Lista 9 - Probabilidade III
Função Geradora de Momentos
Prof$^{\text{a}}$: Jessica Kubrusly

1. Mostre, via função geradora de momentos que a soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição $Bernoulli(p)$ é, por sua vez, uma v.a. com distribuição $Binomial(n, p)$.

2. Mostre, via função geradora de momentos, que a soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição $Exponencial(\lambda)$ é, por sua vez, uma v.a. com distribuição $Gama(n, \lambda)$.

3. Mostre, via função geradora de momentos, que a soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição $Gama(\alpha_j, \lambda)$, $1 \leq j \leq n$, é, por sua vez, uma v.a. com distribuição $Gama(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \lambda)$.

4. ([Magalhães, 2011] - Seção 5.4) Sendo X e $Y \sim N(0, 1)$ independentes, calcule a função geradora de momentos de $W = \frac{1}{2}(X - Y)^2$ e identifique a sua distribuição.

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que sua função geradora de momentos conjunta é dada por:

$$M_{X,Y}(t, s) = \frac{p^4 e^{3t} e^s}{(1 - e^t(1-p))^3 (1 - e^s(1-p))}, \quad t < -log(1-p) \text{ e } s < -log(1-p).$$

   (a) Encontre as funções geradoras de momentos marginais de X e Y e identifique as suas distribuições.

   (b) Verifique, via função geradora de momentos, se X e Y são variáveis aleatórias independentes.

   (c) Encontre $\rho_{X,Y}$.

6. ([Ross, 2010] - Cap 7) Seja $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} e^{-(x-y)^2/2}$, $0 < y < \infty$ e $-\infty < x < \infty$.

   (a) Encontre a função geradora de momentos conjunta de X e Y.

   (b) Encontre as funções geradoras de momentos marginais de X e Y.

   (c) Verifique, via função geradora de momentos, se X e Y são variáveis aleatórias independentes.

   (d) Encontre, via função geradora de momentos, $\text{Cov}(X, Y)$.

Respostas:
4. $M_W(t) = \sqrt{1/(1-2t)}$ e $W \sim \chi_1^2$.
5. (a) $M_X(t) = \left(pe^t/(1 - e^t(1-p))\right)^3$, $t < -\ln(1-p)$ e $M_Y(s) = pe^s/(1 - e^s(1-p))$, $s < -\ln(1-p)$ (b) Sim, X e Y são v.a. independentes. (c) $\rho_{X,Y} = 0$.
6. (a) $M_{X,Y}(t, s) = e^{t^2/2}/(1 - s - t)$, $1 - s - t > 0$ (b) $M_X(t) = e^{t^2/2}/(1-t), t < 1$ e $M_Y(s) = 1/(1-s)$, $s < 1$ (c) X e Y são dependentes (d) $\text{Cov}(X, Y) = 2$.