Capítulo 13

Sejam $r_1 = \{P_1 + t\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{P_2 + t\overrightarrow{v_2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ duas retas no espaço. Se $r_1 \neq r_2$, sabemos que r_1 e r_2 são concorrentes (isto é $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$) ou não se intersectam. Quando a segunda possibilidade ocorre, temos ainda duas situações a considerar: as retas podem ser **paralelas** ou **reversas**.

Definição 1

A **distância entre** r_1 **e** r_2 *é o número* $d(r_1, r_2)$ *dado por:*

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \min\{\, d(P, Q) \mid P \in r_1 \ \text{e} \ Q \in r_2 \,\}}$$

Se as retas se intersectam, por definição $d(r_1, r_2) = 0$. Assim, os casos importantes a considerar ocorrem quando $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

1. Distância entre duas retas paralelas no espaço

Suponhamos que $r_1 \parallel r_2$. Então $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são colineares, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ e existe um plano π que contém ambas as retas. Seja $P_1 \in r_1$ e seja $R_1 \in r_2$ o pé da perpendicular baixada de P_1 sobre a reta r_2. Então,

$$d(P, Q) \geq d(P, R) = d(P_1, R_1)\,.$$

quaisquer que sejam o s pontos $P \in r_1$ e $Q \in r_2$, onde R é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r_2, pois P_1R_1RP é um retângulo contido no plano π.

Logo, qualquer que seja o ponto $P_1 \in r_1$, temos que (Fig. 1):

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, R_1) = d(P_1, r_2).$$

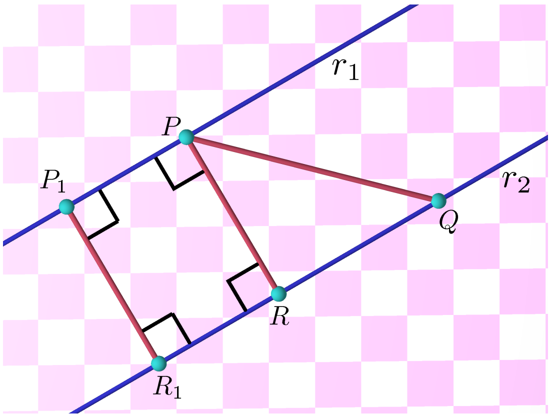

Fig. 1: $d(P,Q) \geq d(P_1,P_2)$, para todos $P \in r_1$ e $Q \in r_2$.

Exemplo 1

Mostre que a reta r_1 que passa pelos pontos $A_1 = (1,2,1)$ e $B_1 = (2,1,0)$ é paralela à reta r_2 que contém os pontos $A_2 = (0,1,2)$ e $B_2 = (1,0,1)$. Calcule a distância entre r_1 e r_2.

Solução.

Temos

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = (1,-1,-1) \parallel r_1 \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{A_2,B_2} = (1,-1,-1) \parallel r_2.$$

Logo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$, e as retas r_1 e r_2 são:

$$\begin{aligned} r_1 &= \{A_1 + t\,\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\} &&= \{(1+t, 2-t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\}\,, \\ r_2 &= \{A_2 + s\,\overrightarrow{v_2} \mid s \in \mathbb{R}\} &&= \{(s, 1-s, 2-s) \mid s \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Para verificar que $r_1 \parallel r_2$, basta verificar que um ponto de r_2 não pertence a r_1, pois já sabemos que $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são múltiplos. Por exemplo, vejamos que $B_2 = (1,0,1) \notin r_1$.

De fato, se $B_2 = (1,0,1)$ pertencesse a r_1, existiria um valor $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} 1 + t = 1 \\ 2 - t = 0 \\ 1 - t = 1\,. \end{cases}$$

Da segunda dessas identidades obtemos $t = 2$ e, substituindo esse valor de t na primeira identidade, obtemos $3 = 1 + 2 = 1$, um absurdo.

Portanto, $B_2 \notin r_1$ e as retas r_1 e r_2 são, efetivamente, paralelas.

Para calcular a distância $d(r_1, r_2)$, basta calcular a distância de um ponto de r_1 a r_2. Por exemplo, calculemos $d(A_1, r_2)$.

