Capítulo 12

1. Ângulo entre duas retas no espaço

Definição 1

O **ângulo** $\angle(r_1, r_2)$ **entre duas retas** r_1 **e** r_2 *é assim definido:*

- $\angle(r_1, r_2) = 0^o$ *se* r_1 *e* r_2 *são coincidentes,*

- *se as retas são concorrentes, isto é,* $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, *então* $\angle(r_1, r_2)$ *é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas no plano que as contém.*
Em particular, $0^o < \angle(r_1, r_2) \leq 90^o$.

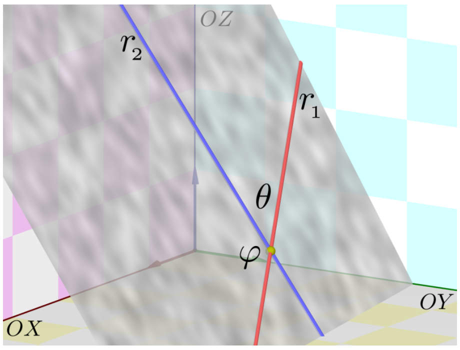

Fig. 1: Retas concorrentes: $\theta = \angle(r_1, r_2) < \varphi$.

- *se* $r_1 \cap r_2 = \varnothing$, *temos duas situações a considerar:*

  ◦ *se* $r_1 \parallel r_2$, *então* $\angle(r_1, r_2) = 0^o$.

  ◦ *se* r_1 *e* r_2 *não são paralelas e não se intersectam, dizemos que as retas são* **reversas**. *Neste caso, seja* $P \in r_1$ *e seja* r_2' *a paralela a* r_2 *que passa por* P. *Então as retas* r_1 *e* r_2' *são concorrentes e definimos*

$$\boxed{\angle(r_1, r_2) = \angle(r_1, r_2')}$$

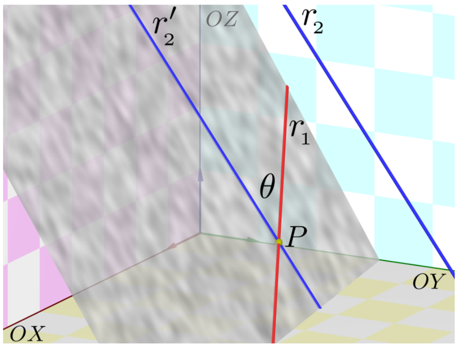

Fig. 2: Retas reversas: $\theta = \angle(r_1, r_2)$.

Além disso, pelo paralelismo, $\angle(r_1, r_2)$ independe do ponto P escolhido.

A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores paralelos às retas concorrentes (ou reversas) r_1 e r_2, respectivamente. Então,

$$\boxed{\cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|},\ 0^o < \angle(r_1, r_2) \leq 90^o}$$

Pois $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \angle(r_1, r_2)$ ou $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 180^o - \angle(r_1, r_2)$.

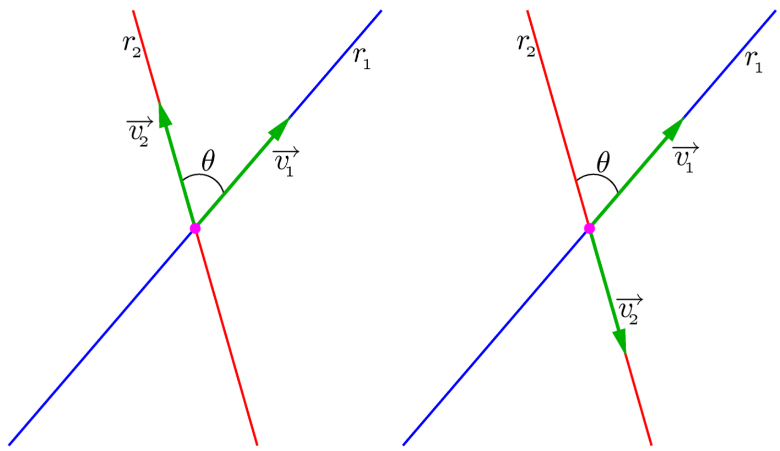

Fig. 3: $\angle(r_1, r_2) = \theta$.

