Capítulo 11

1. Equações da reta no espaço

Sejam A e B dois pontos distintos no espaço e seja r a reta que os contém. Então,

$$\boxed{P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}}$$

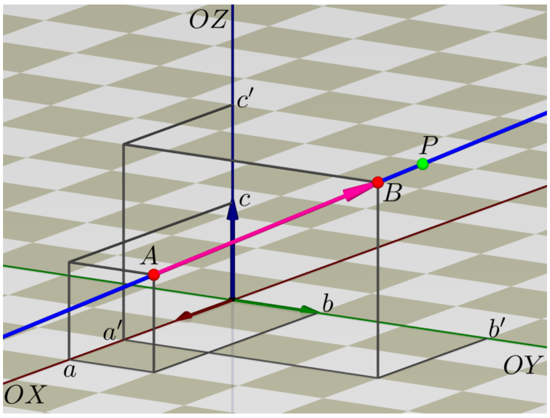

Fig. 1: Reta r passando por A e B.

Como o ponto P pode ser visto como a translação do ponto A pelo vetor $\overrightarrow{AP}$, isto é, $P = A + \overrightarrow{AP}$, a condição acima também se escreve:

$$P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } P = A + t\overrightarrow{AB}\,.$$

Assim, a reta r é caracterizada pela equação

$$\boxed{r : P = A + t\,\overrightarrow{AB}\ ;\ t \in \mathbb{R}}$$

que é chamada **equação paramétrica** da reta r com **parâmetro** t.

Equação paramétrica da reta em coordenadas

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e considere os pontos A e B em coordenadas: $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$

Escrevendo o ponto P em coordenadas, $P = (x, y, z)$, temos:

$$\begin{aligned}
& P = (x, y, z) \in r \\
\iff \; & (x, y, z) = (a, b, c) + t(a' - a, b' - b, c' - c)\,,\; t \in \mathbb{R} \\
\iff \; & (x, y, z) = (a + t(a' - a), b + t(b' - b), c + t(c' - c))\,,\; t \in \mathbb{R} \\
\iff \; & x = a + t(a' - a)\,,\; y = b + t(b' - b)\,,\; z = c + t(c' - c)\,,\; t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Isto é, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, suas coordenadas x, y e z satisfazem as **equações paramétricas** da reta r que passa por $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$ (figura 1):

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + t\,(a' - a) \\ y = b + t\,(b' - b)\;;\; t \in \mathbb{R} \\ z = c + t\,(c' - c) \end{cases}}$$

Exemplo 1

Determinar as equações paramétricas da reta r que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

Solução.

O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $\overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 0, 1 - 0) = (-1, 1, 1)$.

Logo,

$$r : \begin{cases} x = 1 + t(-1) \\ y = 0 + t(1) \\ z = 0 + t(1) \end{cases} ;\; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ;\; t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas da reta r. □

Definição 1

Dizemos que uma reta r é **paralela** *a um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ quando, para quaisquer dois pontos A e B de r, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.*

Assim, o ponto P pertence à reta r que passa por A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{v}\,; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Em termos de coordenadas, se $A = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, as equações paramétricas de r são:

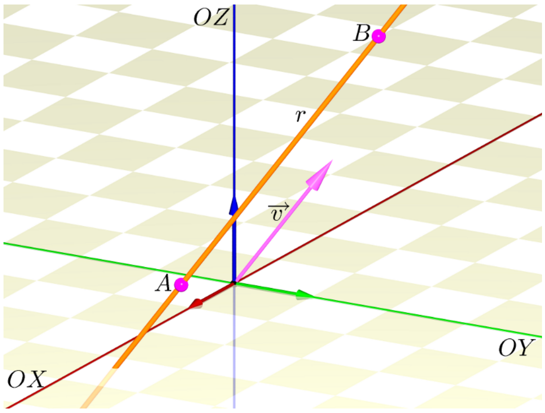

Fig. 2: Vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo à reta r.

