Capítulo 10

1. Operações com vetores no espaço

Vamos definir agora as operações de adição de vetores no espaço e multiplicação de um vetor espacial por um número real. O processo é análogo ao efetuado para definir essas operações com vetores no plano e as propriedades são basicamente as mesmas, por isso muitos detalhes serão omitidos.

Definição 1

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no espaço $\mathcal{E}$. Seja $A \in \mathcal{E}$ um ponto qualquer e sejam AB e BC segmentos orientados representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ respectivamente.

O **vetor soma** *dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, que designamos por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, é, por definição, o vetor representado pelo segmento orientado AC.*

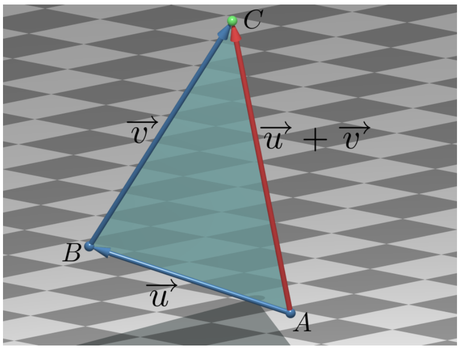

Fig. 1: Soma de vetores no espaço.

Note que a definição da soma de dois vetores recai na situação já estudada no plano, pois os pontos A, B e C estão contidos num mesmo plano π.

De forma análoga ao que foi feito para vetores no plano, podemos verificar que a definição do vetor soma não depende da escolha do ponto $A \in \mathcal{E}$. Isto é, o vetor soma está bem definido.

Na prática, a adição de vetores se efetua em relação às coordenadas dos vetores parcelas num sistema de eixos ortogonais escolhido.

Assim, fixemos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, e, com respeito a esse sistema, sejam $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b', c')$.

Então o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é dado em termos de coordenadas por:

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')}$$

A demonstração deste fato se faz de modo análogo ao feito para vetores no plano.

Exemplo 1

Sejam $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (4, 3, 2)$ pontos do espaço.

Determinar o ponto D tal que: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solução.
Temos,

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2),$$

e

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (-2, 2, 0).$$

Além disso, se $D = (d_1, d_2, d_3)$ é a extremidade do representante AD do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A, então: $d_1 - 3 = -2$, $d_2 - 2 = 2$ e $d_3 - 0 = 0$.

Portanto, $D = (1, 4, 0)$. □

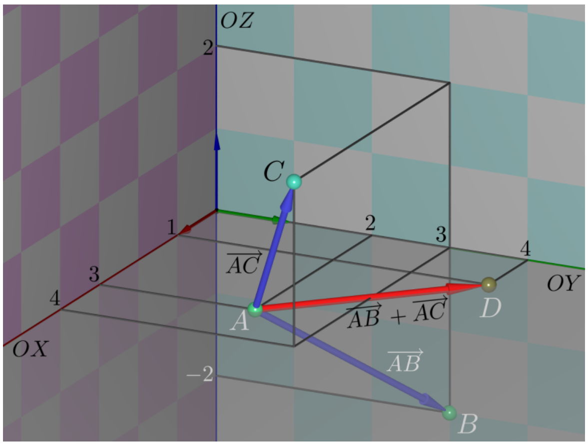

Fig. 2: Exemplo 1.

Propriedades da adição de vetores no espaço

A operação de adição de vetores no espaço possui as mesmas propriedades que a operação de adição de vetores no plano, que são herdadas das correspondentes propriedades da adição de números reais.

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço.

1. Comutatividade: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

4. Associatividade: Dados três vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, temos:

$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right).$$

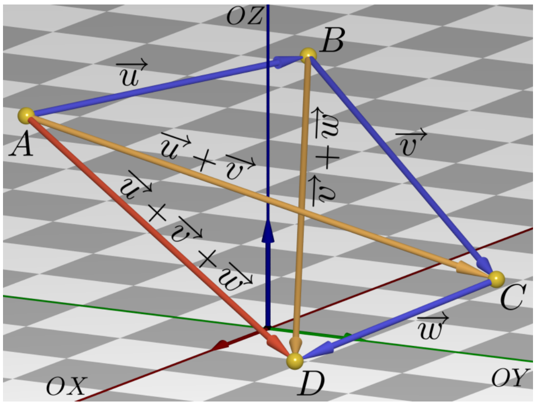

Fig. 3: Associatividade da adição de vetores.

2. Existência de elemento neutro: O vetor **zero**, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$, representado por qualquer segmento nulo, é o único vetor que satisfaz: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ qualquer que seja o vetor $\overrightarrow{u}$.

Em termos de coordenadas, $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$.