Seja $C = (s, 1-s, 2-s) \in r_2$ tal que o vetor
$$\overrightarrow{A_1C} = (-1+s, -1-s, 1-s)$$
é perpendicular à reta r_2, isto é, ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, -1)$.

Temos
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{v_1} \iff\ & 0 = \langle \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{v_1} \rangle \\ & \quad = \langle (-1+s, -1-s, 1-s), (1, -1, -1) \rangle \\ & \quad = -1+s+1+s-1+s = 3s-1 \\ \iff\ & s = \frac{1}{3} \iff \overrightarrow{A_1C} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Logo,
$$d(r_1, r_2) = d(A_1, C) = \|\overrightarrow{A_1C}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{24} = \frac{2}{3}\sqrt{6},$$
é a distância procurada. □

2. Distância entre duas retas reversas no espaço

Sejam $r_1 = \{P_1 + t\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{P_2 + t\overrightarrow{v_2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ duas retas **reversas** no espaço, isto é, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ e os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não são colineares. Por definição, a distância de r_1 a r_2 é a menor das distâncias entre um ponto de r_1 e um ponto de r_2:
$$d(r_1, r_2) = \min\{d(P, Q) \mid P \in r_1 \text{ e } Q \in r_2\}.$$

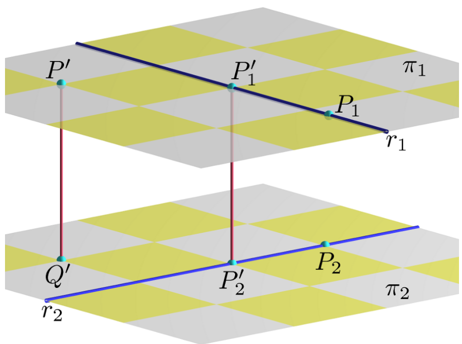

Fig. 2: Retas reversas r_1 e r_2.

Sejam π_1 e π_2 os planos paralelos aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que contém, respectivamente, os pontos P_1 e P_2.

Já sabemos que
$$d(\pi_1, \pi_2) = \min\{d(P, Q) \mid P \in \pi_1 \text{ e } Q \in \pi_2\} = d(P', Q'),$$
onde $P' \in \pi_1$ é um ponto arbitrário e $Q' \in \pi_2$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P' sobre o plano π_2. Isto é, $\overrightarrow{P'Q'} \perp \pi_2$ (ou a π_1).

Pela própria definição, temos

$$d(r_1, r_2) \geq d(\pi_1, \pi_2)\,,$$

pois $r_1 \subset \pi_1$ e $r_2 \subset \pi_2$.

Afirmamos que

$$\boxed{d(r_1, r_2) = d(\pi_1, \pi_2)}$$

Para isso, basta mostrar que existem $P_1' \in r_1$ e $P_2' \in r_2$ tais que $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ é perpendicular a r_1 e a r_2, isto é, perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

Consideremos

$$P_1' = P_1 + t\overrightarrow{v_1} \in r_1 \text{ e } P_2' = P_2 + s\overrightarrow{v_2} \in r_2.$$

Como $\overrightarrow{P_1'P_2'} = \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1}$,

$$\overrightarrow{P_1'P_2'} \perp \overrightarrow{v_1} \iff \langle \overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \langle \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = 0$$

$$\overrightarrow{P_1'P_2'} \perp \overrightarrow{v_2} \iff \langle \overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \langle \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0\,.$$

Desenvolvendo os produtos internos acima, obtemos que $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, simultaneamente, se, e somente se,

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle + s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle + s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0\,, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = -\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle \\ s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = -\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle\,. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} (\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle, \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle)s \quad &+ \quad (-\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle, -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle)t \\ &= \quad (-\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle, -\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle), \end{aligned}$$

o sistema possui uma única solução se, e só se, os vetores

$$(\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle, \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle) \quad \text{e} \quad (-\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle, -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle)$$

não são múltiplos, isto é, se e só se, o determinante

$$\det\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\rangle & -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle \\ \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle & -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle \end{pmatrix} = -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle^2 + \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle$$
$$= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 - \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle^2$$
$$= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 - \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2\cos^2\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$$
$$= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2\left(1 - \cos^2\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\right)$$
$$= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 \operatorname{sen}^2\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}),$$

é diferente de zero.

Sendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores não-nulos e não-colineares, temos que $0^o < \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) < 180^o$ e, em particular, $\operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \neq 0$.

Portanto, o determinante anterior é diferente de zero e o sistema em questão possui uma única solução para s e t. Esses valores determinam um único par de pontos $P_1' \in r_1$ e $P_2' \in r_2$ tal que $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ é perpendicular a r_1 e a r_2, simultaneamente. Então, a distância entre r_1 e r_2 é

$$\boxed{d(r_1, r_2) = d(P_1', P_2')}$$

Exemplo 2

Mostre que as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

são reversas, calcule $d(r_1, r_2)$ e determine a única reta r_3 que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

Solução.

Temos que $r_1 \parallel \overrightarrow{v_1} = (1, 2, 0)$ e $r_2 \parallel \overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$. Como $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não são colineares, as retas podem ser concorrentes ou reversas.

Para mostrar que r_1 e r_2 são reversas, basta verificar que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

Suponhamos, por absurdo, que $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$. Então existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1+t, 2t, 0) = (2+s, 3, 1+s)\,.$$

Igualando as coordenadas, obtemos:

$$\begin{aligned} 1+t &= 2+s \\ 2t &= 3 \\ 0 &= 1+s\,. \end{aligned}$$

Da segunda identidade, obtemos $t = \dfrac{3}{2}$ e da terceira, $s = -1$. Esses valores são incompatíveis com a primeira identidade, pois $1+t = 1+\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \neq 1 = 2+(-1) = 1+s$. Assim, o sistema não tem solução e os valores procurados para s e t não existem.

Logo as retas r_1 e r_2 não se intersectam, isto é, são reversas.

Vamos determinar pontos $P_1' = (1+t, 2t, 0) \in r_1$ e $P_2' = (2+s, 3, 1+s) \in r_2$ tais que o vetor $\overrightarrow{P_1'P_2'} = (1+s-t, 3-2t, 1+s)$ seja perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, simultaneamente.

Devemos achar números $s, t \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\left\{\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{v_1} \rangle &= 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{v_2} \rangle &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \langle (1+s-t, 3-2t, 1+s), (1,2,0) \rangle &= 0 \\ \langle (1+s-t, 3-2t, 1+s), (1,0,1) \rangle &= 0 \end{aligned}\right.$$

ou seja,

$$\left\{\begin{aligned} s-5t &= -7 \\ 2s-t &= -2\,. \end{aligned}\right.$$

Substituindo $t = 2+2s$ na primeira equação, obtemos $s-10-10s = -7$. Então, $s = -\dfrac{1}{3}$, $t = 2+2\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$,

$$P_1' = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0\right), \quad P_2' = \left(\frac{5}{3}, 3, \frac{2}{3}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{P_1'P_2'} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Assim, a distância entre r_1 e r_2 é

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{P_1', P_2'}\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+4} = 1\,.$$

$$r_3 = \left\{P_1' + t\overrightarrow{P_1'P_2'} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}t\,, \frac{8}{3} + \frac{1}{3}t\,, \frac{2}{3}t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\},$$

é a reta procurada. □

Exemplo 3

Sejam r_1 a reta que passa pelo ponto $P_1 = (1,1,2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ e r_2 a reta de intersecção dos planos $\pi_1 : x + 2y + z = 4$ e $\pi_2 : x + z = 2$.

(a) *Mostre que r_1 e r_2 são retas reversas.*

(b) *Calcule a distância entre r_1 e r_2.*

(c) *Determine a única reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.*

Solução.

(a) A reta r_1 é dada por

$$r_1 = \{P_1 + t\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 1+t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Determinemos a equação paramétrica da reta r_2.

Para achar um ponto $P_1' \in r_2$, tomamos $x = 0$, por exemplo, nas equações dos planos π_1 e π_2:

$$\begin{cases} 2y + z &= 4 \\ z &= 2 \end{cases} \Longrightarrow 2y + 2 = 4 \Longrightarrow y = 1 \implies P_1' = (0,1,2) \in r_2.$$

Para achar outro ponto $P_2' \in r_2$, tomamos $x = 2$, por exemplo, nas equações dos planos π_1 e π_2:

$$\begin{cases} 2 + 2y + z &= 4 \\ 2 + z &= 2 \end{cases} \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow y = 1 \implies P_2' = (2,1,0) \in r_2.$$

Logo r_2 é a reta que passa pelo ponto $P_1' = (0,1,2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{P_1'P_2'} = (2,0,-2) \parallel \overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$, ou seja:

$$r_2 = \{P_1' + s\overrightarrow{v_2} \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(s, 1, 2-s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$ não são colineares, as retas r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas.

