Capítulo 1

Coordenadas e distância na reta e no plano

1. Introdução

A **Geometria Analítica** nos permite representar pontos da reta por números reais, pontos do plano por pares ordenados de números reais e pontos do espaço por ternos ordenados de números reais.

Desse modo, curvas no plano e superfícies no espaço podem ser descritas por meio de equações, o que torna possível tratar algebricamente muitos problemas geométricos e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica diversas questões algébricas.

Ao longo destas notas, admitiremos que o leitor tenha conhecimento dos principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, relativos aos seus elementos básicos: pontos, retas e planos. Por exemplo: por dois pontos distintos passa uma, e somente uma reta; por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um, e somente um plano; fixada uma unidade de comprimento, a cada par de pontos A e B corresponde um número real, denominado **distância entre os pontos A e B** ou **comprimento do segmento $\overline{AB}$**, que designamos por $d(A, B)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

a. $d(A,B) \geq 0$.

b. $d(A,B) = 0 \iff A = B$.

c. $d(A,B) = d(B,A)$.

d. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$(desigualdade triangular).

e. $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) \iff A, B$ e C são colineares e C está entre A e B.

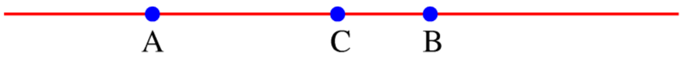

Fig. 1: O ponto C está entre A e B, logo $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$.

2. Coordenadas na reta

Seja r uma reta.

Dizemos que r é uma reta **orientada** quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado **positivo**. O sentido oposto sobre a reta r é denominado **negativo**.

Fig. 2: Escolha de um sentido de percurso na reta r.

Sejam A e B pontos na reta r. Dizemos que o ponto B **está à direita** do ponto A (ou que A **está à esquerda** de B) quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido na reta r.

Fig. 3: B está à direita de A na reta orientada r.

Um **eixo** E é uma reta orientada na qual é fixado um ponto O, chamado **origem**.

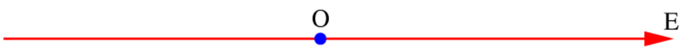

Fig. 4: Origem O escolhida no eixo E.

Todo eixo E pode ser posto em **correspondência biunívoca** com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\boxed{E \longleftrightarrow \mathbb{R}}$$

- à origem O do eixo faz-se corresponder o número zero.
- a cada ponto X de E à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$.
- a cada ponto X de E à esquerda de O corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$.

O número real x, correspondente ao ponto X, é chamado a **coordenada** do ponto X.

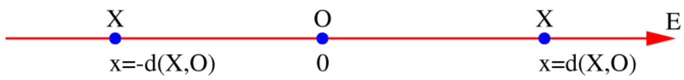

Fig. 5: Coordenada de um ponto X do eixo E em relação à origem O.

Proposição 1

Sejam X e Y dois pontos sobre o eixo E com coordenadas x e y respectivamente.

Então, $d(X, Y) = |y - x| = |x - y|$.

Prova.

Se $X = Y$, não há o que provar.

Suponhamos que $X \neq Y$. Para fixar as idéias, vamos assumir que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos três casos a considerar:

Caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

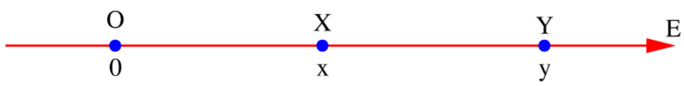

Fig. 6: Caso 1: $0 < x < y$.

Como X está entre O e Y, $d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$, temos, por $d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y)$, que

$$y = x + d(X, Y).$$

Portanto,

$$d(X, Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 2. X e Y estão à esquerda da origem. Isto é, $x < y < 0$.

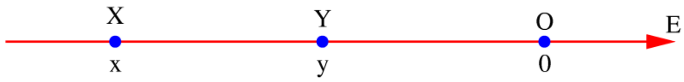

Fig. 7: Caso 2: $x < y < 0$.