A fórmula vale também quando r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes, isto é, quando $\angle(r_1, r_2) = 0^o$, pois

$$\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2} \Longrightarrow \frac{\left|\langle \lambda\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle\right|}{\|\lambda\overrightarrow{v_2}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|\lambda|\,\left|\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle\right|}{|\lambda|\,\|\overrightarrow{v_2}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = 1 = \cos 0^o = \cos\angle(r_1, r_2)\,.$$

Exemplo 1

Calcule o ângulo entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2} \qquad \text{e} \qquad r_2 : x+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}\,.$$

Mostre, também, que essas retas são reversas.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{v_1} = (2, 2, 2) \parallel r_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, 3) \parallel r_2$. Logo,

$$\begin{aligned}\cos\angle(r_1, r_2) &= \frac{\left|\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|2+4+6|}{\sqrt{12}\sqrt{14}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{12\times 14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}\,.\end{aligned}$$

Assim, o ângulo entre r_1 e r_2 é o ângulo entre 0^o e 90^o cujo cosseno é igual a $\sqrt{\frac{6}{7}}$.

Para verificar que as retas r_1 e r_2 são reversas, observamos primeiro que os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não são múltiplos, pois

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Portanto, as retas não são coincidentes e nem paralelas, podendo ser concorrentes ou reversas.

Para concluir que r_1 e r_2 são reversas, devemos mostrar que elas não se intersectam. As equações paramétricas de r_1 são:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \ ; \quad t \in \mathbb{R}\,. \\ z = 2t \end{cases}$$

Seja $P = (1+2t, -1+2t, 2t)$ um ponto de r_1. Vamos tentar determinar o valor do parâmetro t de modo que P esteja também em r_2:

$$\begin{aligned} P \in r_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2t) + 2 = \frac{(-1+2t)-1}{2} = \frac{2t-2}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 + 2t = \frac{-2+2t}{2} = \frac{2t-2}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 + 2t = -1 + t = \frac{2}{3}(t-1) \end{aligned}$$

Da segunda igualdade, obtemos $t - 1 = 0$, ou seja, $t = 1$. Porém, substituindo esse valor na primeira igualdade, obtemos a identidade impossível $5 = 0$.

Portanto, não existe $P \in r_1 \cap r_2$. Isto é, as retas não são concorrentes e sim reversas. □

2. Ângulo entre dois planos

Definição 2

Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ *e* $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ *dois planos no espaço.*

O ***ângulo entre os planos*** π_1 ***e*** π_2*, representado por* $\angle(\pi_1, \pi_2)$*, se define da seguinte maneira:*

- $\angle(\pi_1, \pi_2) = 0^o$ *se os planos são paralelos* ($\pi_1 \parallel \pi_2$) *ou coincidentes* ($\pi_1 = \pi_2$).
- *se* π_1 *e* π_2 *não são paralelos nem coincidentes, então se intersectam ao longo de uma reta* r.

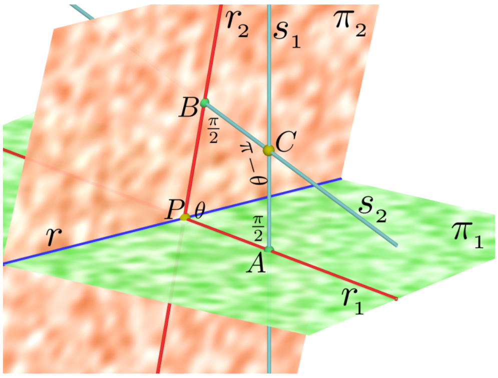

Fig. 4: $\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$.