3. Existência de inversos aditivos: Dado o vetor $\overrightarrow{u}$, **existe um único** vetor, que é designado $-\overrightarrow{u}$ e chamado **inverso aditivo** (ou simétrico) de $\overrightarrow{u}$, tal que: $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Note que se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, então $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.

Observação 1

A **subtração** *do vetor* $\overrightarrow{v}$ *pelo o vetor* $\overrightarrow{u}$ *é a soma de* $\overrightarrow{v}$ *com o inverso aditivo* $-\overrightarrow{u}$ *do vetor* $\overrightarrow{u}$. *O vetor* $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u})$ *se escreve, abreviadamente, como* $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

Por exemplo, na figura 3, o vetor $\overrightarrow{BD}$ é exatamente o vetor que devemos adicionar a $\overrightarrow{AB}$ para obter $\overrightarrow{AD}$. Ou seja, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$.

Observação 2

Já sabemos que se A, B, C são pontos não-colineares do plano, então o ponto D faz do quadrilátero $ABDC$ um paralelogramo se, e somente se, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Observação 3

Se A, B, C e D são pontos não-coplanares no espaço, então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE}\,,\\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AF}\,,\\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AG}\,,\end{aligned}$$

e

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH}\,,$$

se, e somente se, A, B, C, D, E, F, G, e H são os vértices de um paralelepípedo no espaço *(figura 4).*

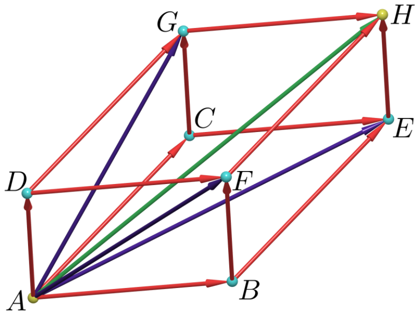

Fig. 4: Paralelepípedo.

• A operação de **multiplicação** de um número real por um vetor no espaço é definida da mesma forma que no plano.

Definição 2

Sejam $\overrightarrow{AB}$ um vetor do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto de λ por $\overrightarrow{AB}$** *é o vetor $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, onde os pontos A, B e B' são colineares e satisfazem:*

• $|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|$.

• *os segmentos AB e AB' têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.*

Observação 4

Note que se $\lambda = 0$, então $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$, isto é, $B' = A$ e, portanto, $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Analogamente, $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Na prática, a multiplicação de um escalar por um vetor se efetua em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais da mesma forma que foi feito no plano. Ou seja, se $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ é um vetor do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\boxed{\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)}$$

Exemplo 2

Sejam $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 3, 3)$. Determinemos as extremidades D, D' e D'' dos representantes CD, CD' e CD'' dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-2\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1, 1, 0)$.

Solução.

Em termos de coordenadas, temos $\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, 3-1) = (1, 1, 2)$. Logo,

$$-2\overrightarrow{AB} = (-2 \cdot 1, -2 \cdot 1, -2 \cdot 2) = (-2, -2, -4), \text{ e } 2\overrightarrow{AB} = (2, 2, 4).$$

Como $C = (1, 1, 0)$, as coordenadas dos pontos, $D = (d_1, d_2, d_3)$, $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$ e $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$, satisfazem:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = 1 \\ d_3 - 0 = 2 \end{cases} ;$$

$$\overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d'_1 - 1 = -2 \\ d'_2 - 1 = -2 \\ d'_3 - 0 = -4 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d''_1 - 1 = 2 \\ d''_2 - 1 = 2 \\ d''_3 - 0 = 4 \end{cases} .$$

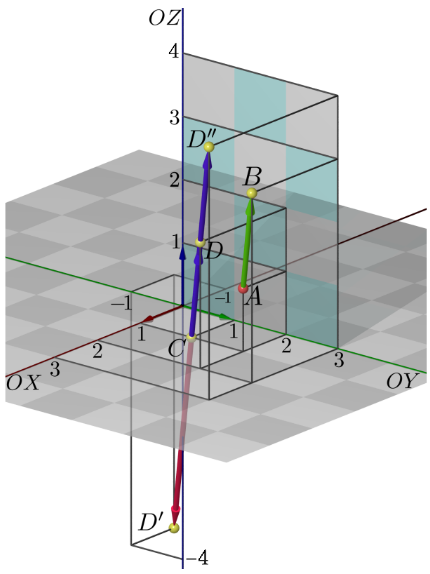

Fig. 5: Exemplo 2.

Portanto,

$$D = (2, 2, 2),\ D' = (-1, -1, -4) \quad \text{e} \quad D'' = (3, 3, 4).$$

são os pontos procurados. □

Propriedades da multiplicação de escalares por vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do espaço e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. A multiplicação de escalares por vetores satisfaz as seguintes propriedades.