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + \alpha\, t \\ y = b + \beta\, t\ ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = c + \gamma\, t \end{cases}}$$

Exemplo 2

Determine se os pontos $P = (1, 1, 1)$ *e* $Q = (0, -1, 0)$ *pertencem à reta* r *que passa pelo ponto* $A = (1, 1, -1)$ *e é paralela ao vetor* $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$.

Solução.
As equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t\ ; t \in \mathbb{R}\,. \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Logo $P \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$(1, 1, 1) = (1 + t, 1 + 2t, -1 - t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz as identidades

$$1 = 1 + t, \quad 1 = 1 + 2t \quad \text{e} \quad 1 = -1 - t,$$

simultaneamente. Das duas primeiras obtemos $t = 0$, mas esse valor é incompatível com a terceira identidade, pois implicaria na identidade $1 = -1$.

Portanto, $P \notin r$.

Analogamente, $Q \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$(0, -1, 0) = (1 + t, 1 + 2t, -1 - t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz, simultaneamente, as identidades

$$0 = 1 + t, \quad -1 = 1 + 2t \quad \text{e} \quad 0 = -1 - t,$$

Da primeira identidade, obtemos $t = -1$, valor que satisfaz as outras duas identidades.

Portanto, $Q \in r$. □

2. Equação simétrica da reta no espaço

Consideremos as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \ ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

Quando as três coordenadas do vetor direção $\overrightarrow{v}$ são diferentes de zero, podemos colocar em evidência o parâmetro t em cada uma das equações:

$$t = \frac{x - a}{\alpha}, \qquad t = \frac{y - b}{\beta} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{z - c}{\gamma}.$$

Portanto, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem:

$$\boxed{r : \frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}}$$

Essa expressão é chamada **equação simétrica** da reta r.

Quando a reta r é dada por dois pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$, paralelo a r, terá suas três coordenadas não-nulas se, e somente se, os pontos A e B não pertencem a um plano paralelo a um dos planos coordenados.

Isto é, $a' \neq a$, $b' \neq b$ e $c' \neq c$.

Nesse caso, podemos expressar a reta r através da equação simétrica:

$$\boxed{r : \frac{x-a}{a'-a} = \frac{y-b}{b'-b} = \frac{z-c}{c'-c}}$$

Atenção!

Se a reta r é paralela a um dos planos coordenados, então ela não pode ser representada por uma equação simétrica.

Exemplo 3

Determinar, caso seja possível, a forma simétrica da equação da reta r que passa pelos pontos dados.

(a) $A = (1,2,3)$ *e* $B = (2,3,4)$.

(b) $A = (1,0,1)$ *e* $B = (1,2,3)$.

Solução.

(a) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ tem todas suas coordenadas diferentes de zero, a reta r se expressa pela equação simétrica:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1},$$

ou seja,

$$r : x-1 = y-2 = z-3.$$

(b) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (0,2,2)$ é paralelo ao plano π_{YZ}, pois tem a sua primeira coordenada igual a zero, a reta r não pode ser representada por uma equação simétrica.

As equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{ou seja,} \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}.$$

Neste exemplo, observe que o vetor $\overrightarrow{v} = (0,1,1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ é também paralelo à reta r. Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

são também, equações paramétricas para a mesma reta r. □

Exemplo 4

Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (1,0,0)$ e $B = (0,0,1)$ e seja S a superfície definida pela equação $S : z = x^2 + y^2$. Determine $S \cap r$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (-1,0,1)$, a equação paramétrica da reta r é:

$$r : P = A + t\,\overrightarrow{AB}\ ;\ t \in \mathbb{R}. \qquad \text{ou seja,} \qquad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Agora, $P \in r \cap S$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem as equações paramétricas de r e a equação de S simultaneamente.