Neste caso, Y está entre X e O, $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = -y$.

Logo,

$$d(O,X) = d(X,Y) + d(Y,O) \iff -x = d(X,Y) - y,$$

ou seja,

$$d(X,Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 3. X e Y estão em lados opostos em relação à origem. Isto é, $x < 0 < y$.

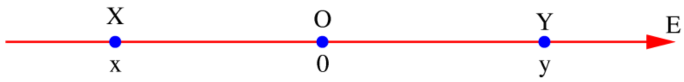

Fig. 8: Caso 3: $x < 0 < y$.

Como O está entre X e Y, $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y)$. Além disso, $d(X,O) = -x$ e $d(O,Y) = y$. Logo,

$$d(X,Y) = -x + y = y - x = |y - x|.$$

Verificando assim o desejado. ■

Observação 1

- *Se X estiver à direita de Y, a demonstração é feita de maneira similar.*
- *Sejam X e Y pontos de coordenadas x e y, e M o* ***ponto médio*** *do segmento $\overline{XY}$, de coordenada m. Então, $m = \dfrac{x+y}{2}$.*

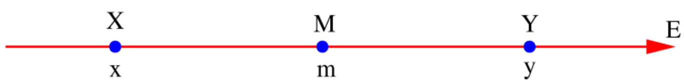

Fig. 9: Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{XY}$, temos $d(M,X) = d(M,Y)$.

De fato, suponhamos que X está à esquerda de Y. Como o ponto médio M está entre X e Y, temos $x < m < y$. Logo,

$$d(M,X) = d(M,Y) \iff |x - m| = |y - m| \iff m - x = y - m$$

$$\iff 2m = x + y \iff m = \frac{x+y}{2}.$$

3. Coordenadas no Plano

• Designamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

O número x chama-se a *primeira coordenada* e o número y chama-se a *segunda coordenada* do par ordenado (x, y).

• Um **sistema de eixos ortogonais** num plano π é um par de eixos OX e OY, tomados em π, que são perpendiculares e têm a mesma origem O.

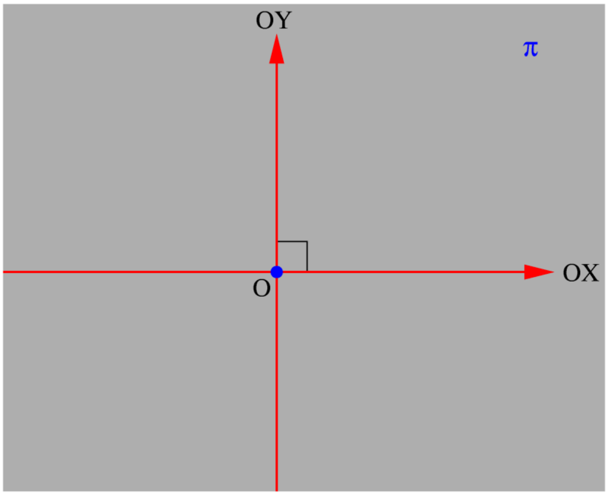

Fig. 10: Sistema de eixos ortogonais OXY no plano π.

O eixo$-OX$ é chamado *eixo-horizontal* e o eixo$-OY$, *eixo-vertical*.

• Um plano π munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2}$$

De fato, dado um ponto $P \in \pi$, tomamos as retas r e s tais que:

- $r \parallel$eixo$-OY$ e $P \in r$,
- $s \parallel$eixo$-OX$ e $P \in s$.