1. Associatividade: $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{a}$;

2. Distributividade: $\begin{cases} \lambda \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a} \end{cases}$;

3. Elemento neutro multiplicativo: O número $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

Observação 5

Essas propriedades são verificadas escrevendo em un sistema de eixos ortogonais os vetores envolvidos.

Observação 6

Se $\overrightarrow{u}$ é um vetor do espaço, então o seu inverso aditivo $-\overrightarrow{u}$ é obtido multiplicando $\overrightarrow{u}$ por -1. De fato, $\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{u} = (1 + (-1))\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Aplicações da soma de vetores e do produto de um vetor por um escalar.

Exemplo 3

Seja $\Delta = \triangle ABC$ o triângulo de vértices A, B e C e seja O um ponto qualquer no espaço.

O **centro de massa** *ou* **centro de gravidade** *do triângulo Δ é o ponto G definido pela relação*

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}$$

Mostre que:

(a) *A definição do ponto G não depende da escolha do ponto O.*

(b) *O ponto G é caracterizado pela relação*

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}}$$

Solução.

(a) Se O' é outro ponto qualquer, temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O'G} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} \\
&= \overrightarrow{O'O} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \\
&= 3\,\frac{1}{3}\overrightarrow{O'O} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}\right).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\overrightarrow{O'G} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}\right),$$

qualquer que seja o ponto O'.

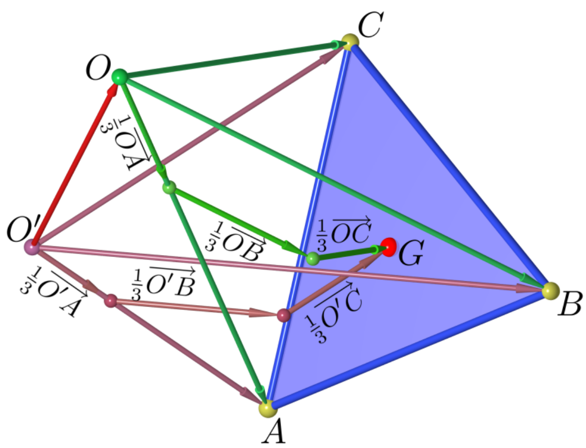

Fig. 6: G independe da escolha de O.

(b) Tomando O como sendo o próprio ponto G, na relação que define G, vemos que

$$\overrightarrow{GG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right),$$

e, sendo $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$, temos:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

como queríamos. □

Proposição 1

Sejam $\Delta = \triangle ABC$ um triângulo, G o centro de massa de Δ, e M, N e P os pontos médios dos lados AC, BC e AB, respectivamente. Então,

$$\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}\,, \quad \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN}\,, \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GP}\,.$$

Prova.

De fato, como $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{GM}$ e $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GM}$, temos:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{GM} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\,. \end{aligned}$$

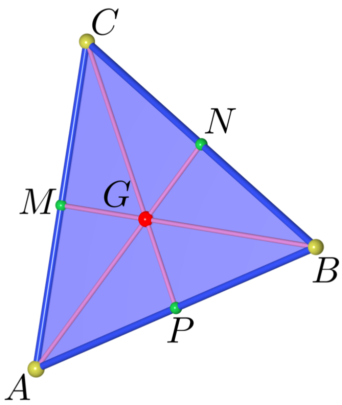

Fig. 7: Centro de massa como intersecção das medianas de Δ.

Da identidade $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, obtemos $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}$.

Logo,

$$2\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}\,.$$

As identidades $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN}$ e $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GP}$ são verificadas de forma análoga. ■

Observação 7

A proposição anterior nos diz que o centro de massa G pertence às retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos de Δ. Isto é, G é o **baricentro** *(interseção das medianas) do triângulo Δ.*

Além disso, pela proposição anterior, temos que a distância de G a um dos vértices é o dobro da sua distância ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Definição 3

Um **tetraedro** *$\mathcal{T}$ é um poliedro com quatro vértices não coplanares, seis arestas e quatro faces triangulares (veja a figura 8).*

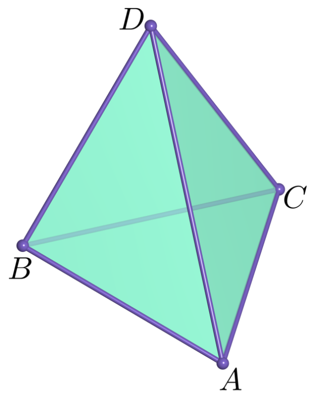

Fig. 8: Tetraedro $\mathcal{T}$.