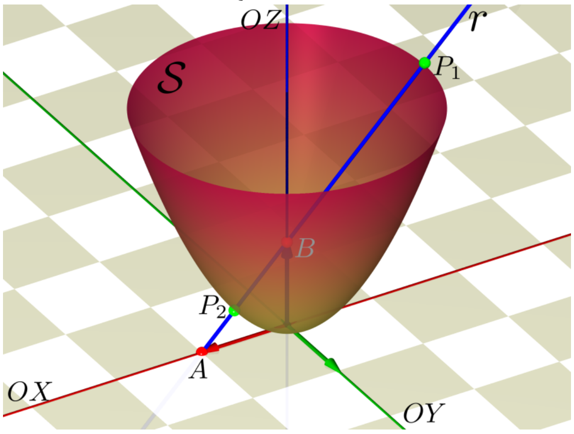

Fig. 3: Interseção $r \cap S = \{P_1, P_2\}$.

Como $P \in r \iff P = (1-t,0,t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, temos que $P = (1-t,0,t) \in S \iff$

$$\begin{aligned} &\iff t = (1-t)^2 \\ &\iff t = 1 - 2t + t^2 \\ &\iff t^2 - 3t + 1 = 0 \\ &\iff t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9-4}\right) = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right), \end{aligned}$$

Temos, portanto, duas soluções:

$$P \in r \cap S \iff \begin{cases} P = \left(1 - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ P = \left(1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} P = \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ P = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Logo a reta r intersecta a superfície S em dois pontos. □

3. Equações paramétricas do plano no espaço

Sejam A, B e C três pontos não-colineares no espaço e seja π o plano que os contém. Então,

$$P \in \pi \iff \text{ existem } s, t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\,,$$

isto é, $P \in \pi$ se, e somente se, satisfaz a seguinte **equação paramétrica** do plano π:

$$\boxed{P = A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\;;\quad s, t \in \mathbb{R}}$$

Observação 1

A equação paramétrica de uma reta é determinada a partir da variação de um parâmetro ($t \in \mathbb{R}$), enquanto a equação paramétrica de um plano é caracterizada pela variação de dois parâmetros ($s, t \in \mathbb{R}$). Por isso dizemos que a reta é **uni-dimensional** *e o plano é* **bi-dimensional***.*

Equação paramétrica do plano em coordenadas

Consideremos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço no qual os pontos A, B e C têm coordenadas: $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$ e $C = (a'', b'', c'')$.

Substituindo, na equação paramétrica do plano π as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$, as coordenadas do ponto A e dos vetores $\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$ e $\overrightarrow{AC} = (a'' - a, b'' - b, c'' - c)$, obtemos que:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + s(a' - a, b' - b, c' - c) + t(a'' - a, b'' - b, c'' - c);\; s, t \in \mathbb{R},$$

ou seja, as **equações paramétricas** do plano π são:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = a + s\,(a' - a) + t\,(a'' - a) \\ y = b + s\,(b' - b) + t\,(b'' - b)\;; \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z = c + s\,(c' - c) + t\,(c'' - c) \end{cases}}$$

Exemplo 5

Determinar equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 0s + (-1)t \\ y = 0 + 1s + 0t \\ z = 0 + 0s + 1t \end{cases} ;\ s,t \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} ;\ s,t \in \mathbb{R}.$$

são as equações paramétricas do plano π. □

Definição 2

Dizemos que o plano π é **paralelo** *ao vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$ quando, para qualquer ponto $P \in \pi$, a reta r que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ está contida no plano π.*

Em particular, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ e $P \in \pi$ então $Q \in \pi$.

Já vimos que a equação paramétrica do plano π que passa pelos pontos não-colineares A, B e C é dada por:

$$\pi : P = A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\,; \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P_o = A + s_o\,\overrightarrow{AB} + t_o\,\overrightarrow{AC}$ um ponto pertencente a π. Como todos os pontos da forma

$$P = P_o + s\overrightarrow{AB} = A + (s + s_o)\overrightarrow{AB} + t_o\overrightarrow{AC}\,,\ s \in \mathbb{R},$$

pertencem ao plano π, a reta que passa por P_o e é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$ está contida em π. Sendo $P_o \in \pi$ arbitrário, obtemos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao plano π.

De forma análoga, verificamos que o vetor $\overrightarrow{AC}$ é paralelo ao plano π.

