Aula 14

Nesta aula vamos definir dois novos produtos entre vetores do espaço, o **produto vetorial** e o **produto misto**. Para isso, primeiro vamos apresentar o conceito de **orientação**.

1. Orientação do espaço

Seja $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ um terno ordenado de **vetores linearmente independentes**. Observemos esse terno de uma posição tal que o terceiro vetor, $\overrightarrow{u_3}$, esteja dirigido para nossos olhos. A seguir, consideremos a rotação de menor ângulo do primeiro vetor, $\overrightarrow{u_1}$, até que ele fique colinear com o vetor $\overrightarrow{u_2}$ e com o mesmo sentido. Dizemos que **o terno $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é positivo** se a rotação efetuada for no sentido anti-horário, e **negativo**, se a rotação for no sentido horário.

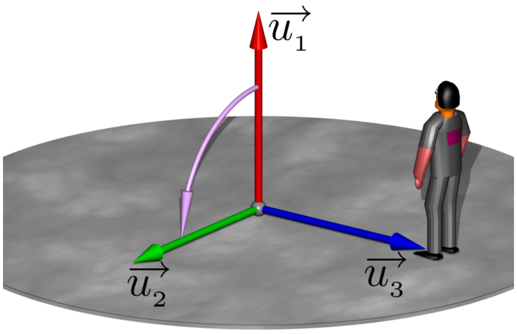

Fig. 1: Terno de orientação positiva.

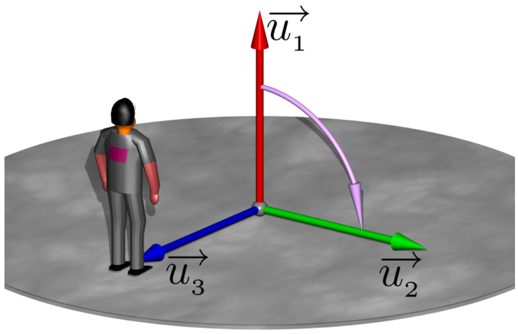

Fig. 2: Terno de orientação negativa.

Observação 1

(a) *Essa convenção é conhecida como* **regra da mão direita**, *pois se $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno positivo, e esticarmos os dedos indicador, médio, anular e mínimo na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_1}$ e depois fecharmos a mão na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_2}$, o polegar esticado apontará na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_3}$.*

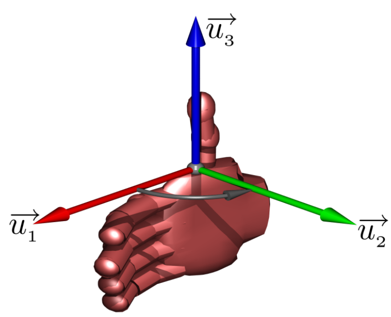

Fig. 3: Regra da mão direita.

(b) *Se $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno positivo, ao efetuarmos um número par de permutações (troca entre dois vetores consecutivos da lista), continuaremos obtendo um terno positivo. Enquanto que um número ímpar de permutações dá lugar a um terno negativo. Isto é,*

Se $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno positivo $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}\ ,\ \{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1}\}\ ,\ \{\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\} & \textbf{são ternos positivos.} \\ \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_2}\}\ ,\ \{\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}\}\ ,\ \{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\} & \textbf{são ternos negativos.} \end{cases}$$

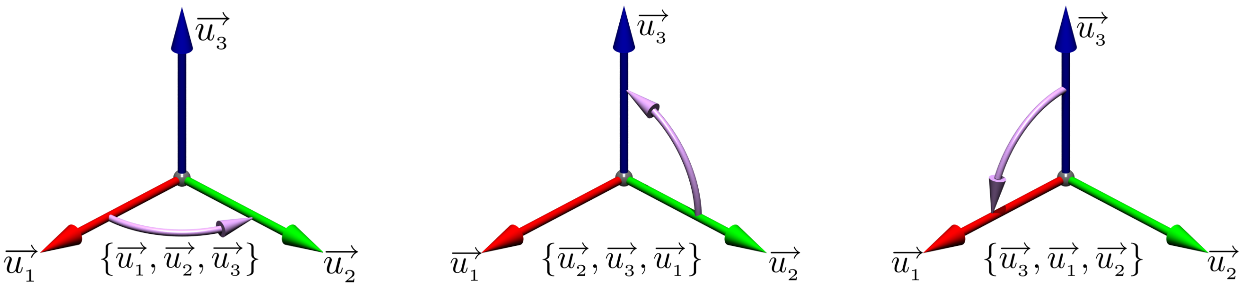

Fig. 4: Ternos positivos.