Seja O um ponto do espaço. O **centro de massa** *ou* **centro de gravidade** *do tetraedro $\mathcal{T}$ de vértices A, B, C e D é o ponto G definido pela relação:*

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)}$$

Da mesma maneira como foi feito no caso do triângulo, podemos provar que o ponto G não depende do ponto O (figura 9). Em particular, tomando $O = G$, obtemos que:

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}}$$

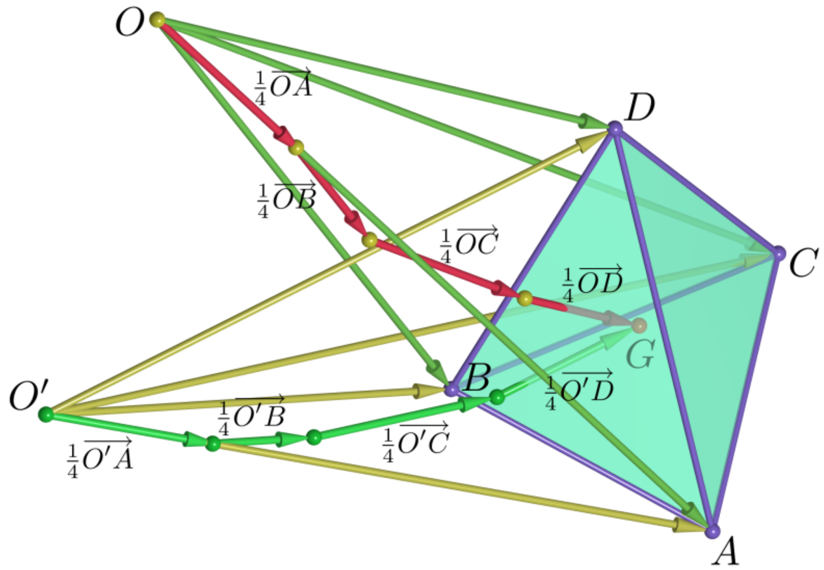

Fig. 9: Determinação do centro de massa G do tetraedro $\mathcal{T}$.

Exemplo 4

Sejam A, B, C e D pontos não-coplanares do espaço e seja $\mathcal{T}$ o tetraedro que eles determinam. Chame A' o baricentro da face triangular de $\mathcal{T}$ oposta ao vértice A, B' o baricentro da face oposta ao vértice B, C' o baricentro da face oposta ao vértice C e D' o baricentro da face oposta ao vértice D.

Verificar que o centro de massa do tetraedro $\mathcal{T}$ coincide com o centro de massa do tetraedro $\mathcal{T}'$ cujos vértices são os baricentros A', B', C' e D'.

Solução.

Os baricentros das faces triangulares são determinados pelas relações:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA'} &= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right), & \overrightarrow{OB'} &= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right), \\ \overrightarrow{OC'} &= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right), & \overrightarrow{OD'} &= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right). \end{aligned}$$

Usando essas identidades, temos:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}\right) \\ = & \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)\right. \\ + & \left.\tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\right] \\ = & \tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right). \end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa do tetraedro de vértices A', B', C' e D' é igual ao centro de massa do tetraedro de vértices A, B, C e D. □

Proposição 2

O centro de massa G do tetraedro $\mathcal{T}$ é o ponto de intersecção das retas que ligam os vértices de $\mathcal{T}$ aos baricentros das suas faces triangulares opostas.

Prova.

De fato, se D' é o baricentro do triângulo $\triangle ABC$, temos

$$\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{D'C} = \vec{0}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GD'} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD'} \\ &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - \left(\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{D'C}\right) \\ &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DG}\,. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GD'}$, temos que G pertence à reta que liga os pontos D e D', e $d(G,D) = 3\,d(G,D')$.

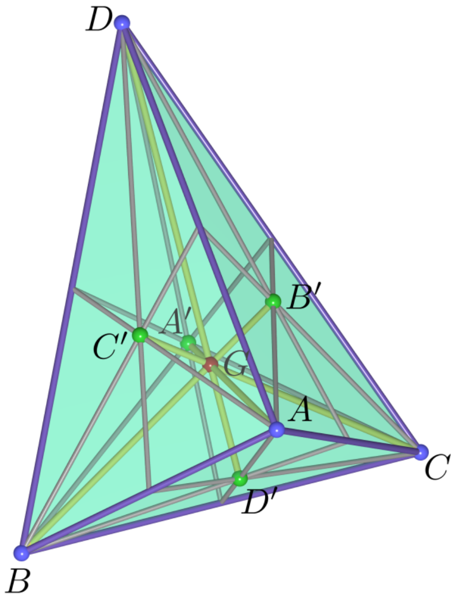

Fig. 10: $G = AA' \cap BB' \cap CC' \cap DD'$

Procedendo de modo análogo, podemos provar que $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{GB'}$ e $\overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{GC'}$. Veja a figura 10. ■

2. Colinearidade e coplanaridade de pontos no espaço

Sabemos que três pontos A, B e C no espaço são colineares se eles pertencem a uma mesma reta.

Vamos analisar a colinearidade de pontos no espaço usando vetores.