Além disso, como A, B e C são pontos não colineares, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplo um do outro, isto é, não são colineares.

Com isso, vemos que um plano π é determinado se conhecemos um ponto pertencente a π e duas direções não-colineares e paralelas a π.

Assim, a **equação paramétrica** do plano π que passa pelo ponto A e é paralelo aos vetores não-colineares $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é:

$$\boxed{\pi : P = A + s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\ ; \quad s,t \in \mathbb{R}}$$

Escrevendo em coordenadas, $A = (a,b,c)$, $\overrightarrow{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$, $\overrightarrow{v} = (\alpha',\beta',\gamma')$ e $P = (x,y,z)$, obtemos as seguintes equações paramétricas de π:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = a + \alpha\, s + \alpha'\, t \\ y = b + \beta\, s + \beta'\, t \\ z = c + \gamma\, s + \gamma'\, t \end{cases} ;\ s,t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 6

Determine equações paramétricas do plano π que passa por $A = (1,1,1)$ e $B = (1,0,1)$ e é paralelo à reta r que passa por $D = (2,0,1)$ e $E = (0,0,1)$.

Solução.

Para determinar equações paramétricas do plano π é necessário conhecer um ponto A pertencente a π e:

- dois outros pontos de π não colineares com A, **ou**
- dois vetores não colineares paralelos a π.

Em nosso caso, o vetor $\overrightarrow{DE} = (-2,0,0)$, paralelo à reta r, e portanto a π, não é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB} = (0,-1,0)$ paralelo a π.

Então, π é o plano que passa por $A = (1,1,1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (0,-1,0)$ e $\overrightarrow{DE} = (-2,0,0)$, tendo, portanto, as equações paramétricas:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + (0)s + (-2)t \\ y = 1 + (-1)s + (0)t \\ z = 1 + (0)s + (0)t \end{cases} ;\ s,t \in \mathbb{R}\,, \text{ ou seja, } \pi : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 1s \\ z = 1 \end{cases} ;\ s,t \in \mathbb{R}\,,$$

Em particular, π é um plano paralelo ao plano π_{XY}, pois a terceira coordenada dos seus pontos é constante ($z = 1$). $\square$

Exemplo 7

Determinar, caso exista, o ponto onde o plano π, que passa pelos pontos $A = (1,2,3)$, $B = (2,3,1)$ e $C = (3,2,1)$, intersecta o eixo$-OX$.

Solução.
Determinemos, primeiro, as equações paramétricas do plano π.

Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ não são colineares e são paralelos a π. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 2s - 2t \end{cases} ;\ s,t \in \mathbb{R}.$$

O ponto da intersecção de π com o eixo$-OX$ deve ser um ponto com a segunda e terceira coordenadas iguais a zero. Isto é,

$$P = (x,y,z) \in \pi \cap \text{eixo} - OX \iff \begin{cases} y = 2 + s = 0 \\ z = 3 - 2s - 2t = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema, vemos que $s = -2$ e, substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $t = \dfrac{3-2(-2)}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Portanto, $P_0 = \left(1 + (-2) + 2 \times \frac{7}{2}, 0, 0\right) = (6,0,0)$ é o ponto da intersecção $\pi \cap \text{eixo} - OX$ é $\square$

4. Produto interno de dois vetores no espaço

As noções de norma e produto interno de vetores no espaço são completamente análogas às correspondentes noções já estudadas para vetores no plano. No entanto, por motivos de completititude, vamos rever esses conceitos considerando vetores no espaço, omitindo, porém, a maioria dos detalhes.

Definição 3

A **norma** *ou* **comprimento** *de um vetor* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *no espaço é o número real não-negativo*

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(A,B)}$$

Como foi visto no plano, esse número não depende do segmento AB escolhido para representar o vetor $\overrightarrow{v}$.