Sejam $P \in r$ *um ponto qualquer,* r_1 *a reta perpendicular a* r *contida em* π_1 *que passa por* P *e* r_2 *a perpendicular a* r *contida em* π_2 *que passa por* P*. Definimos*

$$\boxed{\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(r_1, r_2)}$$

Tomando $A \in r_1 - \{P\}$ e $B \in r_2 - \{P\}$, vemos que $\angle(\pi_1, \pi_2)$ é o menor ângulo positivo cujo cosseno é

$$\boxed{\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})| = \frac{|\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle|}{\|\overrightarrow{PA}\| \, \|\overrightarrow{PB}\|}}$$

Sejam agora a reta s_1 perpendicular ao plano π_1 que passa pelo ponto A, e a reta s_2 perpendicular ao plano π_2 que passa por B.

As retas s_1 e s_2 se intersectam em um ponto C.

Como os ângulos $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ e $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ são suplementares (a soma é 180^o), temos

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \left|\cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})\right| = \left|\cos\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right| .$$

Além disso, como $\pi_1 \perp \overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\pi_2 \perp \overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, os ângulos $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ e $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ são iguais ou suplementares. Logo,

$$\boxed{\cos\angle(\pi_1,\pi_2) = \left|\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\right| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|}}$$

A fórmula vale também quando os planos são paralelos ou coincidentes.

Exemplo 2

Calcule o ângulo entre os planos $\pi_1 : -y+1=0$ *e* $\pi_2 : y+z+2=0$.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{v_1} = (0,-1,0) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1) \perp \pi_2$. Logo $\angle(\pi_1,\pi_2)$ é o menor ângulo positivo cujo cosseno é

$$\begin{aligned}\cos\angle(\pi_1,\pi_2) &= \left|\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\right| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|}\\ &= \frac{|\langle(0,-1,0),(0,1,1)\rangle|}{\|(0,-1,0)\|\,\|(0,1,1)\|} = \frac{|-1|}{(1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

Portanto, $\angle(\pi_1,\pi_2) = 45^o = \dfrac{\pi}{4}$. □

3. Ângulo entre uma reta r e um plano π

Definição 3

Sejam r uma reta e π um plano no espaço.

Sejam $\overrightarrow{w}$ um vetor normal ao plano π e $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo à reta r.

Seja θ o menor ângulo não-negativo entre r e $\overrightarrow{w}$ $(0 \le \theta \le 90^o)$.

O **ângulo entre r e π** *é, por definição, o complementar do ângulo θ.*

Isto é,

$$\boxed{\angle(r,\pi) = 90^o - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta}$$

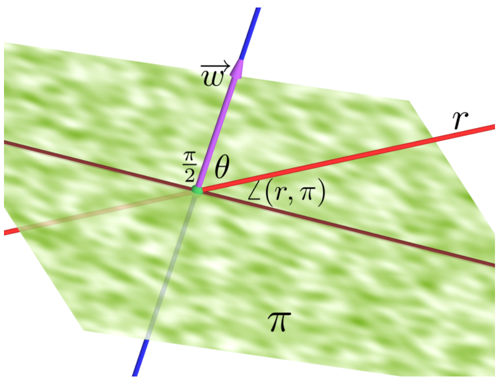

Fig. 5: $\angle(r,\pi) = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen} \angle(r,\pi) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{\left|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|}}$$

Essa fórmula vale ainda quando $r \parallel \pi$ e quando $r \subset \pi$, pois $\theta = 90^o$ nesses casos, já que $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.

Exemplo 3

Calcular o seno do ângulo entre a reta r e o plano π, onde

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 4 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad e \qquad \pi : x - 2y + 3 = 0 .$$

Solução.

Temos que $\overrightarrow{v} = (1,2,0) \parallel r$ e $\overrightarrow{w} = (1,-2,0) \perp \pi$. Logo,

$$\operatorname{sen} \angle(r,\pi) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|\langle (1,2,0),(1,-2,0)\rangle|}{\|(1,2,0)\|\,\|(1,-2,0)\|} = \frac{|1-4+0|}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{3}{5} . \quad \square$$

4. Distância de um ponto P_0 a um plano π

Definição 4

A **distância do ponto P_0 ao plano π**, *designada $d(P_0,\pi)$, é, por definição, a menor das distâncias de P_0 aos pontos $P \in \pi$. Isto é,*

$$\boxed{d(P_0,\pi) = \min\{\, d(P_0,P) \mid P \in \pi \,\}}$$

Com a notação da definição anterior, seja $P^\star$ o ponto de intersecção de π com a reta r que passa por P_0 e é perpendicular a π.

