Aula 15

Nesta aula vamos expressar o produto misto em termos de coordenadas, analisar as propriedades decorrentes dessa expressão e fazer algumas aplicações interessantes dos produtos vetorial e misto.

1. Expressão do produto misto em coordenadas

Sejam $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ e $\overrightarrow{w} = (x'', y'', z'')$ vetores expressos em coordenadas com respeito a um sistema de eixos ortogonais positivo $OXYZ$.

Temos

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \left\langle \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right), (x'', y'', z'') \right\rangle \\
&= x'' \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Por outro lado, o determinante $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ da matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, quando desenvolvido pela regra de Sarrus, nos dá

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & x & y \\ x' & y' & z' & x' & y' \\ x'' & y'' & z'' & x'' & y'' \end{vmatrix} \\
&= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - x''y'z - xy''z' - yx'z'' \\
&= x''(yz' - y'z) - y''(xz' - x'z) + z''(xy' - x'y)\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}}$$

Em particular, o determinante de uma matriz **não depende do sistema de coordenadas ortogonais positivo escolhido para efetuar o seu cálculo**.

Observação 1

- $\boxed{\overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{v}\,,\ \overrightarrow{w} \text{ *são LI* } \Longleftrightarrow [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] \neq 0 \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \neq 0}$

- $\boxed{\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\} \text{ é um terno LI positivo } \Longleftrightarrow [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] > 0 \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) > 0}$

- $\boxed{\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\} \text{ é um terno LI negativo } \Longleftrightarrow [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] < 0 \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) < 0}$

Propriedades do determinante

Sejam $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ e $\overrightarrow{w} = (x'', y'', z'')$ vetores expressos em coordenadas com respeito a um sistema ortogonal positivo $OXYZ$.

Vimos, acima, que

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) &= x''\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z'\end{vmatrix} - y''\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z'\end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y'\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{3+1}x''\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z'\end{vmatrix} + (-1)^{3+2}y''\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z'\end{vmatrix} + (-1)^{3+3}z''\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y'\end{vmatrix},\end{aligned}$$

que é a **expansão do determinante com respeito à terceira linha**.

Podemos, também, expandir o determinante com respeito à primeira linha e à segunda linha.

De fato,

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) &= [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]\\ &= x\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z''\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z''\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y''\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{1+1}x\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z''\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}y\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z''\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}z\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y''\end{vmatrix},\end{aligned}$$

que é o **desenvolvimento pela primeira linha**, e

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) &= [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = -\,[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]\\ &= -\left(x'\begin{vmatrix} y & z \\ y'' & z''\end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x & z \\ x'' & z''\end{vmatrix} + z'\begin{vmatrix} x & y \\ x'' & y''\end{vmatrix}\right)\\ &= (-1)^{2+1}x'\begin{vmatrix} y & z \\ y'' & z''\end{vmatrix} + (-1)^{2+2}y'\begin{vmatrix} x & z \\ x'' & z''\end{vmatrix} + (-1)^{2+3}z'\begin{vmatrix} x & y \\ x'' & y''\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

que é o **desenvolvimento do determinante pela segunda linha**.

No fator $(-1)^{i+j}$, das identidades acima, i indica a $i-$ésima linha e j indica a $j-$ésima coluna.

Sabendo que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, onde $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ é o determinante da matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, vamos traduzir as propriedades do produto misto em propriedades dos determinantes 3×3.

Proposição 1

Os determinantes das matrizes 3×3 satisfazem as seguintes propriedades:

1. *O sinal do determinante muda ao permutar duas linhas:*

$$\boxed{\begin{aligned}\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) &= -\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\\ \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}) &= -\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\\ \det(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) &= -\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\end{aligned}}$$

2. *O determinante de uma matriz com duas linhas iguais é igual a zero:*

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) = \det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}) = 0}$$

3. *Multiplicar uma linha por um número $\lambda\in\mathbb{R}$ equivale a multiplicar o determinante por λ.*

$$\boxed{\det(\lambda\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$$

4. *A soma dos determinantes de duas matrizes com duas filas comuns é o determinante da matriz que tem essas duas filas comuns e por terceira fila a soma das filas diferentes das matrizes das parcelas:*