Para isso, precisamos da seguinte definição.

Definição 4

O vetor $\overrightarrow{v}$ é um **múltiplo** *do vetor $\overrightarrow{u}$ quando existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.*

Observação 8

a. *Todo vetor é múltiplo de si próprio (neste caso, $\lambda = 1$).*

b. *O vetor zero ($\overrightarrow{0}$) é múltiplo de qualquer vetor.*

De fato, dado um vetor arbitrário $\overrightarrow{u}$, temos $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.

Em contrapartida, nenhum vetor não-nulo pode ser múltiplo do vetor zero.

c. *Se $\overrightarrow{v} \neq 0$ e $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, então $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.*

Proposição 3

Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores do espaço, então um dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0\,.$$

Prova.
Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

($\Longrightarrow$) Se $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Logo,

$$(x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

ou seja,

$$x_2 = \lambda x_1\,, \quad y_2 = \lambda y_1\,, \quad z_2 = \lambda z_1\,. \tag{1}$$

Multiplicando a primeira das identidades (1) por y_1 e a segunda por x_1, obtemos

$$y_1x_2 = \lambda x_1y_1 = x_1y_2,$$

isto é, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Multiplicando a primeira das identidades (1) por z_1 e a terceira por x_1, obtemos

$$x_2 z_1 = \lambda x_1 z_1 = x_1 z_2,$$

isto é, $x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0$.

Finalmente, multiplicando a segunda das identidades (1) por z_1 e a terceira por y_1, obtemos

$$y_2 z_1 = \lambda y_1 z_1 = y_1 z_2,$$

isto é, $y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_1 z_2 - x_2 z_1 = y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0.$$

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} = (0,0,0)$, então $\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{v}$, isto é, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Podemos, então, supor que $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1) \neq (0,0,0)$.

Assim, necessariamente, uma das coordenadas de $\overrightarrow{u}$ deve ser diferente de zero.

Se $x_1 \neq 0$, seja $\lambda = \dfrac{x_2}{x_1}$.

Afirmamos que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

De fato, como $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, temos $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1} y_1$. Também, sendo $x_1 z_2 - z_1 x_2 = 0$, temos $z_2 = \dfrac{x_2}{x_1} z_1$. Logo,

$$\lambda\overrightarrow{u} = \frac{x_2}{x_1}(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x_2}{x_1} x_1, \frac{x_2}{x_1} y_1, \frac{x_2}{x_1} z_1\right) = (x_2, y_2, z_2) = \overrightarrow{v}.$$

Os casos $y_1 \neq 0$ e $z_1 \neq 0$ são tratados da mesma maneira. ■

Observação 9

(a) *Para mostrar que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são colineares, basta verificar que um dos números*

$$x_1 y_2 - x_2 y_1, \qquad x_1 z_2 - x_2 z_1 \qquad ou \qquad y_1 z_2 - y_2 z_1\,,$$

é diferente de zero.

(b) *Os números $x_1 y_2 - x_2 y$, $x_1 z_2 - x_2 z_1$ e $y_1 z_2 - y_2 z_1$ são os determi-*

nantes 2×2 *que podem ser formados com as colunas da matriz* 2×3

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix},$$

em cujas filas aparecem as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.

Definição 5

Dizemos que dois vetores $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *não-nulos são* **colineares** *quando um deles é múltiplo do outro.*

Essa definição está bem justificada, pois se $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, então os pontos A, B e C estão sobre uma mesma reta. E, reciprocamente, se A, B e C são pontos distintos de uma reta, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Para isso, basta tomar $\lambda = \pm\dfrac{d(A,C)}{d(A,B)}$, onde escolhemos o sinal positivo caso B e C estejam do mesmo lado em relação ao ponto A na reta que os contém, e o sinal negativo caso B e C estejam em lados opostos. Portanto, temos:

A, B e C são pontos colineares $\Longleftrightarrow$ os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos.

Exemplo 5

Determinar se $A = (-1,1,0)$, $B = (1,1,1)$ *e* $C = (-2,-1,-1)$ *são colineares ou não.*

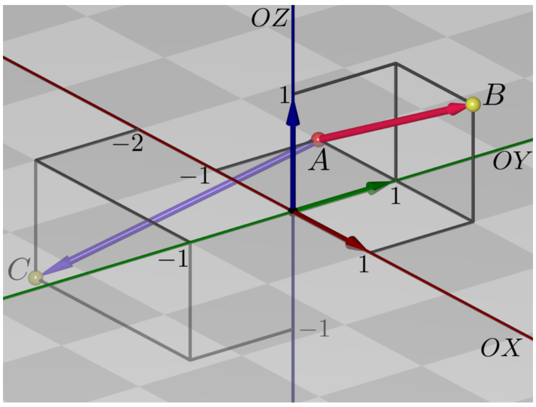

Fig. 11: Exemplo 5.

