

Lista 7 - Probabilidade III
Valor Esperado e Desigualdades com Valor Esperado
Prof^a: Jessica Kubrusly

1. ([Ross, 2010] - Cap 7) Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta definida por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/y & , \text{ se } 0 < y < 1 \text{ e } 0 < x < y \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre: (a) $E[XY]$ (b) $E[X]$ (c) $E[Y]$

2. ([Magalhães, 2011] - Seção 4.4) Suponha que n envelopes estão endereçados, mas as n respectivas cartas são colocadas aleatoriamente nos envelopes. Determine o número médio de cartas enviadas ao destinatário correto.
3. Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias independentes e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais, então $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$.
4. ([Casella e Berger, 2002] - Capítulo 4) Seja Z uma variável aleatória com média nula. Para cada X definido nos itens a seguir, o que podemos dizer sobre $E[X]$, ele é maior, menor ou igual a 1?
(a) $X = (Z - 1)^2$ (b) $X = 1 - Z^2$ (c) X é tal que $\log(X) = Z$
5. ([Ross, 2010] - Cap 8) O número de automóveis vendidos em uma semana é uma variável aleatória com média 16. Dê uma cota superior para a probabilidade da venda na próxima semana passar de:
(a) 18 carros (b) 25 carros.
6. ([Ross, 2010] - Cap 8) Suponha que X seja uma variável aleatória com média e variância ambas iguais a 20. O que podemos dizer sobre $P(0 < X < 40)$?
7. ([Ross, 2010] - Cap 8) Um professor sabe, por experiências passadas, que a nota de seus alunos no exame final é uma variável aleatória com média 75. Além disso, ele sabe também que a variância dessa nota é 25.
(a) Dê uma cota superior para a probabilidade da nota de um aluno ser maior que 85.
(b) O que podemos dizer sobre a probabilidade da nota de um aluno ficar entre 65 e 85?
8. (Exercício 1, Lista 6, prof Adrian) Seja X uma variável aleatória não-negativa tal que $P(X > 10) = \frac{1}{5}$. Mostre que $E[X] \geq 2$.
9. (Exercício 3, Lista 6, prof Adrian) Seja X uma variável aleatória com variância finita e tal que $E[X] = 10$, $P(X \leq 7) = 0,2$ e $P(X \geq 13) = 0,3$. Mostre que $\text{Var}(X) \geq \frac{9}{2}$.
10. ([Ross, 2010] - Cap 8) Suponha que no problema 5 a variância do número de automóveis vendidos em uma semana seja 9. Dê um limite inferior para a probabilidade das vendas na próxima semana ficar entre 10 e 22 automóveis, inclusive.

Respostas:

1. (a) $1/6$ (b) $1/4$ (c) $1/2$;
2. 1;
4. (a) $E[X] \geq 1$ (b) $E[X] \leq 1$ (c) $E[X] \geq 1$;
5. (a) $16/19$ (b) $16/26$;
6. $P(0 < X < 40) \geq 19/20$;
7. (a) $15/17$ (b) $\geq 3/4$;
10. $3/4$.