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$$

5. *Critério de coplanaridade.*

$$\boxed{\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = 0 &\iff \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \text{e}\ \overrightarrow{w}\ \text{são coplanares (LD)}\\ \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) \neq 0 &\iff \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \text{e}\ \overrightarrow{w}\ \text{não são coplanares (LI)}\end{aligned}}$$

A demonstração dessa proposição segue diretamente das propriedades já conhecidas do produto misto e da identidade $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

Observação 2

(a) *Se M é uma matriz 3×3, designamos por M^T a matriz cujas linhas são as colunas de M, que é chamada a* **transposta** *da matriz M.*

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{pmatrix} \iff M^T = \begin{pmatrix} x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{pmatrix}$$

(b) *Calculando diretamente se verifica que*

$$\boxed{\det M = \det M^T}$$

Portanto, as propriedades anunciadas na proposição anterior envolvendo as linhas do determinante de uma matriz 3×3, valem também para as colunas.

(c) *Em virtude de* **(b)**, *o cálculo de um determinante pode ser feito, também, expandindo pelas colunas ao invés das filas. Por exemplo, se M é a matriz dada em* **(a)**, *o cálculo do seu determinante desenvolvendo pela primeira coluna fica:*

$$\det M = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}x \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}x' \begin{vmatrix} y & z \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}x'' \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

Exemplo 1

Calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ *desenvolvendo pela primeira linha e também, pela primeira coluna.*

Solução.

Desenvolvendo o determinante pela primeira linha, temos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(3) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 1(-2) - 2(32) + 3(28) = -2 - 64 + 84 = -2 + 20 = 18\,. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o determinante pela primeira coluna, temos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(0) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1(-2) - 4(-5) = -2 + 20 = 18\,. \quad \square \end{aligned}$$

A Regra de Cramer

Freqüentemente enfrentaremos a necesidade de resolver um sistema de três equações lineares com três variáveis. Um método "prático" para atingir tal objetivo é a **Regra de Cramer**.

Consideremos o sistema linear de três equações e três variáveis:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

A matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ é chamada a **matriz do sistema**.

A **regra de Cramer** diz que quando essa matriz tem determinante não-nulo, o sistema tem uma única solução e nos permite determiná-la.

Note que

$$\boxed{\det A \neq 0 \iff \text{as linhas de } A \text{ são LI} \iff \text{as colunas de } A \text{ são LI}}$$

Consideremos os vetores

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)\,, \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)\,, \quad \overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3).$$

Resolver o sistema acima equivale a determinar os números x, y, z tais que

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}\,.$$

Isto é, devemos achar os coeficientes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ mediante os quais o vetor $\overrightarrow{d}$ se expressa como combinação linear desses três vetores.

Aplicando as propriedades dos determinantes obtidas anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) &= \det(x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \\
&= x \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + y \det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + z \det(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\ . \\
&= x \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})
\end{aligned}$$

Portanto, se $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \neq 0$, obtemos

$$\boxed{x = \frac{\det(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}}$$

Analogamente, calculando os determinantes $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{c})$ e $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})$, obtemos,

$$\boxed{y = \frac{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}\,, \quad \text{e} \quad z = \frac{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})}{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}}$$

Exemplo 2

Verifique se o sistema abaixo possui uma única solução e, caso afirmativo, use a regra de Cramer para determiná-la.

$$\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & 2z & = & 1 \\
2x & + & 3y & + & 3z & = & 2 \\
4x & + & 4y & + & 5z & = & 3
\end{array}$$

Solução.

Sejam $\overrightarrow{a} = (1, 2, 4)$, $\overrightarrow{b} = (1, 3, 4)$, $\overrightarrow{c} = (2, 3, 5)$, e seja $\overrightarrow{d} = (1, 2, 3)$.

Calculando, temos $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -3 \neq 0$. Portanto, o sistema possui uma única solução para as variáveis x, y e z.

Como

$$\det(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0\,, \quad \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{c}) = -1\,, \quad \text{e} \quad \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = -1\,,$$

obtemos, pela regra de Cramer, que:

$$x = \frac{\det(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})} = \frac{0}{-3} = 0\,, \quad y = \frac{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{c})}{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}\,, \quad \text{e} \quad z = \frac{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})}{\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}\,,$$

é a solução do sistema. □

Exemplos de aplicações do produto vetorial e do produto misto

Vamos agora aplicar as noções de produto vetorial e produto misto para resolver situações de caráter geométrico.