Solução.

Como

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (2,0,1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, z_2) = (-1,-2,-1),$$

e

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (2)(-2) - (0)(-1) = -4 \neq 0,$$

os pontos dados não são colineares. □

Exemplo 6

Determinar se os pontos $A = (0,1,0)$, $B = (1,1,1)$ e $C = (-2,1,-2)$ são colineares ou não.

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (y_1, y_2, y_3) = (-2,0,-2)$.

A matriz 2×3 que tem por filas as coordenadas desses vetores é

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e os determinantes 2×2 formados com as colunas dessa matriz são

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1(0) - (-2)(0) = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 1(-2) - 1(-2) = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0(-2) - 1(0) = 0.$$

Portanto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos, ou seja, os pontos A, B e C são colineares. □

Sabemos que três pontos A, B e C não-colineares determinam um único plano π no espaço. O teorema abaixo nos permite saber quando um quarto ponto D pertence ou não a este plano.

Definição 6

Um vetor $\overrightarrow{v}$ que é soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ é chamado uma **combinação linear** *de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$, ou melhor, $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ se existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}}$$

Teorema 1

Sejam A, B e C pontos não-colineares no espaço e seja π o plano que eles determinam. A fim de que o ponto D pertença ao plano π é necessário e suficiente que o vetor $\overrightarrow{AD}$ seja **combinação linear** *dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja,*

$$\boxed{D \in \pi \iff \text{existem } x, y \in \mathbb{R}, \text{ tais que } \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}$$

Prova.

($\Longrightarrow$) Suponhamos primeiro que $D \in \pi$.

Seja r_1 a reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ que passa por D e seja r_2 a reta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que passa por D.

Então r_1 está contida no plano π e intersecta a reta que contém os pontos A e B num ponto D_1.

Analogamente, r_2 está contida no plano π e intersecta a reta que contém os pontos A e C num ponto D_2.

Como os pontos A, B e D_1 são colineares, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD_1} = x\overrightarrow{AB}$. Também, como A, C e D_2 são colineares, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AD_2} = y\overrightarrow{AC}.$$

Sendo AD_1DD_2 um paralelogramo, temos:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

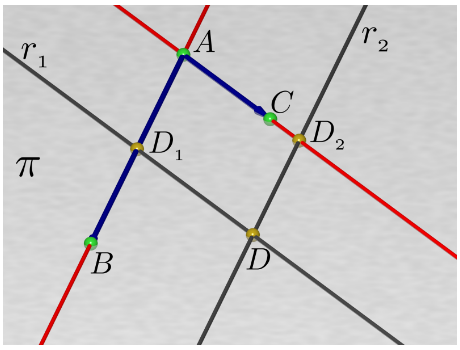

Fig. 12: A, B, C e D coplanares.

($\Longleftarrow$) Suponhamos, agora, que $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Isto é, existem $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Escolhemos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço, de modo que a origem O coincida com o ponto A e que os eixos OX e OY estejam sobre o plano π. Assim, nesse sistema de eixos, $\pi_{XY} = \pi$.

Sendo as terceiras coordenadas de A, B e C iguais a zero e, $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} +$

$y\overrightarrow{AC}$, concluímos que a terceira coordenada do ponto D é também igual a zero (figura 13). Logo $D \in \pi_{XY} = \pi$. ■

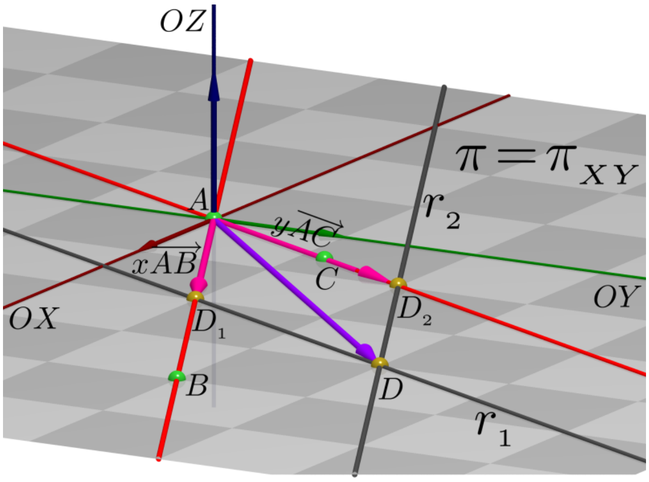

Fig. 13: Sistema $OXYZ$ e $D \in \pi_{XY}$.

Exemplo 7

Considere os pontos $A = (1,2,3)$, $B = (2,3,4)$, $C = (3,4,6)$, $D = (1,1,2)$ *e* $E = (4,5,2)$.