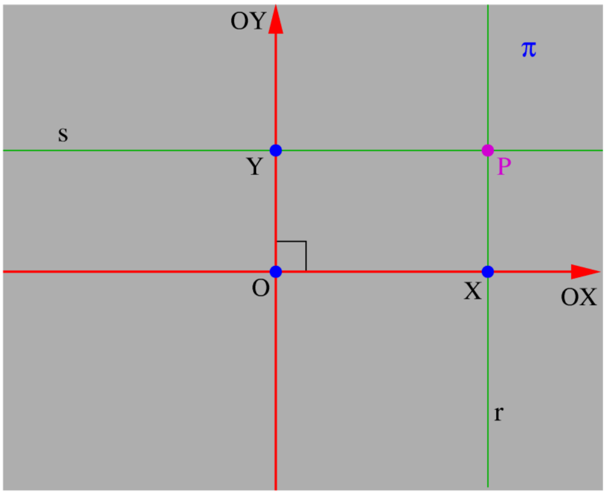

Fig. 11: Determinando as coordenadas do ponto $P \in \pi$

Se o ponto X de interseção da reta r com o eixo$-OX$ tem coordenada x no eixo$-OX$ e o ponto Y de interseção da reta s com o eixo$-OY$ tem coordenada y no eixo$-OY$, associa-se ao ponto P o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Reciprocamente:

Dado o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que, se:

- X é o ponto do eixo$-OX$ de coordenada x;
- Y é o ponto do eixo$-OY$ de coordenada y;
- r é a reta paralela ao eixo$-OY$ que passa por X;
- s é a reta paralela ao eixo$-OX$ que passa por Y, **então** $\{P\} = r \cap s$.

• Os números x e y chamam-se as **coordenadas cartesianas do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado**.

A coordenada x é a *abscissa* de P e y é a *ordenada* de P.

Observação 2

No eixo$-OX$, os pontos têm coordenadas $(x, 0)$.

No eixo$-OY$, os pontos têm coordenadas $(0, y)$.

Observação 3

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes***:*

Primeiro Quadrante
$= \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$
Segundo Quadrante
$= \{(x, y) \mid x < 0 \text{ e } y > 0\}$
Terceiro Quadrante
$= \{(x, y) \mid x < 0 \text{ e } y < 0\}$
Quarto Quadrante
$= \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$

Cada ponto do plano pertence a um dos eixos ortogonais ou a um dos quadrantes.

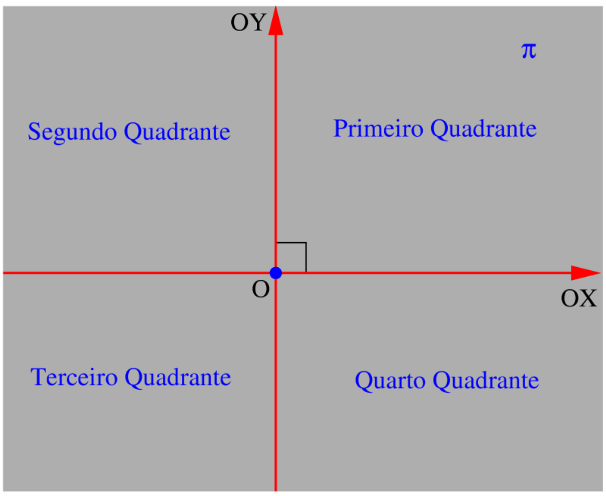

Fig. 12: Quadrantes e eixos ortogonais no plano.

Observação 4

Dados dois eixos concorrentes quaisquer, o processo acima descrito per-

mite estabelecer também uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e pares ordenados de números reais:

De fato (veja a figura 13), cada ponto P do plano é o ponto de interseção de duas retas paralelas aos eixos coordenados. A paralela ao eixo$-OY$ que passa por P intersecta o eixo$-OX$ num ponto cuja coordenada nesse eixo é a **primeira coordenada** *x de P. Analogamente, a paralela ao eixo$-OX$ que passa por P intersecta o eixo$-OY$ num ponto cuja coordenada nesse eixo é a* **segunda coordenada** *y de P.*