Se P é um ponto qualquer no plano π, diferente de $P^\star$, obtemos, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo $\triangle P_0P^\star P$, que:

$$d(P_0,P)^2 = d(P_0,P^\star)^2 + d(P^\star,P)^2 > d(P_0,P^\star)^2.$$

Logo $d(P_0,P) > d(P_0,P^\star)$ e, portanto, $d(P_0,P^\star) = \min\{d(P_0,P) | P \in \pi\}$.

Isto é,

$$\boxed{d(P_0, \pi) = d(P_0, P^\star)}$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz = d$, temos que $r \parallel \overrightarrow{w} = (a, b, c) \perp \pi$ e, portanto, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

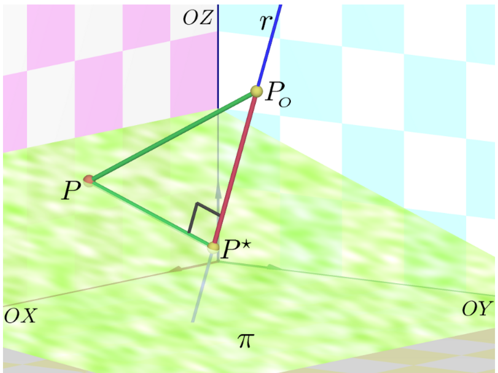

Fig. 6: Cálculo de $d(P_0, \pi)$.

Como $P^\star \in r$, $P^\star = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, para algum valor $t \in \mathbb{R}$ por determinar.

Além disso, $P^\star \in \pi$. Logo,

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) = d,$$

ou seja,

$$(a^2 + b^2 + c^2)t = d - ax_0 - by_0 - cz_0 \iff t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P_0, P^\star) &= \|\overrightarrow{P_0P^\star}\| = \|(at, bt, ct)\| = \|t(a, b, c)\| = |t|\,\|(a, b, c)\| \\ &= \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \|(a, b, c)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|^2} \|(a, b, c)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|} \end{aligned}$$

Logo a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano $\pi : ax + by + cz = d$ é:

$$\boxed{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo 4

Calcular a distância do ponto $A = (1, 2, 3)$ *ao plano* $\pi : 2x + y - 5z = 4$.

Solução.

(a) Usando a fórmula:

$$d(A,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(1)+1(2)-5(3)-4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{15}{2}}\,.$$

(b) Sem usar a fórmula:

A reta r que passa por $A=(1,2,3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{w}=(2,1,-5)\perp\pi$, é dada por:

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3-5t \end{cases} ; \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Seja $\{B\} = r\cap\pi$. As coordenadas de $B=(1+2t, 2+t, 3-5t)$ satisfazem a equação de π:

$$2(1+2t) + (2+t) - 5(3-5t) = 4\,,$$

ou seja,

$$2+4t+2+t-15+25t = 4 \Longrightarrow 30t = 15 \Longrightarrow t = \frac{1}{2}\,.$$

Logo $B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$, isto é, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(2,1,-5)$ e, portanto,

$$d(A,\pi) = d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+1+25} = \frac{\sqrt{30}}{2} = \sqrt{\frac{15}{2}}\,.$$

é a distância procurada.□

5. Distância entre dois planos

Definição 5

A **distância entre os planos** π_1 **e** π_2*, designada* $d(\pi_1,\pi_2)$*, é, por definição, a menor dentre as distâncias dos pontos de* π_1 *aos pontos de* π_2*. Isto é,*

$$\boxed{d(\pi_1,\pi_2) = \min\{\, d(P,Q) \mid P\in\pi_1 \text{ e } Q\in\pi_2 \,\}}$$

Note que,

- se π_1 e π_2 são coincidentes, isto é, $\pi_1 = \pi_2$, então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.
- se π_1 e π_2 são concorrentes, $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta, e $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.