Suponhamos que $r_1 \cap r_2 = \{Q\}$. Então $Q = (1+t, 1+t, 2) = (s, 1, 2-s)$ para certos valores $s, t \in \mathbb{R}$, que tentaremos determinar.

Devemos ter $1 + t = s$, $1 + t = 1$ e $2 = 2 - s$. Da segunda identidade, obtemos $t = 0$ e, da terceira, $s = 0$. No entanto, esses valores não são compatíveis com a primeira identidade, pois $1+t = 1+0 \neq 0 = s$.

Assim, o ponto $Q \in r_1 \cap r_2$ não existe. Isto é, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ e, portanto, as retas são reversas.

(b) e **(c)** Devemos determinar $P \in r_1$ e $P' \in r_2$ tais que $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{v_1}$, simultaneamente.

Como $P = (1+t, 1+t, 2)$ e $P' = (s, 1, 2-s)$, $\overrightarrow{PP'} = (s-t-1, -t, -s)$ e as condições de perpendicularidade, em termos do produto interno, são:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{v_1} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle (s-t-1, -t, -s), (1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (s-t-1, -t, -s), (1,0,-1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s-t-1-t = 0 \\ s-t-1+s = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s-2t = 1 \\ 2s-t = 1 \end{cases}$$

Substituindo $s = 2t+1$ da primeira equação na segunda, obtemos $4t + 2 - t = 1$, ou seja, $t = -\frac{1}{3}$ e $s = 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}$.

Portanto,

$$P = (1+t, 1+t, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right); \quad P' = (s, 1, 2-s) = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right);$$

e

$$\overrightarrow{PP'} = (s-t-1, -t, -s) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(-1, 1, -1).$$

Assim,

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e a única reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente é a reta que passa por P e que é paralela ao vetor $\overrightarrow{PP'}$, ou seja, paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 1, -1)$. Logo,

$$r = \left\{P + t\overrightarrow{v} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{2}{3} - t\,, \frac{2}{3} + t\,, 2 - t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

é a reta procurada. $\square$

3. Posição relativa de um plano e uma esfera

Sabemos da Geometria Euclidiana Espacial que a intersecção de um plano com uma esfera pode ser um ponto, um círculo ou o conjunto vazio. Vamos provar estes fatos usando os recursos da geometria analítica.

Teorema 1

Sejam π um plano e S uma esfera de centro A e raio $R > 0$. Então,

(a) *$d(A, \pi) > R$ se, e somente se, $\pi \cap S = \varnothing$.*

(b) *$d(A, \pi) = R$ se, e somente se, $\pi \cap S$ é um ponto.*

Neste caso, dizemos que π é o **plano tangente** *a S no ponto P_0, onde P_0 é o ponto de intersecção do plano π com a reta normal a π que passa pelo centro A da esfera S.*

(c) *$d(A, \pi) < R$ se, e somente se, $\pi \cap S$ é um círculo.*

Além disso, o círculo $\pi \cap S$, contido no plano π, tem raio $\sqrt{R^2 - d(A, \pi)^2}$ e centro no ponto de intersecção do plano π com a reta normal a π que passa pelo centro A da esfera S.

Prova.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais tal que, $\pi_{XY} = \pi$ e $A = (0, 0, c)$, com $c \geq 0$. Nesse sistema de coordenadas, $d(A, \pi) = c$ e

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2\}.$$

Caso $d(A, \pi) = c > R$.

Seja $(x, y, 0) \in \pi = \pi_{XY}$ um ponto arbitrário. Como

$$x^2 + y^2 + (0 - c)^2 \geq c^2 > R^2,$$

concluímos que $(x, y, 0) \notin S$. Logo nenhum ponto de π pertence a S, ou seja, $\pi \cap S = \varnothing$.