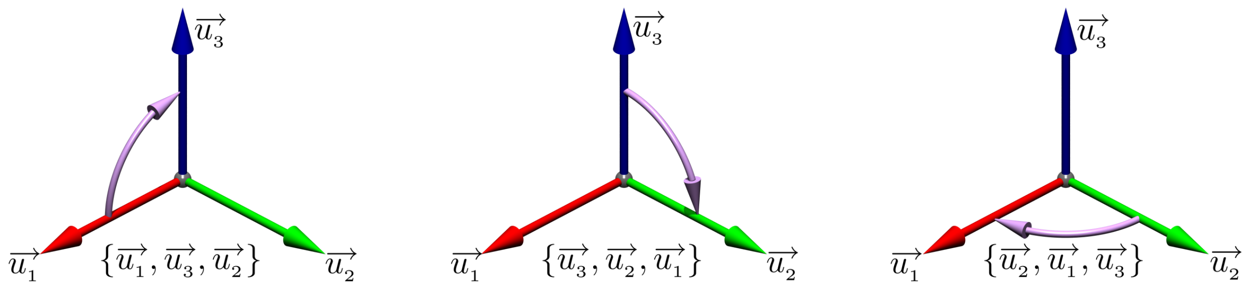

Fig. 5: Ternos negativos.

(c) *Se num terno orientado mudramos o sinal de um ou dos três vetores, então a orientação do terno muda. Isto é, se $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno positivo (negativo), então os ternos*

$$\{-\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}, \quad \{\overrightarrow{u_1}, -\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}, \quad \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, -\overrightarrow{u_3}\} \quad \textit{e} \quad \{-\overrightarrow{u_1}, -\overrightarrow{u_2}, -\overrightarrow{u_3}\}$$

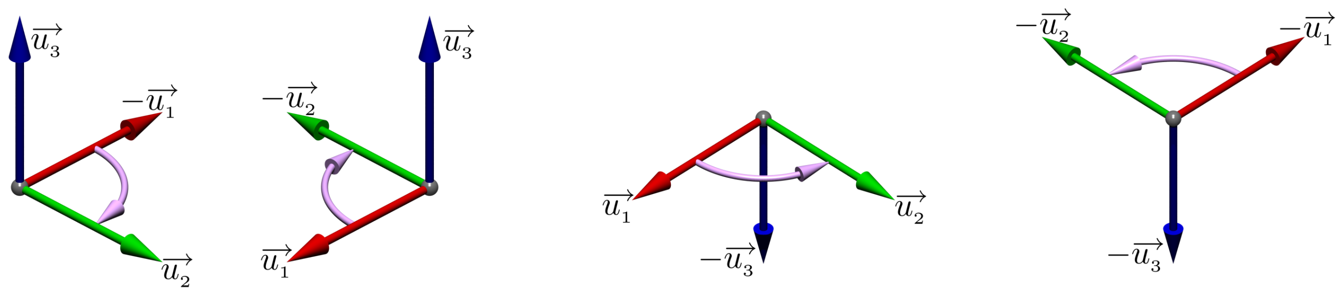

Fig. 6: Ternos negativos obtidos mediante troca de sinal um número impar de vezes.

são negativos *(respectivamente, positivos).*

Se mudarmos o sinal de dois vetores, a orientação não muda. Isto é, se $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno positivo (negativo), então os seguintes ternos também serão positivos (respectivamente, negativos):

$$\{-\overrightarrow{u_1}, -\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}, \quad \{-\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, -\overrightarrow{u_3}\}, \quad \textit{e} \quad \{\overrightarrow{u_1}, -\overrightarrow{u_2}, -\overrightarrow{u_3}\}.$$

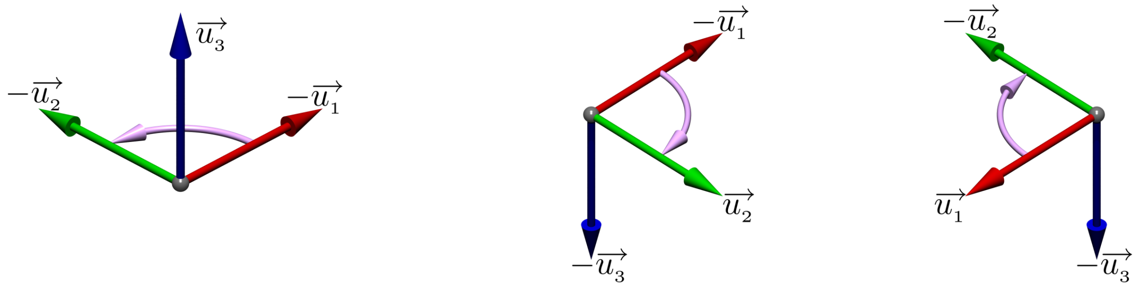

Fig. 7: Ternos positivos obtidos mediante troca de sinal um número par de vezes.

