GRUPO DE TRABALHO: DINÂMICA DE APLICAÇÕES QUADRÁTICAS PLANARES

J. DELGADO, J.L. GARRIDO, N. ROMERO, A. ROVELLA, AND F. VILAMAJÓ

Resumo

Seja Q o conjunto que consite das aplicações do plano no plano cujas coordenadas são polinômios de grau 2 nas variáveis x e y. Exemplos conhecidos são os correspondentes às famílias $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ e $g_\mu(z) = z^2 - \mu\bar{z}$, $\mu \in \mathbb{R}$, cujas dinâmicas tem sido extensivamente estudadas. Consideramos as aplicações $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da forma

$$G(x,y) = (pxy + ax + by + k_1, rx^2 + sy^2 + txy + cx + dy + k_2), \quad (1)$$

com $prs \neq 0$. Sabe-se que Q possui um aberto e denso $Q_g = Q_- \cup Q_+$ que consiste das aplicações de Q que são afinmente conjugadas a uma aplicação da forma (1) e cujo conjunto crítico é uma elipse ($rs < 0$, aplicações em Q_-) ou uma hipérbole ($rs > 0$, aplicações em Q_+).

Mais ainda, as aplicações de $Q_\mp$ se representam, respectivamente, por aplicações a 6 parámetros da forma:

$$G(x,y) = (pxy + ax + by + k_1, x^2 \mp y^2 + txy + \frac{at - 2b}{p}x + \frac{bt \pm 2a}{p}y + k_2). \quad (2)$$

O grupo de trabalho obteve resultados interessantes no estudo das aplicações de Q_g através dessa família.

Theorem 1. [2] *Para o conjunto Q_g valem as seguintes propriedades:*

1. *Toda $G \in Q_g$ tem ∞ como atrator.*
2. *Toda $G \in Q_g$ é geométricamente estável (ver* [4]*).*
3. *Há exatamente 2 classes de equivalência geométrica Q_- e Q_+.*
4. *O conjunto crítico de $G \in Q_-$ é uma elipse com exatamente três pontos cusp. G tem grau ± 2 e é de tipo $(2,4)$ (os pontos do plano tem 2 ou 4 pré-imagens).*
5. *O conjunto crítico de $G \in Q_+$ é uma hipérbole com exatamente um ponto cusp. G tem grau 0 e é de tipo $(0,2,4)$ (os pontos do plano tem 0, 2 ou 4 pré-imagens).*

Com as técnicas desenvolvidas o grupo de trabalho vem realizando um estudo global da dinâmica da família de aplicações não-holomorfas $f_\mu(z) = z^2 - \mu\bar{z}$, que é linearmente conjugada à família $G_\mu(x,y) = (-2xy + \mu x, x^2 - y^2 - \mu y)$ de Q_-.

Designamos por B_μ a bacía de atração de ∞ para a aplicação G_μ.

Theorem 2. [5] *A bacía B_2 é a componente ilimitada do complementar da imagem por G_2 do conjunto crítico e a restrição de G_2 ao complementar da bacía B_2 é conjugada a uma transformação do tipo Baker's-map.*

No caso $\mu = 2$ do teorema acima, a pré-imagem do conjunto de valores críticos é formada pelo conjunto crítico e um deltoide invariante $\tilde{\ell}$ que é o bordo da bacía B_2 e sobre o qual G_2 é conjugada à aplicação $z \to z^2$ no círculo unitário.

No caso $\mu \neq 2$ se obteve o seguinte resultado.

Theorem 3. [2] *A família G_μ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Para $\mu > 2$, o complementar de B_μ possui infinitas componentes e é um conjunto de Cantor para μ suficientemente grande.*

2. *Para $\mu < 2$, B_μ é simplesmente conexo em $\mathbb{R}^2 \cup \infty$. Existem curvas simples fechadas L^+_μ e L^-_μ completamente invariantes por G_μ de modo que $L^+_\mu = \partial B_\mu$ e L^-_μ está contida no fecho do complementar de B_μ. As curvas coincidem para $\mu \approx 2$.*

Referências

[1] F. Bofill, J.L. Garrido, F. Vilamajó, N. Romero and A. Rovella. *On the quadratic Endomorphisms of the Plane.* Advanced Nonlinear Studies. **4** (2004), 37–55.

[2] J. Delgado, J.L. Garrido, F. Vilamajó, N. Romero and A. Rovella. *Critical Points of Quadratic Maps of the Plane.* Em preparação.

[3] L.E. Brouwer. *Beweis des ebenen translationssatzes. Math. Ann.* **72**, (1912) 37–54.

[4] M. Golubitski and V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities.* Graduate texts in Mathematics. **14** (1971) Springer-Verlag.

[5] J. King-Dávalos, H. Méndez-Lango and G. Sienra-Loera. *Some Dynamical Properties of $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$.* Qual. Th. Dyn. Sys. 5, Art. **77**, (2004) 101-120.

[6] J. King-Dávalos. *Algunos aspectos dinamicos y bifurcaciones de la famï¿½lia* $F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}$. PhD. Thesis. UNAM, México, (2006).

[7] I. Malta, N. Saldanha and C. Tomei. *The numerical inversion of functions from the plane to the plane.* Mathematics of Computation 65, no. 216, (1996) 1531-1552.

IM - UFF
E-mail address: `jdelgado@mat.uff.br`

UPC - Espanha
E-mail address: `garrido@ruth.upc.es`

UCOLA - Venezuela.
E-mail address: `nromero@uicm.ucla.edu.ve`

CMAT - Univ. de la República - Uruguay.
E-mail address: `leva@cmat.edu.uy`

UPC - Espanha
E-mail address: `francesc.vilamajo@upc.edu`