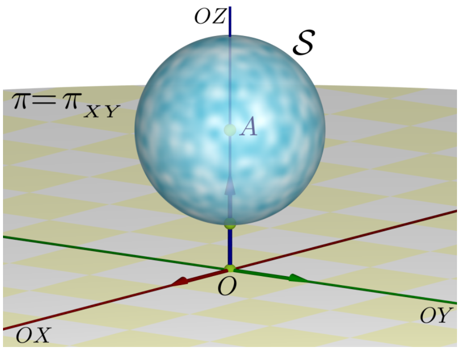

Fig. 3: $d(A, \pi) = c > R$.

Portanto,

$$d(A,\pi) = c > R \Longrightarrow \pi \cap S = \varnothing.$$

Caso $d(A,\pi) = c = R$.

Seja $P = (x, y, 0) \in \pi = \pi_{XY}$. Temos

$$\begin{aligned} P \in S &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + (0 - c)^2 = R^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + R^2 = R^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 . \end{cases} \end{aligned}$$

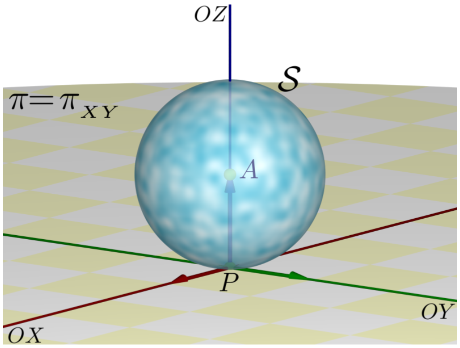

Fig. 4: $d(A,\pi) = c = R$.

Logo $P = (x, y, 0) \in \pi \cap S$ se, e somente se, $P = (0, 0, 0)$.

Provamos, assim, que

$$d(A,\pi) = c = R \Longrightarrow \pi \cap S = \{P = (0, 0, 0)\}.$$

Como o vetor $\overrightarrow{PA} = (0, 0, c)$ é perpendicular ao plano $\pi = \pi_{XY}$, temos que P é, geometricamente, o ponto onde a reta que passa por A e é perpendicular ao plano π intersecta π.

Caso $d(A,\pi) = c < R$.

Temos

$$P = (x, y, 0) \in \pi \cap S \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 = R^2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 - c^2 .$$

Isto é, $\pi \cap S$ é um círculo contido no plano $\pi = \pi_{XY}$ de raio

$$\sqrt{R^2 - c^2} = \sqrt{R^2 - d(A,\pi)^2}$$

e centro no ponto $P = (0, 0, 0)$, que é, geometricamente, o ponto de intersecção de π com a reta normal ao plano π que passa pelo centro A da esfera S.

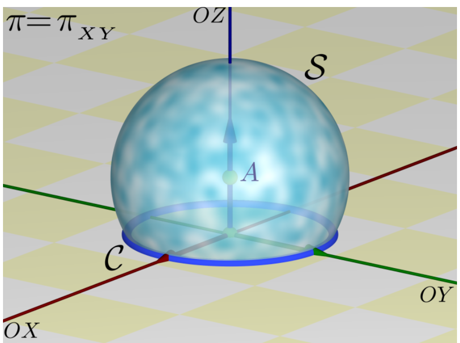

Fig. 5: $d(A,\pi) = c < R$.

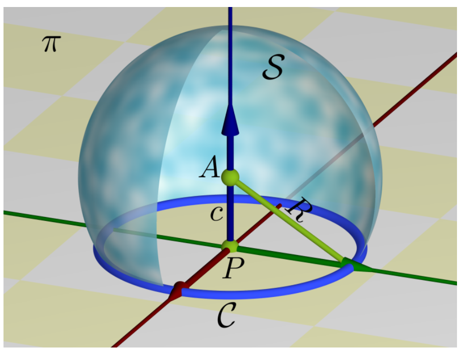

Fig. 6: Cálculo do raio de C.

Para provarmos que as recíprocas também são válidas, basta observarmos que

$$d(A,\pi) > R\,, \quad d(A,\pi) = R\,, \quad d(A,\pi) < R$$

esgotam todas as possibilidades, enquanto as afirmações

- $\pi \cap S = \varnothing$;
- $\pi \cap S$ é um ponto;
- $\pi \cap S$ é um círculo;

excluem-se mutuamente.