O caso interessante a considerar é o seguinte:

- suponhamos que π_1 e π_2 são planos paralelos dados pelas equações:

$$\pi_1 : \ ax + by + cz = d_1$$
$$\pi_2 : \ ax + by + cz = d_2$$

Sejam $P_1 \in \pi_1$ e Q_1 o pé da perpendicular baixada do ponto P_1 sobre o plano π_2.

Sejam $P \in \pi_1$, $Q \in \pi_2$ e P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π_2.

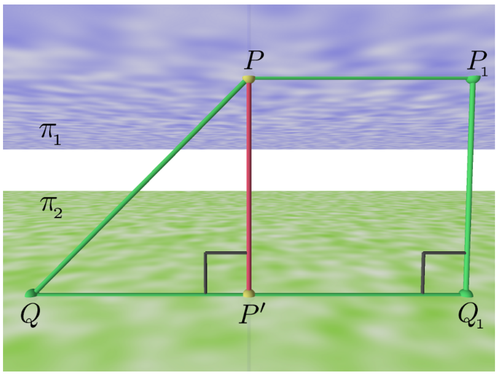

Fig. 7: Cálculo de $d(\pi_1, \pi_2)$.

Então,

$$d(P, Q) \geq d(P, P') = d(P_1, Q_1)\,,$$

pois $P_1Q_1P'P$ é um retângulo. Assim,

$$\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, Q_1) = d(P_1, \pi_2)\,, \quad \text{qualquer que seja } P_1 \in \pi_1}$$

Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \pi_1$, isto é, $ax_1 + by_1 + cz_1 = d_1$, então:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Isto é, a distância entre $\pi_1 : ax + by + cz = d_1$ e $\pi_2 : ax + by + cz = d_2$ é dada por:

$$\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo 5

Calcule a distância entre $\pi_1 : x + 2y + z = 2$ *e* $\pi_2 : 2x + 4y + 2z = 6$.

Solução.

Como $\pi_2 : x + 2y + z = 3$, $\pi_1 \parallel \pi_2$; logo,

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \ \square$$

6. Distância entre uma reta e um plano

Definição 6

A **distância entre uma reta** r **e um plano** π *é o número* $d(r,\pi)$ *dado por:*

$$\boxed{d(r,\pi) = \min\{\, d(P,Q) \mid P \in r \quad e \quad Q \in \pi \,\}}$$

Note que, se $r \cap \pi \neq \varnothing$ ($r \subset \pi$ ou $r \cap \pi = \{P\}$) então $d(r,\pi) = 0$.

O caso interessante ocorre quando $r \cap \pi = \varnothing$, isto é, $r \parallel \pi$.

Sejam $P_1 \in r$ e Q_1 o pé da perpendicular baixada do ponto P_1 sobre o plano π.

Sejam $P \in r$ e $Q \in \pi$ pontos arbitrários e P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π. Então,

$$d(P,Q) \geq d(P,P') = d(P_1,Q_1)\,,$$

pois $P_1Q_1P'P$ é um retângulo. Logo,

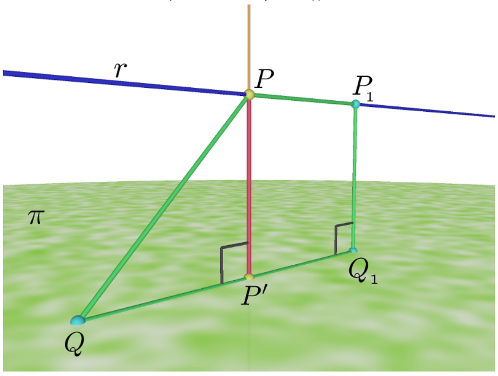

Fig. 8: Cálculo de $d(r,\pi_2)$.

$$\boxed{d(r,\pi) = d(P_1,Q_1) = d(P_1,\pi)\,, \quad \text{qualquer que seja } P_1 \in r}$$

Exemplo 6

Mostre que a reta r *é paralela ao plano* π*, onde*

$$r : \frac{x+2}{6} = \frac{3y+1}{-6} = \frac{1-z}{3} \quad e \quad \pi : 2x - 3y + 6z = -3\,.$$

Calcule também $d(r,\pi)$*.*

Solução.