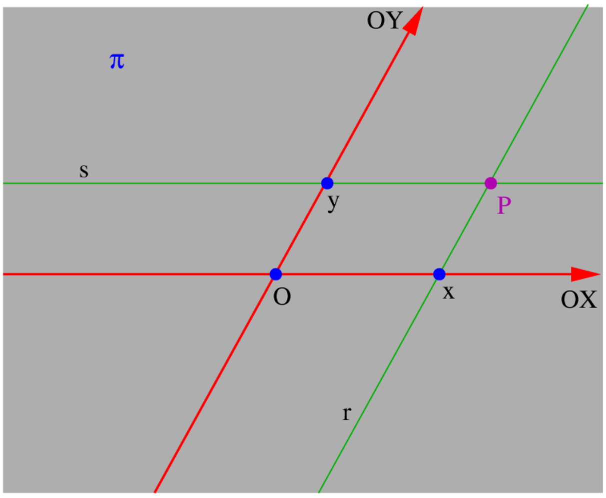

Fig. 13: Sistema de eixos não-ortogonais.

4. Distância entre dois pontos no plano

Seja π um plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY e sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano π.

Seja $Q = (x_1, y_2)$. Como $d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|$ e $d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|$ temos, pelo *Teorema de Pitágoras*,

$$\begin{aligned} & d(P_1,P_2)^2 = d(P_2,Q)^2 + d(P_1,Q)^2 \\ \iff & d(P_1,P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ \iff & \boxed{d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \end{aligned}$$

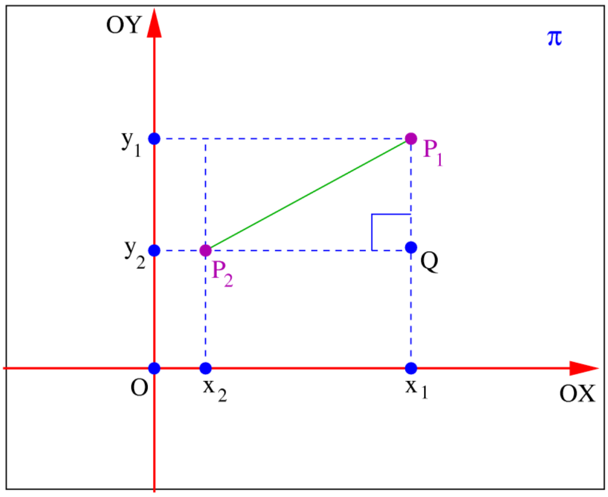

Fig. 14: Distância entre dois pontos no plano.

Observação 5

Sejam OXY um sistema de eixos concorrentes não-ortogonais, que se intersectam segundo um ângulo θ, e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano.

Pela lei dos cossenos, a distância entre P_1 e P_2 é dada por:

$$d(P_1,P_2)^2 = d(P_1,Q)^2 + d(P_2,Q)^2 - 2\cos(\pi - \theta)d(P_1,Q)\,d(P_2,Q) \iff$$

$$\boxed{d(P_1,P_2) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + 2\cos(\theta)\,|x_2 - x_1|\,|y_2 - y_1|}}$$

A complexidade dessa fórmula para calcular a distância entre dois pontos num sistema de eixos não-ortogonais motiva a preferência pelos sistemas de eixos ortogonais, no qual a fórmula para o cálculo da distância é bem mais simples.