Em particular, tomando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e representando o vetor $\overrightarrow{v}$ pelo segmento OP, as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto P em relação ao sistema $OXYZ$, e, portanto,

$$\text{se}\quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \text{então} \quad \boxed{\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

Definição 4

- *Um vetor $\overrightarrow{v}$ de norma igual a* 1 *é chamado* **unitário**.
- *O* **ângulo** $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *entre os vetores* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *não-nulos é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC. Então* $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in [0, \pi]$

Quando os vetores são colineares, isto é, A, B e C são colineares, $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0^o$ *se B e C estão do mesmo lado em relação a A na reta que os contêm, e* $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 180^o$ *se B e C estão em lados opostos em relação a A na reta que os contêm.*

Lembramos, agora, a definição do produto interno entre dois vetores:

Definição 5

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores no espaço. O **produto interno** *entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o número real $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ definido da seguinte maneira:*

$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \textit{se} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \ \textit{ou} \ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta, & \textit{se} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \ \textit{e} \ \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \end{cases}}$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Dessa definição, é claro que para qualquer vetor $\overrightarrow{u}$ no espaço,

$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2}$$

Esse número sempre é não-negativo e é igual a zero se, e só se, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Por um cálculo análogo ao efetuado para o produto interno no plano, aplicando a lei dos cossenos, obtemos a seguinte proposição que caracteriza o produto interno em termos das coordenadas dos vetores.

Proposição 1

Sejam $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ vetores no espaço expressos em termos de suas coordenadas com respeito a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então,

$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}$$

Usando essa caracterização do produto interno obtemos as seguintes propriedades:

Proposição 2

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(1) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$

(2) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(3) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(4) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$

(5) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$

A noção de perpendicularidade entre dois vetores no espaço é a mesma que no plano.

Definição 6

Um vetor $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** *a outro $\overrightarrow{v}$, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, quando o ângulo entre eles é reto ou quando um dos vetores é igual a zero.*

Da definição do produto interno obtemos a seguinte caracterização da perpendicularidade:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0}$$

5. Equação cartesiana do plano no espaço

Agora vamos aplicar a noção de produto interno para determinar a equação cartesiana de um plano no espaço.

Definição 7

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ *é* **perpendicular** *ou* **normal** *a um plano* π*, e escrevemos* $\overrightarrow{u} \perp \pi$*, quando é perpendicular a qualquer vetor paralelo ao plano* π*.*

Ou seja, $\overrightarrow{u} \perp \pi$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$ *para quaisquer* $A, B \in \pi$*.*

Se π é o plano no espaço que passa pelo ponto A e é normal ao vetor $\overrightarrow{u}$, então:

$$\boxed{P \in \pi \iff \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \iff \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0}$$

Escrevendo a última equação em termos das coordenadas dos elementos envolvidos:

$$A = (x_0, y_0, z_0)\,, \quad \overrightarrow{v} = (a, b, c) \quad \text{e} \quad P = (x, y, z)\,,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \pi \quad &\iff \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\ &\iff \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0 \\ &\iff a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a **equação cartesiana** de π:

$$\boxed{\pi : ax + by + cz = d}$$

onde $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \perp \pi$ e o número d é calculado sabendo que π passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{d = ax_0 + by_0 + cz_0}$$

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (1,1,2)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1,2,-3)$.

Solução.

Como $\pi \perp \overrightarrow{u} = (1,2,-3)$, temos

$\pi : 1\,x + 2\,y + (-3)\,z = d\,,$ onde $d = 1\,(1) + 2\,(1) + (-3)\,(2) = -3\,.$

Portanto,

$$\pi : x + 2y - 3z = -3$$

é a equação cartesiana do plano π. $\square$

Exemplo 9

Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1,-1,3)$, $B = (4,0,1)$ e $C = (2,1,3)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (3,1,-2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,2,0)$ são vetores paralelos ao plano π e não são múltiplo um do outro, pois $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, obtemos

$$\pi : P = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\;; \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

Isto é,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 3s + t \\ y = -1 + s + 2t\;; \quad s,t \in \mathbb{R}\,, \\ z = 3 - 2s \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano π.

