Lista 8 - Probabilidade III
Variância, Covariância e Correlação
Valor Esperado Condicional e Lei das Expectâncias Iteradas
Prof$^{\text{a}}$: Jessica Kubrusly

1. ([Magalhães, 2011] - Seção 5.2) Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes e com distribuição $Exp(1)$. Determine a variância de $(X_1 + X_2)X_3$.

2. Demonstre as seguintes afirmações, supondo X e Y variáveis aleatórias quaisquer e $a, b \in \mathbb{R}$:
   (a) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
   (b) $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
   (c) $\text{Cov}(aX, Y) = a\,\text{Cov}(X, Y)$
   (d) $\text{Cov}(X, bY) = b\,\text{Cov}(X, Y)$
   (e) $\text{Cov}(aX, bY) = ab\,\text{Cov}(X, Y)$
   (f) $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = \text{Cov}(X_1, Y_1) + \text{Cov}(X_1, Y_2) + \text{Cov}(X_2, Y_1) + \text{Cov}(X_2, Y_2)$

   OBS: Faça o item (f) sem usar o resultado visto em sala de aula. Use apenas a definição de covariância e as propriedades já demonstradas nesse exercício.

3. ([Ross, 2010] - Cap 7) Seja X o número de 1's e Y o número de 2's que aparecem em n lançamentos de um dado. Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

4. ([Ross, 2010] - Cap 7) Um dado é jogado duas vezes. Seja X a soma das duas saídas e Y o resultado da subtração entre o primeiro e o segundo lançamento.
   (a) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ (b) X e Y são variáveis aleatórias independentes? Justifique.

5. Demonstre as seguintes afirmações:
   (a) Sejam X e Y V.A. tais que $Y = aX + b$, com $a > 0$, então $\rho(X, Y) = 1$.
   (b) Sejam X e Y V.A. tais que $Y = aX + b$, com $a < 0$, então $\rho(X, Y) = -1$.

   OBS: Lembre-se que a recíproca dessas afirmações também são verdadeiras, resultados demonstrados em sala de aula.

6. ([Ross, 2010] - Cap 7) Suponha X_1, X_2, X_3 e X_4 variáveis aleatórias descorrelatadas (duas a duas), cada uma com média 0 e variância 1. Encontre a correlação entre as seguintes variáveis aleatórias:
   (a) $X_1 + X_2$ e $X_2 + X_3$ (b) $X_1 + X_2$ e $X_3 + X_4$.

7. ([Magalhães, 2011] - Seção 5.2) A densidade conjunta entre X e Y é dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{, se } 0 < y < 1 \text{ e } 0 < x < y \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

   Obtenha a correlação entre as variáveis X e Y e verifique se elas são independentes.

8. ([Ross, 2010] - Cap 7) A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é definida por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})} & \text{, se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Encontre: $\text{E}[X]$, $\text{E}[Y]$ e mostre que $\text{Cov}(X, Y) = 1$.
   (b) Encontre $\text{E}[X|Y = y]$.
   (c) Defina a variável aleatória $\text{E}[X|Y]$ como função de Y.

9. ([Ross, 2010] - Cap 7) Um dado é lançando sucessivamente. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas, respectivamente, pelo número de lançamentos necessários até se obter o 6 e o 5. Calcule:

   (a) $\mathrm{E}[X]$ (b) $\mathrm{E}[X \mid Y = 1]$ $\mathrm{E}[X \mid Y = 5]$

10. ([Ross, 2010] - Cap 7) A função densidade conjunta do vetor aleatório (X, Y) está apresentada a seguir. Calcule $\mathrm{E}[X^3|Y = y]$.

$$f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}, \text{ se } 0 < x < y \text{ e } 0 < y < \infty$$

11. ([Ross, 2010] - Cap 7) Em uma caixa existem duas moedas. A probabilidade de sair cara quando lançadas é de 0,4 para a primeira moeda e 0,7 para a segunda. Suponha que uma das moedas tenha sido selecionada ao acaso e lançada 10 vezes. Qual o número esperado de lançamentos que resultarão em cara?

12. ([Ross, 2010] - Cap 7) Um prisioneiro está preso em uma cela com 3 portas. A primeira porta leva à um túnel que o leva de volta para a sua cela depois de 2 dias de viagem. A segunda porta leva à um túnel que o leva de volta para a sua cela depois de 4 dias de viagem. A terceira porta o leva para a liberdade depois de 1 dia de viagem. Assuma que o prisioneiro sempre vai escolher as portas 1, 2 e 3 com probabilidades de $0,5$, $0,3$ e $0,2$, respectivamente. Qual o número de dias esperados até que esse prisioneiro consiga sua liberdade.

13. ([Ross, 2010] - Cap 7) Mostre que $\mathrm{Cov}(X, \mathrm{E}[Y|X]) = \mathrm{Cov}(X, Y)$.

14. ([Magalhães, 2011] - Seção 5.3) Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias independentes então $\mathrm{E}[X|Y] = \mathrm{E}[X]$.

15. ([Magalhães, 2011] - Seção 5.3) Sejam X, e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6 - x - y) & , \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Obtenha $\mathrm{E}[Y|X = x]$ e $\mathrm{Var}[Y|X = x]$.
   (b) Defina a variável aleatória $\mathrm{E}[Y|X]$ como função de X.
   (c) Verifique que $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|X]]$.
   (d) Calcule $\mathrm{E}[XY|X = x]$.

Respostas:
1. 8;
3. $-n/36$;
4. (a) 0 (b) Não;
6. (a) 1/2 (b) 0;
7. $\rho_{X,Y} = 1/2$, X e Y não são independentes;
8. (a) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 1$;
9. (a) 6 (b) 7 (c) 5,8192;
10. $y^3/4$;
11. (a) 5,5 (b) 6,07;
12. 12;
15. (a) $\mathrm{E}[Y|X = x] = (26-9x)/(9-3x)$ e $\mathrm{Var}(Y|X = x) = (3x^2+26)/(9-3x)^2$, para $0 < x < 2$ (b) $\mathrm{E}[Y|X] = (26 - 9X)/(9 - 3X)$ (d) $\mathrm{E}[XY|X = x] = xE[Y|X = x] = (26x - 9x^2)/(9 - 3x)$.