpha}}, \quad \text{se } 0 < x < y < \infty.$$

   Usando o método Jacobiano obtenha a conjunta de $U = X/Y$ e Y. Elas são independentes?

9. ([Magalhães, 2011] - Seção 3.4) Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade Exponencial de parâmetro 1. Defina $W_1 = X_1/(X_1 + X_2)$, $W_2 = (X_1 + X_2)/(X_1 + X_2 + X_3)$ e $W_3 = X_1 + X_2 + X_3$.
   (a) Obtenha a densidade conjunta de W_1, W_2 e W_3 e verifique se são independentes.
   Dica: para determinar $Im(W_1, W_2, W_3)$ veja que $W_1 > 0$, $W_2 > 0$ e $W_3 > 0$ pela própria definição.
   (b) Mostre que $W_1 \sim U(0, 1)$. (c) Verifique que W_3 segue o modelo $Gama(\alpha = 3, \lambda = 1)$.

Respostas:

1. $f_Z(z) = e^{-z}$. 2. $f_{U,V}(u, v) = 1/(2vu^2)$, $uv \geq 1$ e $u \geq v$; $f_U(u) = (\ln(u)/u^2), u \geq 1$ e

$$f_V(v) = \begin{cases} 1/2 & , \ 0 < v < 1 \\ 1/(2v^2) & , \ v > 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. (a) $f_{U,V}(u, v) = u/(v+1)^2$, $0 < uv < 1+v$ e $0 < u < 1+v$. 4. $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = (1/y_2)\lambda^2e^{-\lambda y_1}$, $1 \leq y_2$ e $y_1 \geq \ln(y_2)$. 5. $f_{U,V,W}(u, v, w) = (1/2)\exp\{-(1/2)(u + v + w)\}$, $u + v > w$, $u + w > v$, $v + w > u$.

6. $f_{X-Y}(z) = \begin{cases} (1/2)e^{-z}, & \text{se } z \geq 0 \\ (1/2)e^{z}, & \text{se } z < 0 \end{cases}$

7. (a) $f_{X+Y}(w) = \begin{cases} w^2, & \text{se } 0 < w < 1 \\ w(2 - w), & \text{se } 1 \leq w < 2 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$ (b) 2/3; (c) 29/33. 8. $f_{U,Y}(u, y) = (2y/\alpha^2)e^{-y(u+1)/\alpha}$, se $0 < u < 1$ e $y > 0$. Não são independentes.
9. $f_{W_1,W_2,W_3}(w_1, w_2, w_3) = e^{-w_3}w_2w_3^2$, se $0 < w_1 < 1$, $0 < w_2 < 1$ e $w_3 > 0$.