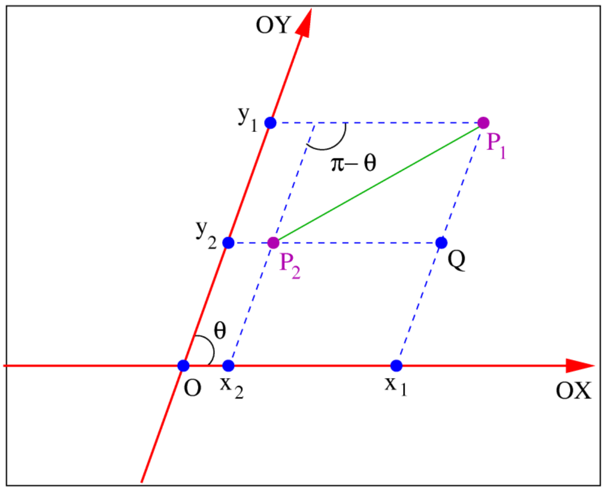

Fig. 15: Distância entre dois pontos no plano num sistema não-ortogonal.

Definição 1

Dados um ponto A num plano π e um número $r > 0$, o **círculo C de centro A e raio $r > 0$** *é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:*

$$C = \{P \in \pi \mid d(P, A) = r\}.$$

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano π e sejam a e b as coordenadas do centro A nesse sistema de eixos. Então,

$$P \in C \iff d(P, A) = r \iff d(P, A)^2 = r^2 \iff$$

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Assim, associamos ao círculo C uma *equação* que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Uma vez obtida a equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser deduzidas por métodos algébricos.

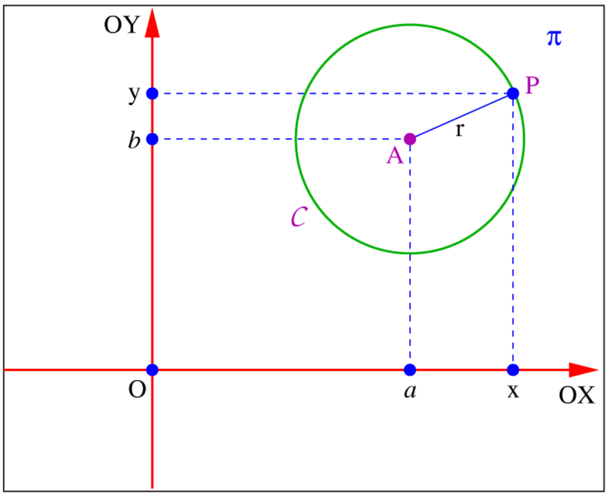

Fig. 16: Círculo de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$.

Exemplo 1

Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

(a) $C : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Completando os quadrados, *obtemos:*

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13.$$

Portanto, o círculo C tem centro no ponto $A = (2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

(b) $C: x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$.

Completando os quadrados, *obtemos:*

$$\begin{aligned}
&x^2 + 3x + y^2 - 5y = -1 \\
&\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\
&\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}.
\end{aligned}$$

Assim, C é o círculo de centro no ponto $A = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e raio $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

Exemplo 2

Dados A e B dois pontos distintos do plano π, seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{R} = \{P \in \pi \mid d(P, A) = d(P, B)\}}$$

Vamos mostrar algebricamente que $\mathcal{R}$ é a **mediatriz do segmento** $\overline{AB}$*, isto é, $\mathcal{R}$ é a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$.*

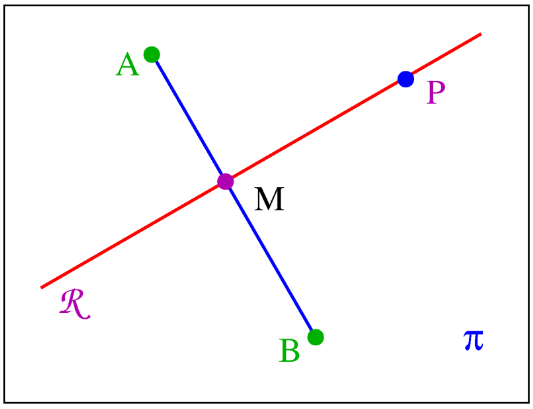

Fig. 17: Mediatriz e ponto médio de $\overline{AB}$.