2. Produto Vetorial

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço. O **produto vetorial** de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é o único vetor, designado por $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$, definido pelas seguintes propriedades:

(a) $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ **são** colineares ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

(b) Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ **não são** colineares, então $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ é definido como sendo o único vetor que satisfaz às seguintes condições:

(1) $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\, \text{sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$,

(2) $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ (em particular, $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ é perpendicular a qualquer plano paralelo aos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$).

(3) $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ é um terno LI positivo.

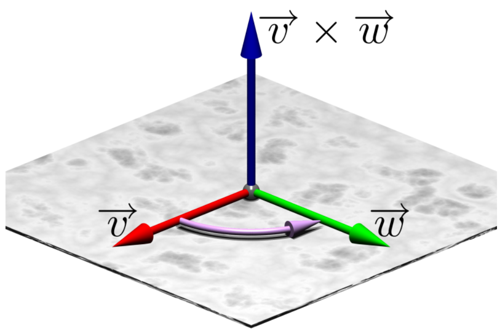

Fig. 8: O produto vetorial.

Observação 2

- *Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não-nulos, temos*

$$\text{sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \iff \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0^o \text{ ou } 180^o \iff \overrightarrow{v} \text{ e } \overrightarrow{w} \text{ são colineares}.$$

- *Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ são vetores não-colineares, então* $\text{sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$. *Logo* $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| \neq 0$ *e, em particular, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ são LI, já que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.*

Interpretação geométrica da norma do produto vetorial

Sejam $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OB} \neq \overrightarrow{0}$ vetores não colineares. Seja P tal que $OAPB$ é um paralelogramo, que designamos $\mathcal{P}$.

Então, a altura de $\mathcal{P}$, considerando o segmento OA como base, é

$$|\overrightarrow{OB}|\ \text{sen}\,\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Logo,

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Área}\,(\mathcal{P}) &= \|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OB}\| \text{ sen}\,\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ &= \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\| \text{ sen}\,\angle(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \\ &= \|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\| \end{aligned}}$$

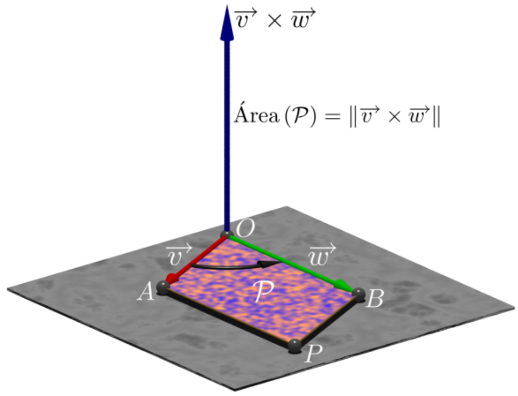

Fig. 9: Interpretação geométrica do produto vetorial.

Isto é, *a norma do produto vetorial de $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OA}$ com $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{OB}$ é a área do paralelogramo que tem por lados adjacentes os segmentos OA e OB*.

Note que, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são colineares, ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$, então o paralelogramo $\mathcal{P}$ fica reduzido a um segmento ou a um ponto (paralelogramo degenerado), e tem, portanto, área zero. Como, nesses casos, $\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|=0$, a interpretação geométrica continua válida.

Propriedades básicas do produto vetorial

No seguinte teorema apresentamos as propriedades básicas do produto vetorial.

Teorema 1

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço e seja $\lambda\in\mathbb{R}$.

Então, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ *se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são colineares ou um deles é o vetor nulo.*

Logo, se $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$ não são colineares, então $\{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\}$ é um terno LI positivo.

(b) $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=-\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v}$.

(c) $(\lambda\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}=\lambda(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})=\overrightarrow{v}\times(\lambda\overrightarrow{w})$.

(d) $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}$ *e* $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times w=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$.

Nota.

A propriedade **(b)** diz que o produto vetorial é **anti-comutativo**, isto é, *a ordem dos fatores* **altera** *o produto*. A propriedade **(c)** diz que o produto vetorial é **distributivo** em relação à adição.

Prova.

(a) Se um dos vetores $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ é nulo ou eles são colineares então, pela definição de produto vetorial, $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ e verifiquemos que, necessariamente, um deles deve ser nulo ou eles são colineares.