A equação simétrica de r pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$r : \frac{x+2}{6} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-2} = \frac{z-1}{-3}\,.$$

Logo a reta r passa pelo ponto $A = (-2, -\frac{1}{3}, 1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (6,-2,-3)$, e o plano π é perpendicular vetor $\overrightarrow{w} = (2,-3,6)$.

Temos $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$, pois:

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle &= \langle (6,-2,-3),(2,-3,6)\rangle \\ &= (6)(2)+(-2)(-3)+(-3)(6) = 12+6-18 = 0.\end{aligned}$$

Logo a reta r é paralela ao plano π ou está contida no plano π.

Para mostrar que $r \not\subset \pi$, basta verificar que um ponto de r não pertence a π.

De fato, $A = (-2, -\frac{1}{3}, 1) \notin \pi$, pois

$$2(-2) - 3(-\tfrac{1}{3}) + 6(1) = -4 + 1 + 6 = 3 \neq -3.$$

Portanto, $r \cap \pi = \emptyset$, isto é, $r \parallel \pi$. Além disso,

$$d(r,\pi) = d(A,\pi) = \frac{\left|\, 2(-2) - 3(-\frac{1}{3}) + 6(1) + 3 \,\right|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{6}{7}. \quad \square$$

7. Distância de um ponto a uma reta

Definição 7

Sejam P um ponto e r uma reta no espaço. A **distância do ponto P à reta r**, *designada $d(P,r)$, é o número*

$$\boxed{d(P,r) = \min\{\, d(P,Q) \mid Q \in r \,\}}$$

Seja P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta r.

Para todo ponto $Q \in r$, $Q \neq P'$, temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= d(P,P')^2 + d(P',Q)^2 \\ &> d(P,P')^2 , \end{aligned}$$

Logo $d(P,Q) > d(P,P')$ e, portanto,

$$\boxed{d(P,r) = d(P,P')}$$

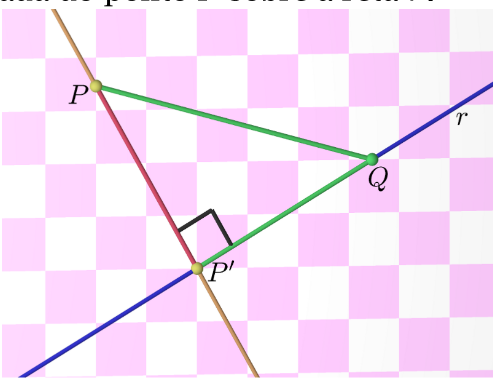

Fig. 9: Cálculo de $d(P,r)$.

Assim, para calcular a distância de P à reta r, devemos:

- determinar o ponto P', pé da perpendicular baixada de P sobre r;
- calcular $d(P,P') = \|\overrightarrow{PP'}\|$.

Determinando o ponto P'

Suponhamos que r é dada por

$$r = \left\{ P_1 + t\overrightarrow{v} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $P' \in r$, $P' = P_1 + t^\star\overrightarrow{v}$ para algum $t^\star \in \mathbb{R}$.

Determinar P' equivale, então, a determinar $t^\star$.

Sendo o vetor $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_1} + t^\star\overrightarrow{v}$ perpendicular a $\overrightarrow{v}$, temos:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{v} \rangle &= \langle \overrightarrow{PP_1} + t^\star\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle t^\star\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle + t^\star\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle + t^\star\|\overrightarrow{v}\|^2 . \end{aligned}$$

Logo $t^\star = -\dfrac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$ e o ponto P' é:

$$P' = P_1 + t^\star\overrightarrow{v} = P_1 - \frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v}$$

Cálculo de $d(P,r)$

Conhecendo o ponto P', pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r, formamos o vetor $\overrightarrow{PP'}$, cuja norma é a distância $d(P,r)$.