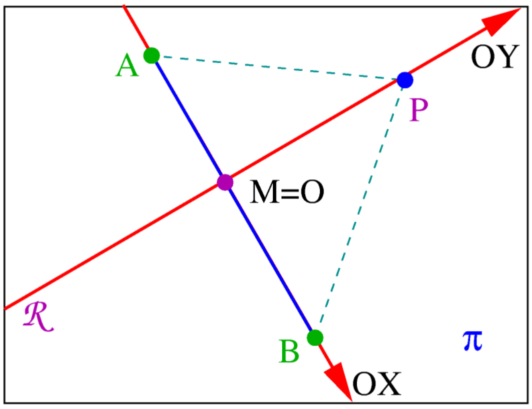

Fig. 18: Escolha do sistema de eixos ortogonais OXY.

Para isso, escolhemos um sistema de eixos ortogonais OXY de modo que o eixo$-OX$ seja a reta que passa pelos pontos A e B, com origem no ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, orientada de modo que A esteja à esquerda de B (figura 18).

Nesse sistema de eixos, A e B têm coordenadas $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$, respectivamente, para algum número real $x_0 > 0$. Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{R} \iff d(P, A) = d(P, B) \iff d(P, A)^2 = d(P, B)^2 \\ \iff (x - (-x_0))^2 + (y - 0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - 0)^2 \\ \iff (x + x_0))^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \\ \iff x^2 + 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 \\ \iff 2xx_0 = -2xx_0 \iff 4xx_0 = 0 \iff x = 0 \iff P \in \text{eixo} - OY\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\} = \text{eixo} - OY$, que é, geometricamente a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M desse segmento, como queríamos provar.

Observação 6

O exemplo anterior ilustra como métodos algébricos resolvem problemas geométricos.

Exemplo 3

Dado o ponto $P = (x, y)$, considere o ponto $P' = (-y, x)$.

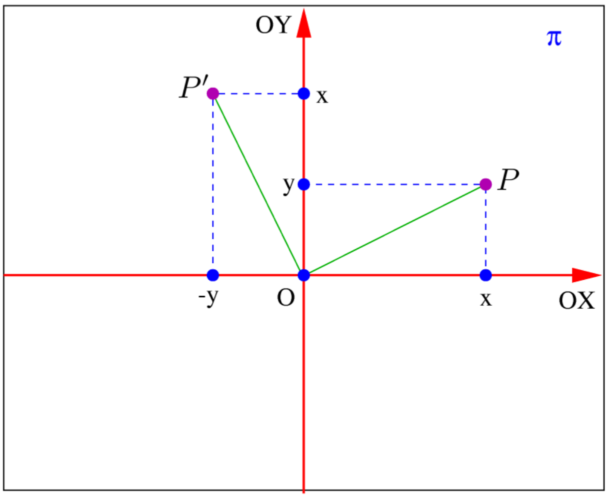

Fig. 19: Posição dos pontos P e P' no plano.

Primeiro observe que o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles, pois:

$$\begin{cases} d(P, O)^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 \\ d(P', O)^2 = (-y - 0)^2 + (x - 0)^2 = y^2 + x^2. \end{cases}$$

Além disso,

$$d(P,P')^2 = (-y-x)^2 + (x-y)^2 = y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$\Longrightarrow d(P,P')^2 = 2(x^2+y^2) \Longrightarrow d(P,P')^2 = d(P,O)^2 + d(P',O)^2 .$$

Pela lei dos cossenos, o triângulo isósceles $\triangle POP'$ é retângulo em O.

Isso significa que o ponto P' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

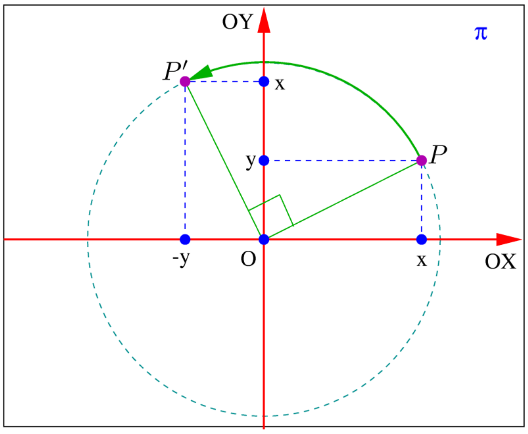

Fig. 20: P rotacionado de 90^o até coincidir com P'.