Para tanto, lembre que se P e Q são proposições, a implicação $P \Longrightarrow Q$ equivale a $\sim Q \Longrightarrow \sim P$, onde $\sim P$ significa a negação de P.

Em nosso caso P é a proposição "$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$" e Q é a proposição:

$$Q : \text{“}\overrightarrow{v} = 0 \text{ ou } \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \text{ ou } 180^o\text{”}.$$

Logo, demonstrar a implicação $P \Longrightarrow Q$ equivale a demonstrar $\sim Q \Longrightarrow \sim P$.

A negação de P é $\sim P : \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ e a negação de Q é

$$\sim Q : \text{“}\overrightarrow{v} \neq 0,\ \overrightarrow{w} \neq 0 \text{ e } \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ é diferente de } 0^o \text{ e de } 180^o\text{''}.$$

Supondo $\sim Q$ verdadeira, a demonstração de $\sim P$ segue, praticamente, da definição.

De fato, se $\overrightarrow{v} \neq 0$, $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ e $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ não é 0^o nem 180^o, temos $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$, $\|\overrightarrow{w}\| \neq 0$ e $\operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$.

Logo $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$ e, portanto, $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, como queríamos demonstrar.

(b) Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ ou os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são colineares então, pela definição do produto vetorial, temos $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Logo $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} = -\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$.

Suponhamos, agora, que $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ não são colineares.

Então $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e os ternos $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ e $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}\}$ são LI positivos.

Sejam O, A e B pontos no espaço, tais que, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OB}$ e designemos por π o plano determinado por O, A e B.

Os vetores $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$ são colineares, pois ambos são perpendiculares ao plano π. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Como $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{w}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}\|$, temos $|\lambda| = 1$, ou seja, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Logo $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v} = \pm(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Como o terno $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ é positivo, o terno $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ é negativo e, portanto, o terno $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\}$ volta a ser positivo. Além disso, o terno $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}\}$ é também positivo. Conseqüentemente, devemos ter $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

(c) Verifiquemos apenas a identidade $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{u} = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$. A prova da outra identidade se faz de modo análogo.

Se $\lambda = 0$, então $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Logo $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são colineares ou um deles é o vetor nulo, o mesmo ocorre com $\lambda\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Logo, $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Suponhamos, então, que $\lambda \neq 0$ e que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são não-nulos e não são colineares.

Seja P um ponto do espaço e seja σ o plano que passa por P e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

Como o plano σ coincide com o plano que passa por P e é paralelo aos vetores $\lambda\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, os vetores $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ e $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ são ambos perpendiculares a σ, isto é, são vetores colineares.

Então existe um número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que, $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \mu(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$. Em particular,

$$\|(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}\| = \|\mu(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\| = |\mu|\, \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\|.$$

Isto é,

$$\|\lambda\overrightarrow{v}\|\, \|\overrightarrow{w}\| \text{ sen}\,\angle(\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = |\mu|\, \|\overrightarrow{v}\|\, \|\overrightarrow{w}\| \text{ sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$
$$|\lambda|\, \|\overrightarrow{v}\| \text{ sen}\,\angle(\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = |\mu|\, \|\overrightarrow{v}\| \text{ sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$
$$|\lambda| \text{ sen}\,\angle(\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = |\mu| \text{ sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

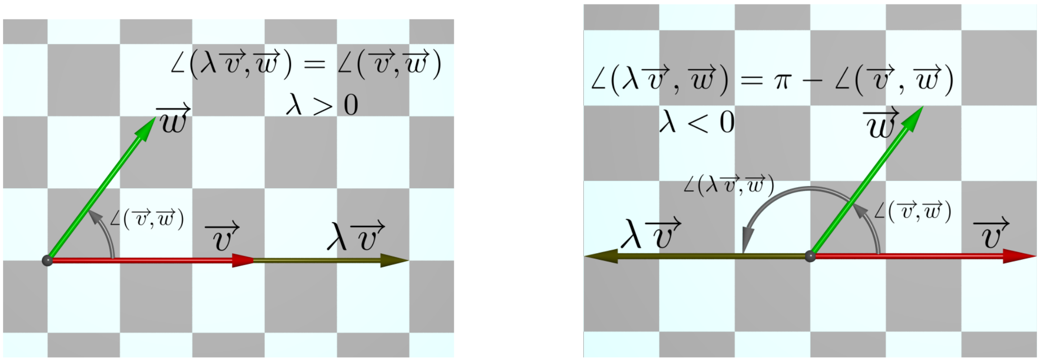

Fig. 10: Determinação do ângulo.