Para determinar a equação cartesiana de π, devemos achar um vetor $\overrightarrow{u}$ perpendicular a π.

Como todo vetor paralelo a π é da forma $\overrightarrow{AP}$, com $P \in \pi$, e $\overrightarrow{AP}$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, temos que $\overrightarrow{u} \perp \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AC}$.

Então as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ normal ao plano π devem ser determinadas de modo que

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0 \,.$$

Isto é,

$$\begin{cases} \langle (a, b, c), (3, 1, -2) \rangle = 3a + b - 2c = 0 \\ \langle (a, b, c), (1, 2, 0) \rangle = a + 2b = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $a = -2b$ e, substituindo na primeira equação, temos que:

$$3(-2b) + b - 2c = 0 \iff c = -\frac{5}{2} b \,.$$

Assim, podemos determinar as coordenadas a e c de $\overrightarrow{u}$ fixando um valor arbitrário para a coordenada b.

Como queremos um vetor normal não nulo, b não pode ser igual a zero. Fixando, por exemplo, $b = -2$, obtemos:

$$a = -2(-2) = 4 \,, \quad c = -\frac{5}{2}(-2) = 5 \quad \text{e, portanto,} \quad \overrightarrow{u} = (4, -2, 5).$$

Sendo $\overrightarrow{u} = (4, -2, 5)$ um vetor normal a π, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$4x - 2y + 5z = d \,,$$

onde d é calculado sabendo que $A = (1, -1, 3) \in \pi$:

$$d = 4(1) - 2(-1) + 5(3) = 21 \,.$$

Portanto,

$$4x - 2y + 5z = 21 \,,$$

é a equação cartesiana do plano π. □

Exemplo 10

Determine equações paramétricas para o plano $\pi : x + 3y - z = 2$.

Solução.

Para determinar as equações paramétricas do plano π devemos encontrar um ponto de π e dois vetores paralelos a π que não sejam colineares.

Tomando $y = z = 0$ na equação cartesiana de π, obtemos $x = 2$. Portanto, o ponto $A = (2, 0, 0)$ pertence ao plano π.

Tomando, agora, $x = y = 0$ na equação de π, obtemos $z = -2$. Logo, $B = (0, 0, -2) \in \pi$.

Finalmente, tomando $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $z = 1$. Portanto, $C = (0, 1, 1) \in \pi$.

Devemos verificar que A, B e C são não-colineares.

Para isso, formamos os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$.

Como $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, concluímos que A, B e C não são colineares.

Logo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores não-colineares paralelos a π.

Assim, como o plano π passa por $A = (2, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$,

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - 2s - 2t \\ y = t \\ z = -2s + t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do plano π. □

Exemplo 11

Determinar a equação cartesiana do plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Solução.

Das equações paramétricas de π, obtemos um ponto $A = (-1, 1, 3)$ pertencente ao plano π e os vetores $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 1, 2)$ não-colineares e paralelos ao plano π.

Para determinar a equação cartesiana de π, como já sabemos que $A \in \pi$, basta achar um vetor $\overrightarrow{u}$ perpendicular a π.

Temos que $\overrightarrow{u} \perp \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$.

Tomando $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ temos:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle (a,b,c), (1,-1,0) \rangle = 0 \\ \langle (a,b,c), (2,1,2) \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + b + 2c = 0\,. \end{cases}$$

Da primeira dessas equações, obtemos $a = b$. Substituindo na segunda, obtemos $3a + 2c = 0$, ou seja, $c = -\dfrac{3}{2}\,a$.

Finalmente, fixando o valor $a = 2$, obtemos $\overrightarrow{u} = (2, 2, -3) \perp \pi$.

Assim, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$\pi : 2x + 2y - 3z = d\,,$$

onde o valor d é calculado sabendo que $A = (-1, 1, 3) \in \pi$:

$$d = 2(-1) + 2(1) - 3(3) = -9\,.$$

Portanto,

$$\pi : 2x + 2y - 3z = -9\,,$$

é a equação cartesiana do plano π. □