Temos

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_1} + t^\star\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PP_1} - \frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v} .$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(P,r)^2 &= \|\overrightarrow{PP'}\|^2 = \langle \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{PP_1} + t^\star\overrightarrow{v}, \overrightarrow{PP_1} + t^\star\overrightarrow{v} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_1} \rangle + 2t^\star\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle + (t^\star)^2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{PP_1}\|^2 + 2t^\star\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle + (t^\star)^2\|\overrightarrow{v}\|^2 . \end{aligned}$$

Substituindo $\quad t^\star = -\dfrac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\quad$ nessa expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
d(P,r)^2 &= \|\overrightarrow{PP_1}\|^2 - 2\frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle + \left(-\frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\right)^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{PP_1}\|^2 - 2\frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2} + \frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2} \\
&= \|\overrightarrow{PP_1}\|^2 - \frac{\langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{PP_1}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2}
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{PP_1}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{v} \rangle^2}}{\|\overrightarrow{v}\|}}$$

Exemplo 7

Calcule a distância entre o ponto $P = (2,5,-1)$ e a reta r que passa por $P_0 = (1,-1,2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$.

Solução.

Seja Q o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta r e seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P_0 + t_0\overrightarrow{v}$.

Então $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r se, e somente se,

$$0 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0} + t_0\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{v} \rangle + t_0\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle .$$

Como $\overrightarrow{PP_0} = (-1,-6,3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{v} \rangle + t_0\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle (-1,-6,3), (1,0,1) \rangle + t_0\langle (1,0,1), (1,0,1) \rangle \\
&= (-1+3) + t_0(1+1) = 2 + 2t_0 .
\end{aligned}$$

Logo $t_0 = -1$ e, portanto,

$$Q = P_0 + t_0\overrightarrow{v} = (1,-1,2) - (1,0,1) = (0,-1,1) .$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P,r) &= d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= \sqrt{(2-0)^2 + (5-(-1))^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\,. \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo 8

Determine o conjunto S dos pontos do espaço que estão a distância 2 da reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,2,1)$ que passa pela origem.

Solução.

Temos que $Q \in S$ se, e somente se, existe $P \in r$ tal que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $\|\overrightarrow{PQ}\| = 2$.

Sejam $P = (t, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, um ponto de r e $Q = (x, y, z)$.

Então,

$$\overrightarrow{PQ} \perp r \iff \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle (x-t, y-2t, z-t), (1,2,1) \rangle \\ &= x - t + 2y - 4t + z - t = x + 2y + z - 6t\,. \end{aligned}$$

Isto é,

$$t = \frac{x+2y+z}{6}\,.$$

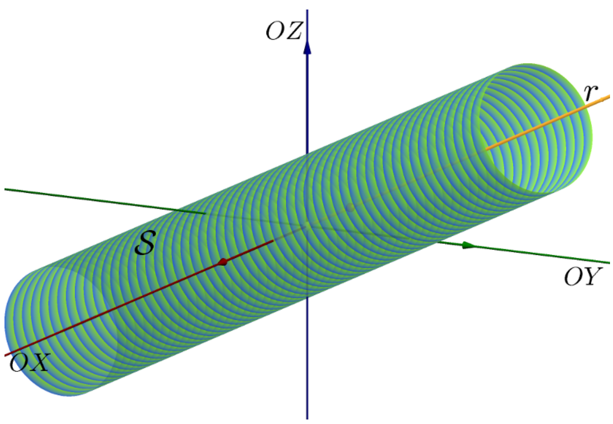

Fig. 10: Exemplo 8.