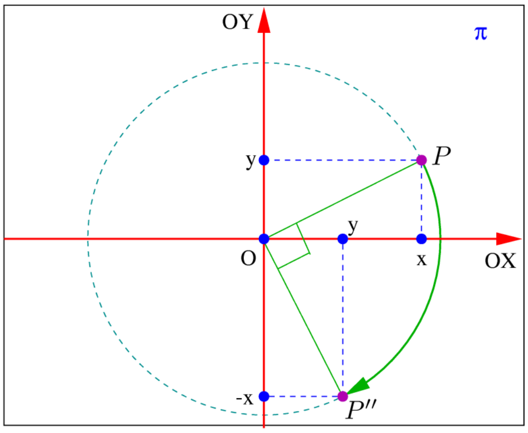

Fig. 21: P rotacionado de 90^o até coincidir com P''.

Consideremos agora o ponto $P'' = (y, -x)$. De maneira análoga, podemos provar que P'' é também obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o, no sentido oposto ao anterior, do segmento OP em torno da origem (veja a figura 21).

Convencionamos que a rotação de 90^o que leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (-y, x)$ tem **sentido positivo**, *e que a rotação de 90^o que leva o ponto P no ponto P'' tem* **sentido negativo**.

Exemplo 4

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e considere os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Então, $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ é o **ponto médio** *do segmento $\overline{P_1P_2}$.*

De fato, sendo $M = (x_M, y_M)$, $Q_1 = (x_M, y_1)$ e $Q_2 = (x_M, y_2)$, é fácil verificar que os triângulos $\triangle P_1MQ_1$ e $\triangle P_2MQ_2$ são congruentes (AAL).

Logo,

$$\begin{aligned}
& \bullet\ d(P_1,Q_1) = d(P_2,Q_2) \\
\Longleftrightarrow\ & |x_M - x_1| = |x_2 - x_M| \\
\Longleftrightarrow\ & x_M \text{ é o ponto médio entre } x_1 \text{ e } x_2 \\
\Longleftrightarrow\ & x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet\ d(Q_1,M) = d(Q_2,M) \\
\Longleftrightarrow\ & |y_M - y_1| = |y_2 - y_M| \\
\Longleftrightarrow\ & y_M \text{ é o ponto médio entre } y_1 \text{ e } y_2 \\
\Longleftrightarrow\ & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}\,.
\end{aligned}$$

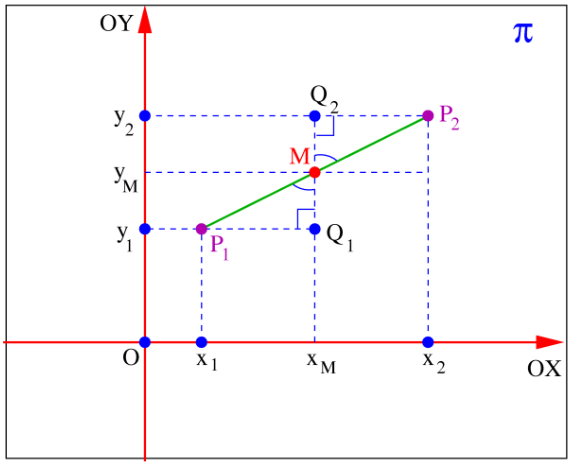

Fig. 22: M é o ponto médio do segmento P_1P_2.

Assim, as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{P_1P_2}$ são os pontos médios das respectivas coordenadas dos pontos P_1 e P_2.