Mostre que:

(a) *A, B e C não são colineares e, portanto, determinam um plano π.*

(b) *D não pertence ao plano π.*

(c) *E pertence ao plano π.*

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,2,3)$, $\overrightarrow{AD} = (0,-1,-1)$ e $\overrightarrow{AE} = (3,3,-1)$.

(a) Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplo um do outro, pois $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = 1 \neq 0$, concluímos que A, B e C não são colineares, determinando, assim, um plano π.

(b) Pelo teorema 1, $D \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Isto é,

$$(0,-1,-1) = x(1,1,1) + y(2,2,3) = (x+2y, x+2y, x+3y)\,.$$

Portanto, os números x e y devem satisfazer as equações:

$$x+2y=0\,,\qquad x+2y=-1\,,\qquad x+3y=-1\,,$$

o que é impossível, pois as duas primeiras implicam que $0=-1$.

Concluímos, então, a não-existência dos números x e y e, portanto, a impossibilidade da relação $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Logo $D \notin \pi$.

(c) De novo, pelo teorema 1, $E \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\,.$$

Isto é,

$$(3,3,-1) = x(1,1,1) + y(2,2,3) = (x+2y, x+2y, x+3y)\,.$$

Logo x e y devem satisfazer, simultaneamente, as equações:

$$x+2y=3\,,\qquad x+2y=3\,,\qquad x+3y=-1\,.$$

ou seja, x e y são a solução do sistema $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+3y=-1. \end{cases}$ Resolvendo o sistema, obtemos, $x=11$ e $y=-4$. Portanto, $\overrightarrow{AE} = 11\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, e os pontos A, B, C e E são coplanares. $\square$

Provaremos, agora, que quatro pontos não-coplanares A, B, C e D determinam o espaço todo, ou melhor, que todo vetor do espaço se expressa de maneira única como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Definição 7

Dizemos que os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ são **linearmente independentes (LI)** *quando os pontos A, B, C e D não são coplanares, isto é, não pertencem a um mesmo plano.*

Se os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ não são linearmente independientes, dizemos que eles são **linearmente dependientes (LD)**. *Nesse caso, os pontos A, B, C e D são coplanares.*

Teorema 2

Sejam $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ três vetores linearmente independentes no espaço. Então, para cada vetor $\overrightarrow{w}$ do espaço, existem escalares únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\boxed{\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3}} \tag{2}$$

Prova.

Sejam A, B, C, D e P pontos do espaço tais que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP}$. Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são LI, os pontos A, B, C e D não são coplanares.

Designamos π_1 o plano que contém os pontos A, B e C, π_2 o plano determinado pelos pontos A, B e D e π_3 o plano determinado pelos pontos A, C e D (figura 14).

Sejam agora π_1', π_2' e π_3' os planos que passam pelo ponto P e são paralelos aos planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente.

Como a reta que contém os pontos A e D não está contida no plano π_1, essa reta intersecta o plano π_1' num único ponto D', sendo então

$$\overrightarrow{AD'} = z\,\overrightarrow{AD},$$

para algum número $z \in \mathbb{R}$, o qual é determinado de forma única pelo ponto D' e, portanto, pelo ponto P.

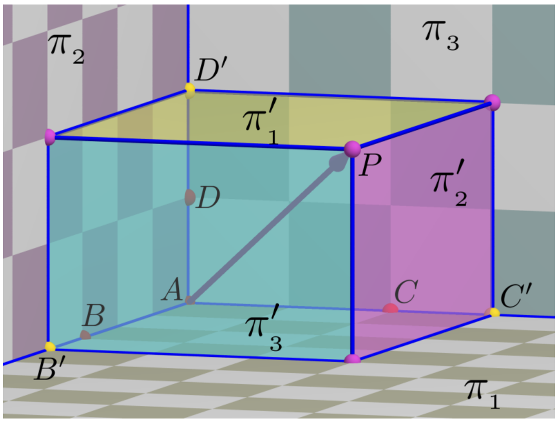

Fig. 14: Determinando os pontos B', C' e D'.

Analogamente, a reta que passa por A e C não está contida no plano π_2, logo intersecta o plano π_2', paralelo a π_2, num único ponto C', de onde concluímos que $\overrightarrow{AC'} = y\,\overrightarrow{AC}$, para algum escalar $y \in \mathbb{R}$ determinado de maneira única pelo ponto P.

Finalmente, a reta que passa pelos pontos A e B não está contida no plano π_3, intersectando, portanto, o plano π_3' num único ponto B'.

Assim, existe um escalar x, determinado de maneira única pelo ponto P, tal que $\overrightarrow{AB'} = x\,\overrightarrow{AB}$.