Observamos que, se $\lambda > 0$, então $\angle(\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Enquanto que, se $\lambda < 0$, $\angle(\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \pi - \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Logo $\text{sen}\,\angle(\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \text{sen}(\pi - \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})) = \text{sen}\,\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Em qualquer caso, a identidade anterior se reduz a

$$|\lambda| = |\mu|\,, \quad \text{ou seja}\,, \quad \mu = \pm\lambda\,.$$

Portanto, $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ ou $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = -\lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Verifiquemos que a segunda alternativa não ocorre.

Se $\lambda > 0$, então os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\lambda\overrightarrow{v}$ têm o mesmo sentido. Logo os vetores $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$, $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ e $\lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ têm, também, o mesmo sentido. Assim, $(\lambda\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

Se $\lambda < 0$, então os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\lambda\overrightarrow{v}$ têm sentidos opostos e os vetores $\lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ têm, também, sentidos opostos.

Como $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ é um terno positivo, o terno $\{\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ é negativo e o terno $\{\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\}$ volta a ser positivo.

Sendo $\{\lambda\vec{v}, \vec{w}, (\lambda\vec{v}) \times \vec{w}\}$, pela definição do produto vetorial, um terno positivo, os vetores $\lambda(\vec{v} \times \vec{w})$ e $(\lambda\vec{v}) \times \vec{w}$ têm o mesmo sentido, e como têm também a mesma norma e a mesma direção, eles são iguais.

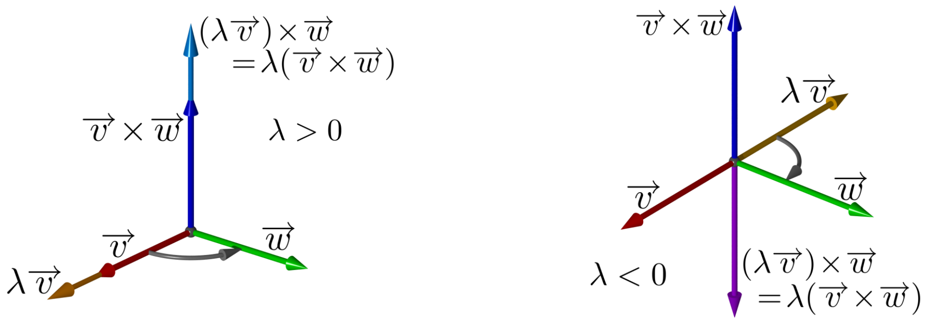

Fig. 11: Determinação do sentido do produto vetorial em termos de λ.

(d) A propriedade distributiva será demonstrada mais adiante. ■

3. Produto misto de três vetores no espaço

Definição 1

O **produto misto** *dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do espaço é o número real definido por*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle}$$

Observação 3

Uma observação básica a ser feita sobre a definição do produto misto é a seguinte:

Se dois fatores no produto misto são iguais, então o produto misto é igual a zero:

$$[\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{u}] = 0$$

Com efeito, temos

- $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = \langle \vec{u} \times \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$ *;*
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$*, pois $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;*
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{u}] = \langle \vec{v} \times \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$*, pois $\vec{v} \times \vec{u}$ é um vetor perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{u}$.*

Interpretação geométrica do produto misto

Sejam O, A, B e C pontos não-coplanares e consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem arestas adjacentes OA, OB e OC.

Considerando o paralelogramo $\mathcal{T}$ de lados adjacentes OA e OB como base de $\mathcal{P}$, temos:

$$\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \text{Área}\,(\mathcal{T}) \cdot \text{altura}\,(\mathcal{P})$$

Como Área $(\mathcal{T}) = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$ e altura $(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{w}\|\,|\cos\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$, temos:

$$\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|\,|\cos\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = |\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle|\,,$$

ou seja, **o volume de $\mathcal{P}$ é o módulo do produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$**:

$$\boxed{\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \left|\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,\right|}$$

ou, em termos dos vértices O, A, B e C:

$$\boxed{\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \left|\,\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\,\right|}$$

Por outro lado, **se os pontos O, A, B e C são coplanares**, isto é, os vetores

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \ \text{ e } \ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$$

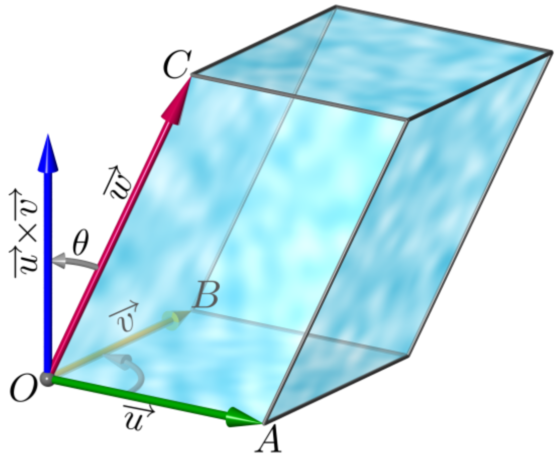

Fig. 12: Interpretação geométrica do produto misto.