Exemplo 3

Verifique se os pontos $A = (2, 2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (2, 3, 0)$ *e* $D = (2, 3, 2)$ *são coplanares.*

Solução.
Consideremos os vetores

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)\,, \quad \overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)\,.$$

Sabemos que os pontos A, B, C e D são coplanares se, e somente se, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$.

Calculando, temos:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 1, 1)\,,$$

Logo,

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (0, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle = 2 \neq 0\,.$$

Portanto, os pontos A, B, C e D não são coplanares. □

Exemplo 4

Mostre que $\left\{ \overrightarrow{u} = (1, 0, 2), \overrightarrow{v} = (2, 1, 0), \overrightarrow{w} = (1, 1, 1) \right\}$ *é um terno de vetores não coplanares (LI) positivo, e calcule o volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$.

Solução.
Sabemos que o terno de vetores é LI positivo se, e somente se, $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] > 0$. Calculando:

$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) + 2(1) = 3 > 0\,.$$

Portanto, o terno $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é LI positivo.

Além disso, o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$ cujas arestas são $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, é:

$$\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \left| \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right] \right| = |3| = 3\,.$$ □

Observação 3

No exemplo 3 calculamos o produto misto a partir da definição, isto é, calculamos o produto vetorial dos primeiros dois fatores para depois fazer o produto interno do vetor resultante com o terceiro fator. Esse procedimento é **mais seguro** *e reduz a probabilidade de erro nos cálculos quando se tem pouca prática no cálculo de determinantes de matrizes* 3×3*, sendo, por isso, mais recomendado.*

Exemplo 5

Determine os valores de $t \in \mathbb{R}$ *para os quais os vetores* $\overrightarrow{u} = (2, 0, t)$ *e* $\overrightarrow{v} = (t, 0, 2)$ *sejam colineares.*

Solução.

Sabemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares se, e somente se, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Calculando, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & 0 & t \\ t & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ t & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\
&= 0\,\overrightarrow{e_1} - (4 - t^2)\,\overrightarrow{e_2} + 0\,\overrightarrow{e_3} \\
&= (t^2 - 4)\,\overrightarrow{e_2}\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, t^2 - 4, 0) = (0, 0, 0) = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $t^2 - 4 = 0$, ou seja, se, e somente se, $t = 2$ ou $t = -2$. $\square$

Exemplo 6

Determine, caso existam, os valores de $t \in \mathbb{R}$ *para que os vetores* $\overrightarrow{u} = (t, -1, 1)$*,* $\overrightarrow{v} = (1, t, 2)$ *e* $\overrightarrow{w} = (3, t, 1)$ *sejam coplanares.*

Solução.

Sabemos que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares se, e somente se, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$. Então:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} t & -1 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 3 & t & 1 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t & 2 \\ t & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & t \\ 3 & t \end{vmatrix} = t(-t) + (-5) + (-2t) = -t^2 - 5 - 2t\,.$$

Logo $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$ se, e somente se, $t^2 + 5 + 2t = 0$. Ou seja, se, e somente se, $t^2 + 2t + 5 = 0$.

Como o discriminante dessa última equação é $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, a equação não tem raízes reais, isto é, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI para todos os valores reais de t. $\square$

O seguinte exemplo mostra a fórmula do **triplo produto vetorial**.

Exemplo 7

Mostre que, para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vale:

$$\boxed{(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \, \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \, \overrightarrow{u}}$$

Solução.