Suponhamos agora que $\|\overrightarrow{PQ}\| = 2$. Como

$$P = \left(\frac{x+2y+z}{6}, 2\,\frac{x+2y+z}{6}, \frac{x+2y+z}{6}\right),$$

temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \left(x - \frac{x+2y+z}{6}, y - 2\,\frac{x+2y+z}{6}, z - \frac{x+2y+z}{6}\right)\\ &= \left(\frac{5x-2y-z}{6}, \frac{-2x+2y-2z}{6}, \frac{-x-2y+5z}{6}\right).\end{aligned}$$

Logo $d(Q,r) = d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = 2$ se, e somente se, $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = 4$, isto é, se, e somente se,

$$4 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \frac{(5x-2y-z)^2}{36} + \frac{(-2x+2y-2z)^2}{36} + \frac{(-x-2y+5z)^2}{36},$$

se, e somente se,

$$(5x-2y-z)^2 + (-2x+2y-2z)^2 + (-x-2y+5z)^2 = 4(36).$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos a equação de S:

$$S : 30x^2 + 12y^2 + 30z^2 - 24xy - 12xz - 24yz - 144 = 0.$$

O conjunto S é o cilindro circular reto de raio 2 cujo eixo é a reta r. $\square$

Exemplo 9

Determine o conjunto dos pontos do plano $\pi : x + y + 2z = 1$ que estão a distância três da reta r que passa pelos pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (2,-1,1)$.

Solução.

A reta r é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)$ e o plano π é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{w} = (1,1,2)$.

Como $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle (1,-1,0), (1,1,2) \rangle = 1 - 1 = 0$, e $A \notin \pi$ (note que as coordenadas de $A = (1,0,1)$ não satisfazem a equação de π) obtemos que $r \parallel \pi$.

Sejam $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1+t, -t, 1) \in r$ e $Q = (x,y,z) \in \pi$ tais que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $d(Q,r) = d(Q,P) = 3$. Então,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle (x-1-t, y+t, z-1), (1,-1,0) \rangle \\ &= x-1-t-y-t = x-y-2t-1 = 0\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$x - y = 2t + 1\,.$$

Como $Q \in \pi$, as suas coordenadas x, y e z satisfazem o sistema formado pela equação acima e pela equação de π:

$$\begin{cases} x - y = 2t + 1 \\ x + y = -2z + 1\,. \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos $2x = 2 + 2t - 2z \iff x = 1 + t - z$ e, subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $2y = -2z - 2t \iff y = -t - z$.

Então as coordenadas de um ponto $Q = (x, y, z)$ do plano π que se projeta perpendicularmente sobre o ponto $P = (1+t, -t, 1) \in r$, satisfazem

$$\begin{cases} x = 1 + t - z \\ y = -t - z\,. \end{cases}$$

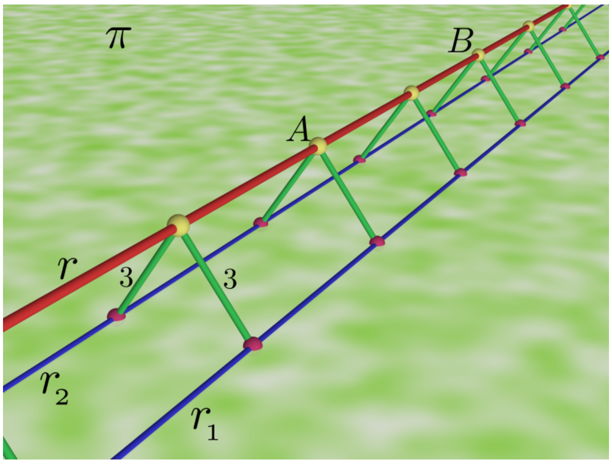

Fig. 11: Exemplo 9.

Além disso, devemos ter $d(P, Q) = 3$, ou seja,

$$\begin{aligned} 9 &= d(P,Q)^2 = (x-(1+t))^2 + (y-(-t))^2 + (z-1)^2 \\ &= (-z)^2 + (-z)^2 + (z-1)^2 = 3z^2 - 2z + 1\,. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação $3z^2 - 2z + 1 = 9$, obtemos as raízes $z = 2$ e $z = -\dfrac{4}{3}$

Substituindo essas raízes no sistema anterior, obtemos as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} + t \\ y = \dfrac{4}{3} - t \\ z = -\dfrac{4}{3} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

paralelas à reta r e contidas no plano π, cujos pontos estão a distância três de r. $\square$