não são LI, o paralelepípedo fica reduzido a um paralelogramo, a um segmento ou a um ponto, tendo, portanto, **volume zero**. Esse fato concorda, como veremos abaixo, com o seguinte fato:

$$\boxed{\text{Se } \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ e } \overrightarrow{w} \text{ não são LI, então } [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0}$$

Propriedades básicas do produto misto

Teorema 2

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_0}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w_0}$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

(a) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$ *se, e somente se, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são LI (ou seja, são vetores coplanares).*

(b) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] > 0$ *se, e somente se, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é um terno LI positivo.*

Logo $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] < 0$ se, e somente se, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é um terno LI negativo.

(c) *O sinal do produto misto muda quando permutamos dois fatores consecutivos. Isto é,*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]}$$

(d) $[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}] = \lambda\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,.$

(e) $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,.$

(f) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}]\,.$

(g) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w_0}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_0}]\,.$

Prova.

(a) Suponhamos que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$. Então ocorre uma das seguintes alternativas:

- Algum(s) dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ é nulo;
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
- $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{w}$;

Se a primeira alternativa ocorre então, claramente, os vetores são coplanares. Se a segunda alternativa ocorre, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares; em particular, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares.

Se acontecer a terceira alternativa, então, necessariamente, o vetor $\overrightarrow{w}$ é paralelo a um plano paralelo aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, pois $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ é perpendicular, simultaneamente, a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Logo $\overrightarrow{w}$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, isto é, os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares.

Reciprocamente, suponhamos que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares e mostremos que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então, claramente, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares, então $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$, já que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$.

Suponhamos que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ são não-nulos e $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são não-colineares.

Como $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tais que, $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Pelas propriedades do produto interno e do produto vetorial, temos

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}] = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0\,.$$

Finalmente, observamos que a equivalência

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0 \iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ e } \overrightarrow{w} \text{ são coplanares,}$$

significa o mesmo que a equivalência

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0 \iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ e } \overrightarrow{w} \textbf{ não } \text{são coplanares, isto é, são LI.}$$

(b) Temos $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\|$ cos $\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$

Sejam O, A, B e C pontos do espaço tais que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \text{ e } \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}.$$

Seja π o plano que contém os pontos O, A e B, e seja $\mathcal{S}$ o semi-espaço determinado pelo plano π, para o qual $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ aponta para $\mathcal{S}$.

Como $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\}$ é um terno positivo, o terno $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é positivo se, e somente se, $C \in \mathcal{S}$. Isto é, se, e somente se, o ângulo $\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ for agudo.

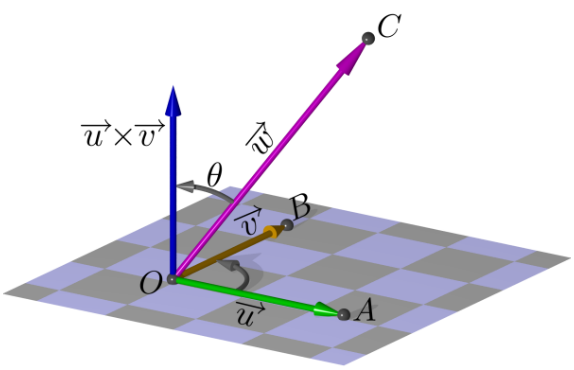

Fig. 13: Propriedade (b).

Ou seja, se, e somente se, cos $\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$, o que equivale a

$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \cos \angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0.$$

A equivalência $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] < 0 \iff \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é um terno negativo, é demonstrada da mesma maneira.

(c) Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares, então todos os produtos mistos apresentados no quadro do enunciado são iguais a zero.

Suponhamos, então, que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI (não-coplanares).

Como o volume de um paralelepípedo não se altera se mudarmos a ordem das suas arestas, isto é, se considerarmos outra de suas faces como base, temos:

$$\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right]\right| .$$

Os ternos $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ e $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ determinam a mesma orientação no espaço (ambos são positivos ou ambos são negativos), pois um é obtido a partir do outro permutando os vetores um número par de vezes.

Pelo item **(b)**, concluímos que os produtos mistos $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right]$ e $\left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right]$ têm o mesmo sinal e, portanto, são iguais.