Com respeito a um sistema ortogonal positivo de coordenadas $OXYZ$, escrevemos

$$\overrightarrow{u} = (x, y, z)\,, \quad \overrightarrow{v} = (x', y', z') \quad \text{e} \quad \overrightarrow{w} = (x'', y'', z'')\,.$$

Como

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy', -xz' + zx', xy' - yx')\,,$$

obtemos:

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ yz' - zy' & -xz' + zx' & xy' - yx' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= (\, (-xz' + zx')z'' - (xy' - yx')y'', -(yz' - zy')z'' + (xy' - yx')x'', (yz' - zy')y'' - (-xz' + zx')x''\,)$$

$$= (\, -xz'z'' + zx'z'' - xy'y'' + yx'y'', -yz'z'' + zy'z'' + xy'x'' - yx'x'', yz'y'' - zy'y'' + xz'x'' - zx'x''\,)$$

$$= (\, (yy'' + zz'')x' - (y'y'' + z'z'')x, (xx'' + zz'')y' - (x'x'' + z'z'')y, (xx'' + yy'')z' - (y'y'' + x'x'')z\,)\,.$$

Vamos calcular agora o lado direito da identidade:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \, \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \, \overrightarrow{u} &= (xx'' + yy'' + zz'')\,(x', y', z') - (x'x'' + y'y'' + z'z'')\,(x, y, z) \\ &= (\, xx''x' + (yy'' + zz'')x', yy''y' + (xx'' + zz'')y', zz''z' + (xx'' + yy'')z'\,) \\ &- (\, x'x''x + (y'y'' + z'z'')x, y'y''y + (x'x'' + z'z'')y, z'z''z + (x'x'' + y'y'')z\,) \\ &= (\,(yy'' + zz'')x' - (y'y'' + z'z'')x, (xx'' + zz'')y' - (x'x'' + z'z'')y, \\ &\quad (xx'' + yy'')z' - (y'y'' + x'x'')z\,)\,. \end{aligned}$$

Comparando as expressões obtidas acima, concluímos a veracidade da identidade proposta. □

Observação 4

É importante observar que **o produto vetorial não é associativo** *como mostra o seguinte exemplo.*

Exemplo 8

Sejam $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 2)$ *e* $\overrightarrow{w} = (1, 0, 0)$. *Mostre que*

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\,.$$

Solução.
Sendo:

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}$$
$$= 4\,\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-2\,\overrightarrow{e_3} = (4,1,-2)\,,$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ 4 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}$$
$$= -2\,\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3} = (0,-2,-1)\,.$$

e

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}$$
$$= 2\,\overrightarrow{e_2} = (0,2,0)\,,$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}$$
$$= -6\,\overrightarrow{e_1}+2\,\overrightarrow{e_3} = (-6,0,2)\,,$$

obtemos que $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$. □

Exemplo 9

Sejam os pontos $P=(1,2,0)$, $Q=(3,1,1)$ *e* $R=(1,-1,1)$, *e os vetores* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OQ}$ *e* $\overrightarrow{w}=OR$.

(a) *Determine a altura relativa à base de lados* OP *e* OQ *do paralelepípedo* $\mathcal{P}$ *que tem por vértices* O, P, Q *e* R.

(b) *Calcule a área do triângulo* $\mathcal{T}$ *de vértices* P, Q *e* R.

(c) *Calcule o volume do paralelepípedo* $\mathcal{P}$.

(c) *Calcule a área externa do tetraedro* σ *cujos vértices são* O, P, Q *e* R.

Solução.
(a) A altura h do paralelepípedo $\mathcal{P}$ tomando como base o paralelogramo de lados adjacentes OP e OQ é

$$h=\|\overrightarrow{w}\|\,\left|\cos\angle(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\right| = \|\overrightarrow{w}\|\,\frac{|\langle\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|\langle\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|}\,,$$

onde

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3} = (2,-1,-5)\,,$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}\,,\\ \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle &= \langle (2,-1,-5),(1,-1,1)\rangle = 2+1-5 = -2\,.\end{aligned}$$

Assim, $h = \dfrac{|-2|}{\sqrt{30}} = \dfrac{2}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

(b) O triângulo $\mathcal{T}$ tem por arestas adjacentes os segmentos PQ e PR. Logo a sua área é

$$\text{Área}\,(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|\,.$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,1)$ e $\overrightarrow{PR} = (0,-3,1)$, temos:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_3} = (2,-2,6)\,.$$

Assim, $\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4+4+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$, e, portanto,

$$\text{Área}\,(\mathcal{T}) = \sqrt{11}\,.$$

(c) Como calculado no item **(a)**,

$$\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \left|\, [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\, \right| = \left| \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \right| = |-2| = 2\,.$$

(d) A área externa do tetraedro σ de vértices O, P, Q e R é a soma das áreas dos triângulos $\triangle OPQ$, $\triangle OPR$, $\triangle OQR$ e $\triangle PQR = \mathcal{T}$, a última das quais calculamos no item **(b)**.