De fato, suponhamos, por exemplo, que $\pi \cap S = \varnothing$. Então, necessariamente, $d(A,\pi) > R$, pois se $d(A,\pi) = R$, $\pi \cap S$ é um ponto, e se $d(A,\pi) < R$, $\pi \cap S$ é um círculo. ■

Exemplo 4

Seja S uma esfera de centro $A = (2,1,-1)$ e suponha que o plano $\pi : x + z + 1 = 0$ seja tangente a S.

(a) *Calcule o raio de S.*

(b) *Calcule o ponto de tangência do plano π com a esfera S.*

(c) *Determine um plano α que seja perpendicular a π e tangente a S.*

Solução.

(a) Como o plano π é tangente à esfera S temos, pelo teorema anterior, que o raio R da esfera é

$$R = d(A,\pi) = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

(b) Seja r a reta perpendicular ao plano π que passa pelo centro $A = (2,1,-1)$.

Como $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ é perpendicular a π, a reta r é dada pelas equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1 \\ z = -1+t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

O ponto de tangência de π com a esfera S é o ponto P onde a reta r intersecta o plano π.

Como $P \in r$, devemos ter

$$P = (2 + t, 1, -1 + t),$$

para algum valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como $P \in \pi$, as coordenadas de P devem satisfazer a equação de π. Isto é,

$$(2 + t) + (-1 + t) + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -1\,.$$

Portanto, $P = (2 + (-1), 1, -1 + (-1)) = (1, 1, -2)$ é o ponto de tangência do plano π com a esfera S.

(c) Seja $\alpha : ax + by + cz = d$ um plano perpendicular ao plano $\pi : x + z + 1 = 0$.

Então o vetor $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$, normal ao plano α, deve ser perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$, normal ao plano π. Isto é,

$$\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = a + c = 0.$$

Tomando, por exemplo, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, obtemos $\overrightarrow{w} = (1, 0, -1)$ e o plano α na forma

$$\alpha : x - z = d\,.$$

O número d se calcula sabendo que α é tangente a S, ou seja, a distância do centro $A = (2, 1, -1)$ de S ao plano α é igual ao raio $R = \sqrt{2}$ de S:

$$\sqrt{2} = R = d(A, \alpha) = \frac{|2 - (-1) - d|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - d|}{\sqrt{2}}$$

$$\Longleftrightarrow |3 - d| = 2 \Longleftrightarrow 3 - d = \pm 2 \Longleftrightarrow d = 3 \pm 2\,.$$

Logo $d = 5$ ou $d = 1$. Para cada um desses valores,

$$\alpha_1 : x - z = 5 \quad \text{ou} \quad \alpha_2 : x - z = 1,$$

obtemos um plano tangente a S e perpendicular a π. □

Exemplo 5

Determine o centro C e o raio R do círculo $\mathcal{C}$ dado por:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0\,. \end{cases}$$

Solução.
Consideremos a esfera

$$S : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100\,,$$

de centro no ponto $A = (3, -2, 1)$ e raio $\rho = 10$, e o plano

$$\pi : 2x - 2y - z = -9\,,$$

perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -2, -1)$ que passa pelo ponto $(0, 0, 9)$.

Como

$$d(A, \pi) = \frac{|2(3) - 2(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + 4 - 1 + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6 < 10 = \rho\,,$$

a esfera S e o plano π, de fato, se intersectam ao longo de um círculo C.

O raio R do círculo C é

$$R = \sqrt{\rho^2 - d(A, \pi)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\,,$$

e o centro de C é o ponto de intersecção do plano π com a reta r que passa por $A = (3, -2, 1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -2, -1)$ normal ao plano π.

As equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Assim, $C = (3 + 2t, -2 - 2t, 1 - t)$, onde o valor do parâmetro t se determina sabendo que $C \in \pi$, isto é:

$$2(3 + 2t) - 2(-2 - 2t) - (1 - t) = -9 \Longrightarrow 9t + 9 = -9 \Longrightarrow t = -2\,.$$

Portanto,

$$C = (3 + 2(-2), -2 - 2(-2), 1 - (-2)) = (-1, 2, 3),$$

é o centro do círculo C. $\square$