As outras identidades se demonstram da mesma forma.

(d) Pelas propriedades do produto vetorial e do produto interno, temos

$$\left[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] = \langle(\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle = \langle\lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}), \overrightarrow{w}\rangle = \lambda\langle\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle = \lambda\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] .$$

As outras identidades se demonstram da mesma forma.

(e) Pelas propriedades do produto interno e as identidades de permutação dos fatores no produto misto (não usaremos aqui a propriedade distributiva do produto vetorial que ainda não foi demonstrada), temos

$$\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] &= \left[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}_0\right] && \text{(identidade de permutação no produto misto)}\\
&= \langle\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}_0\rangle && \text{(definição do produto misto)}\\
&= \langle\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\rangle + \langle\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_0\rangle && \text{(propriedade distributiva do produto interno)}\\
&= \left[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right] + \left[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}_0\right] && \text{(definição do produto misto)}\\
&= \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] + \left[\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] && \text{(identidades de permutação no produto misto)}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(f) e **(g)** Nesses itens, as identidades se demonstram como a identidade do item **(e)**. ■

Demonstração da propriedade distributiva do produto vetorial

Vamos, agora, completar a prova do Teorema 1, demonstrando a propriedade distributiva do produto vetorial (item **(d)** do Teorema 1):

Prova.
O nosso objetivo é demonstrar a identidade

$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}\,.$$

A outra identidade, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$, se prova de maneira análoga.

Seja $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

Para atingir o nosso objetivo, devemos demonstrar que $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.

Basta então, demonstrar que $\langle \overrightarrow{z}, \overrightarrow{z} \rangle = 0$.

Pelas propriedades do produto interno e do produto misto, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{z}, \overrightarrow{z} \rangle &= \langle \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}), \overrightarrow{z} \rangle - \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z} \rangle - \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z} \rangle \\
&= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}] - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] \\
&= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}] - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}] = 0
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

4. Expressão do produto vetorial em coordenadas

O nosso objetivo agora é obter a expressão do produto vetorial e do produto misto usando as coordenadas dos vetores fatores em relação a um sistema de coordenadas ortogonais dado.

Definição 2

Vetores $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ unitários e mutuamente ortogonais são chamados ***ortonormais****.*

Observação 4

Se os vetores $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ são ortonormais, então são LI (não-coplanares).

De fato, suponhamos pelo absurdo, que $\overrightarrow{e_3} = \lambda \overrightarrow{e_1} + \mu \overrightarrow{e_2}$.

Como $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_3}$, temos $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle = 0$, ou seja,

$$0 = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle = \langle \overrightarrow{e_1}, \lambda \overrightarrow{e_1} + \mu \overrightarrow{e_2} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} \rangle + \mu \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = \lambda\,,$$

pois $\|\overrightarrow{e_1}\|^2 = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} \rangle = 1$ e $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$, isto é, $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = 0$.

Analogamente, como $\overrightarrow{e_2} \perp \overrightarrow{e_3}$, temos $\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle = 0$, ou seja,

$$0 = \langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle = \langle \overrightarrow{e_2}, \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2} \rangle = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu\,,$$

pois $\|\overrightarrow{e_2}\|^2 = \langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2} \rangle = 1$ *e* $\overrightarrow{e_2} \perp \overrightarrow{e_1}$, *isto é,* $\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} \rangle = 0$.

Conseqüentemente, $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$, *uma contradição, pois* $\|\overrightarrow{e_3}\| = 1$.

Proposição 1

Seja $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ *um terno positivo de vetores unitários e mutuamente ortogonais, isto é, um* **terno ortonormal positivo**. *Então valem as seguintes igualdades:*

$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$,	$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$,	$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$,
$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}$,	$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}$,	$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}$,
$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}$,	$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$,	$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$.

Prova.
Temos que $\|\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\| = \|\overrightarrow{e_1}\|\,\|\overrightarrow{e_2}\| \operatorname{sen} 90^o = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Como $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ são vetores unitários e colineares, pois ambos são perpendiculares, simultaneamente, a $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$, temos $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \pm\overrightarrow{e_3}$.

Além disso, como $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ e $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\}$ são ternos positivos, concluímos que $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$.

As outras identidades se demonstram de maneira análoga. ■

Dispositivo prático para o cálculo do produto vetorial

Seja $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ um terno ortonormal positivo.

Sabemos que o produto $\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j}$, $i \neq j$, é igual a $\overrightarrow{e_k}$ ou a $-\overrightarrow{e_k}$, com $k \neq i$ e $k \neq j$.