Calculemos as áreas dos outros três triângulos:

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(\triangle OPQ) &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{30}\,;\\ \text{Área}\,(\triangle OPR) &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}\|\,;\\ \text{Área}\,(\triangle OQR) &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\|\,.\end{aligned}$$

Como

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_3} = (2,-1,-3)\,,$
- $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_3} = (2,-2,-4)\,,$

temos:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}\,;\\ \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\,.\end{aligned}$$

Logo:

- $\text{Área}\,(\triangle OPR) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{14}$;
- $\text{Área}\,(\triangle OQR) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$.

Finalmente, a área do tetraedro σ é

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(\sigma) &= \text{Área}\,(\triangle OPQ) + \text{Área}\,(\triangle OPR) + \text{Área}\,(\triangle OQR) + \text{Área}\,(\triangle PQR)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{1}{2}\sqrt{14} + \frac{1}{2}\sqrt{24} + \frac{1}{2}\sqrt{44}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{30}+\sqrt{14}+\sqrt{24}+\sqrt{44}\right). \quad \square\end{aligned}$$

Equação do plano que passa por três pontos não colineares dados

Sabemos que um plano fica completamente determinado quando conhecemos um ponto nele contido e um vetor normal a ele.

Sabendo que o plano π passa por três pontos não colineares A, B e C, e considerando os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, temos que o vetor $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ é perpendicular ao plano π, ou seja, π é o plano que passa pelo ponto A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$.

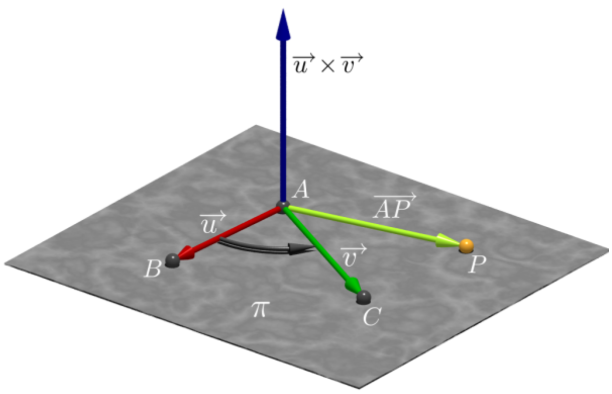

Fig. 1: Plano π passando por A, B e C.

Então $P\in\pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$, isto é

$$P\in\pi \iff \langle\overrightarrow{AP}, u\times\overrightarrow{v}\rangle = 0 \iff \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] = 0,$$

ou seja,

$$\boxed{P\in\pi \quad\iff\quad \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] = 0}$$

Consideremos um sistema ortogonal positivo de coordenadas $OXYZ$ e sejam:

$$A = (x_0,y_0,z_0)\,,\quad B = (x_1,y_1,z_1)\,,\quad C = (x_2,y_2,z_2)\,,\ \text{e}\ P = (x,y,z)\,.$$

Considere, também, as coordenadas dos vetores não-colineares e paralelos ao plano π:

$$\overrightarrow{u} = (a,b,c) = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)\,,\ \text{e}\ \overrightarrow{v} = (a',b',c') = (x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0)\,.$$

Temos que a equação de π é:

$$\pi : \langle\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rangle = 0 \qquad \text{ou} \qquad \pi : \langle\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\rangle = 0\,.$$

Ou seja,

$$\pi : \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] = 0\,.$$

Isto é,

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0\,,$$

Exemplo 10

Determinar a equação do plano π *que passa por* $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ *e* $C = (0, 2, 0)$.

Solução.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 0, -1)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$.

Temos que $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, $\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = 0$, isto é, se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} (y-1) + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} (z-1) = x - 1 + y - 1 = 0$$

Logo $\pi : x + y = 2$ é a equação cartesiana do plano π. □

Observe, no exemplo anterior, que o cálculo do determinante poderia ter sido feito desenvolvendo pela segunda linha, o que facilitaria os cálculos.