Por causa do paralelismo estabelecido entre os planos, os segmentos AB', AC' e AD' são arestas de um paralelepípedo no qual os pontos A e P são extremidades de uma das diagonais. Assim, concluímos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}\\ &= x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD}\\ &= x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3}\,,\end{aligned}$$

como queríamos provar. ■

O Teorema 2 diz que qualquer vetor do espaço se exprime de maneira única como combinação linear de três vetores LI dados. Por isso dizemos que o espaço **tem dimensão três**.

Exemplo 8

Considere os pontos $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,1,2)$, $C = (2,0,1)$ e $D = (1,0,-1)$.

(a) *Verifique que O, A, B e C são pontos coplanares.*

(b) *Verifique que O, A, B e D são pontos não-coplanares.*

(c) *Escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (2,6,5)$ como combinação linear (soma de múltiplos) dos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$.*

Solução.

(a) Observe, primeiro, que os pontos O, A e B não são colineares.

De fato, os vetores $\overrightarrow{OA} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{OB} = (3,1,2)$ não são múltiplo um do outro, pois a matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ possui uma submatriz 2×2, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ com determinante diferente de zero.

Para verificar que o ponto C pertence ao plano π determinado pelos pontos O, A e B, devemos determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}\,,$$

ou seja:

$$(2,0,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(3,1,2) = (\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

Logo α e β devem ser solução das equações:

$$\alpha + 3\beta = 2 \tag{3}$$

$$\alpha + \beta = 0 \tag{4}$$

$$\alpha + 2\beta = 1 \tag{5}$$

Da equação (4), obtemos que $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (3), obtemos $-\beta + 3\beta = 2$, ou seja, $\beta = 1$; portanto, $\alpha = -1$.

A equação (5) também é satisfeita por $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.

Assim, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e, pelo Teorema 1, C pertence ao plano π.

(b) Sabemos que o ponto $D = (1,0,-1)$ pertence ao plano π que contém O, A e B se, e somente se, existem escalares α e β, tais que:

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}.$$

Isto é, em termos de coordenadas,

$$\alpha + 3\beta = 1 \tag{6}$$

$$\alpha + \beta = 0 \tag{7}$$

$$\alpha + 2\beta = -1 \tag{8}$$

Da equação (7), obtemos $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (6), obtemos $\beta = \frac{1}{2}$.

Porém, substituindo $\alpha = -\beta$ na equação (8), obtemos $\beta = -1$.

Logo, como β não pode assumir dois valores ao mesmo tempo, concluímos que não existem escalares α e β que resolvam as três equações simultaneamente.

Portanto, $D \notin \pi$.

(c) Sabemos, do item **(b)**, que os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são LI. Logo, pelo teorema 2, todo vetor do espaço se escreve, de forma única, como combinação linear desses vetores.

Logo, para $\overrightarrow{w} = (2, 6, 5)$, existem números reais únicos x, y e z, tais que

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OD}\,.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}(2,6,5) &= x(1,1,1) + y(3,1,2) + z(1,0,-1)\\ &= (x+3y+z, x+y, x+2y-z)\,.\end{aligned}$$

Dessa identidade, obtemos:

$$x + 3y + z = 2 \tag{9}$$

$$x + y = 6 \tag{10}$$

$$x + 2y - z = 5 \tag{11}$$

Pela equação (10), $x = 6 - y$. Substituindo nas equações (9) e (11), temos:

$$\begin{cases} 6 - y + 3y + z &= 2\\ 6 - y + 2y - z &= 5, \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 2y + z &= -4\\ y - z &= -1. \end{cases}$$

Somando essas duas equações, obtemos $3y = -5$, isto é, $y = -\dfrac{5}{3}$.

Logo,

$$z = y + 1 = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x = 6 - y = 6 + \frac{5}{3} = \frac{23}{3}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w} = \frac{23}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}\,.$$

é a expressão de $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ □

Terminologia: Uma **base** do espaço é um *conjunto ordenado formado por três vetores LI*.

Se $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ é uma base do espaço e $\overrightarrow{w}$ é um vetor qualquer, sabemos, pelo teorema 2, que existe apenas um terno de números reais x, y e z, tais que

$$\boxed{\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3}}$$

Os números x, y e z são chamados as **coordenadas** de $\overrightarrow{w}$ em relação à base $\mathcal{B}$, e escrevemos $\overrightarrow{w} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$.

Considerando um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas $OXYZ$, os vetores $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$ são LI.

A base $C = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é chamada **base canônica** do espaço em relação ao sistema $OXYZ$. Note que, se as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{w}$ em relação ao sistema $OXYZ$ são $\overrightarrow{w} = (x, y, z)$, então

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}\,.$$

Isto é, as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ no sistema $OXYZ$ são exatamente as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ em relação à base canônica C do sistema $OXYZ$:

$$\overrightarrow{w} = (x, y, z) = (x, y, z)_C.$$