A determinação exata é feita da seguinte maneira:

- $\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_k}$ se o menor caminho de $\overrightarrow{e_i}$ para $\overrightarrow{e_j}$ no diagrama ao lado for no sentido **anti-horário** (giro positivo).

- $\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j} = -\overrightarrow{e_k}$ se o menor caminho de $\overrightarrow{e_i}$ para $\overrightarrow{e_j}$ no diagrama ao lado for no sentido **horário** (giro negativo).

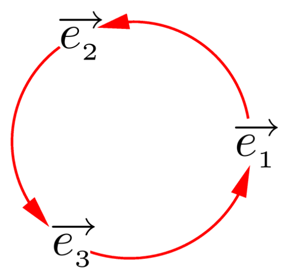

Fig. 14: Dispositivo prático.

O produto vetorial em coordenadas

Seja OXYZ um sistema de eixos ortogonais positivo. Isto é, se

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)\,, \quad \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)\,,$$

então o terno $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ um terno ortonormal positivo.

Se $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ são vetores no espaço expressos em termos de suas coordenadas com respeito ao sistema OXYZ, então

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3}\,.$$

Usando as propriedades do produto vetorial do Teorema 1, temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3}\right) \\
&= \left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(x'\overrightarrow{e_1}\right) + \left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(y'\overrightarrow{e_2}\right) \\
&\quad + \left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(z'\overrightarrow{e_3}\right) \\
&= \left(x\overrightarrow{e_1}\right) \times \left(x'\overrightarrow{e_1}\right) + \left(y\overrightarrow{e_2}\right) \times \left(x'\overrightarrow{e_1}\right) + \left(z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(x'\overrightarrow{e_1}\right) \\
&\quad + \left(x\overrightarrow{e_1}\right) \times \left(y'\overrightarrow{e_2}\right) + \left(y\overrightarrow{e_2}\right) \times \left(y'\overrightarrow{e_2}\right) + \left(z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(y'\overrightarrow{e_2}\right) \\
&\quad + \left(x\overrightarrow{e_1}\right) \times \left(z'\overrightarrow{e_3}\right) + \left(y\overrightarrow{e_2}\right) \times \left(z'\overrightarrow{e_3}\right) + \left(z\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(z'\overrightarrow{e_3}\right) \\
&= xx'\left(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1}\right) + yx'\left(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1}\right) + zx'\left(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}\right) \\
&\quad + xy'\left(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\right) + yy'\left(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2}\right) + zy'\left(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2}\right) \\
&\quad + xz'\left(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3}\right) + yz'\left(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}\right) + zz'\left(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3}\right) \\
&= xx'\overrightarrow{0} + yx'\left(-\overrightarrow{e_3}\right) + zx'\overrightarrow{e_2} \\
&\quad + xy'\overrightarrow{e_3} + yy'\overrightarrow{0} + zy'\left(-\overrightarrow{e_1}\right) \\
&\quad + xz'\left(-\overrightarrow{e_2}\right) + yz'\overrightarrow{e_1} + zz'\overrightarrow{0} \\
&= (yz' - zy')\overrightarrow{e_1} + (zx' - xz')\overrightarrow{e_2} + (xy' - yx')\overrightarrow{e_3} \\
&= (yz' - zy')\overrightarrow{e_1} - (xz' - zx')\overrightarrow{e_2} + (xy' - yx')\overrightarrow{e_3}\,.
\end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{e_1} - (xz' - zx')\overrightarrow{e_2} + (xy' - yx')\overrightarrow{e_3}\,.$$

Escrevendo os coeficientes dos vetores como determinantes 2×2, temos

$$\boxed{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{e_3} = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)}$$

Um dispositivo prático para efetuar esse cálculo consiste em calcular o seguinte "determinante simbólico" desenvolvendo pela primeira fila:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}}$$

Exemplo 1

Determinar o produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, *onde* $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$.

Solução.
Temos:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = 5\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}\,.$$

Logo $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (5, 5, -5)$. □

Exemplo 2

Sejam $P_0 = (1, -1, 2)$, $P = (1, 3, 1)$ *e* $Q = (1, -1, 0)$. *Calcule a área do paralelogramo* $\mathcal{P}$ *que tem como arestas adjacentes os segmentos* P_0P *e* P_0Q.

Solução.
Sendo $\overrightarrow{P_0P} = (0, 4, -1)$ e $\overrightarrow{P_0Q} = (0, 0, -2)$, temos:

$$\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = -8\overrightarrow{e_1} = (-8, 0, 0).$$

Portanto, Área $(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q}\| = \|(-8, 0, 0)\| = 8$. □