Aula 16

Nesta aula apresentamos uma série de exemplos e aplicações dos conceitos vistos.

1. Exemplos e aplicações

Exemplo 1

Considere os pontos $A = (1, 2, 2)$*,* $B = (2, 4, 3)$*,* $C = (-1, 4, 2)$*,* $D = (7, 1, 3)$ *e* $E = (-4, 16, 5)$*.*

(a) *Mostre que* A*,* B *e* C *não são colineares.*

(b) *Determine a equação paramétrica e a equação cartesiana do plano* π *que contém os pontos* A*,* B *e* C*.*

(c) *Determine a área do paralelogramo que possui* A*,* B *e* C *como vértices.*

(d) *Mostre que* A*,* B*,* C *e* D *não são coplanares.*

(e) *Escreva o vetor* $\overrightarrow{AE}$ *como combinação linear de* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$*.*

(f) *Determine o volume do paralelepípedo de vértices* A*,* B*,* C *e* D*.*

(g) *Determine a equação da esfera de centro* D *que é tangente ao plano* π*.*

(h) *Determine a distância do ponto* D *à reta que passa pelos pontos* A *e* B*.*

(i) *Determine o ponto simétrico do ponto* C *em relação à reta que passa pelos pontos* A *e* B*.*

(j) *Determine a intersecção da reta que passa por* A *e* B *com a reta* $\ell = \{(7t-7, t-1, 2t-1); t \in \mathbb{R}\}$*.*

Solução.

(a) Sabemos que:

$$A, B \text{ e } C \text{ são não-colineares} \iff \overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AC} \text{ não são múltiplos} \iff \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}.$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$ e

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, -2, 6) \neq (0, 0, 0) = \overrightarrow{0},$$

concluímos que A, B e C são não-colineares.

(b) Temos $\pi = \{A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \,|\, t, s \in \mathbb{R}\}$, ou seja, as equações paramétricas de π são:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 2 + 2t + 2s \; ; \; t, s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Para determinar a equação cartesiana de π, sabemos que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 6)$ é perpendicular a π. Logo $\pi \perp (1, 1, -3)$ e a equação cartesiana de π tem a forma

$$\pi : x + y - 3z = d\,,$$

onde d é calculado sabendo que $A = (1, 2, 2) \in \pi$:

$$d = 1 + 2 - 3(2) = -3\,.$$

Portanto, a equação cartesiana de π é

$$\pi : x + y - 3z = -3\,.$$

(c) Seja $\mathcal{R}$ o paralelogramo que possui A, B e C como vértices. Então,

$$\text{Área}\,(\mathcal{R}) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\,(-2, -2, 6)\,\| = \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\,.$$

(d) Sabemos que:

$$A,\ B,\ C \text{ e } D \text{ são não-coplanares} \iff \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AD} \text{ são LI} \iff \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \neq 0.$$

Como $\overrightarrow{AD} = (6, -1, 1)$, e

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, -2, 6), (6, -1, 1) \rangle = -12 + 2 + 6 = -4 \neq 0\,,$$

concluímos que A, B, C e D não são coplanares.

(e) Temos que $\overrightarrow{AE} = (-5, 14, 3)$. Devemos achar números reais x e y, tais que

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Ou seja,

$$(-5, 14, 3) = x(1, 2, 1) + y(-2, 2, 0)\,.$$

Igualando as coordenadas, temos:

$$\begin{cases} -5 = x - 2y \\ 14 = 2x + 2y \\ 3 = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2y = 5 + x = 5 + 3 = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Observe que os valores encontrados são compatíveis com a segunda equação: $2x + 2y = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14$.

Portanto, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ e, em particular, $E \in \pi$.

(f) Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem os pontos A, B, C e D por vértices. Então:

$$\text{Volume}\,(\mathcal{P}) = \left|\,\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\,\right| = |-4| = 4\,.$$

(g) Para determinar a esfera $\mathcal{S}$, conhecendo o centro $D = (7, 1, 3)$, basta calcular o seu raio ρ.

Como $\mathcal{S}$ é tangente a π, temos que $\rho = d(D, \pi)$. Isto é,

$$\rho = d(D,\pi) = \frac{|7+1-3(3)+3|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Portanto, $\mathcal{S} : (x-7)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{4}{11}$.

(h) A reta r que passa por A e B é

$$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2+2s \ ; \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = 2+s \end{cases}$$

Seja $M = (1+s, 2+2s, 2+s) \in r$ o pé da perpendicular baixada do ponto $D = (7,1,3)$ sobre a reta r.

Devemos achar o valor $s \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB}$. Isto é, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM} \rangle = 0$, onde $\overrightarrow{DM} = (s-6, 2s+1, s-1)$.

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM} \rangle = & \ \langle (1,2,1), (s-6, 2s+1, s-1) \rangle = 0 \\ \iff & \ s-6+2(2s+1)+s-1 = 0 \\ \iff & \ 2s-7+4s+2 = 0 \\ \iff & \ 6s = 5 \quad \iff \quad \boxed{s = \frac{5}{6}} \end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{DM} = \left(\dfrac{5}{6} - 6, 2\cdot\dfrac{5}{6} + 1, \dfrac{5}{6} - 1\right) = \left(-\dfrac{31}{6}, \dfrac{16}{6}, -\dfrac{1}{6}\right)$.

Logo $d(D,r) = d(D,M) = \|\overrightarrow{DM}\| = \dfrac{1}{6}\sqrt{31^2+16^2+1^2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{1218}$.

(i) Seja $N = (1+s, 2+2s, 2+s) \in r$ o pé da perpendicular baixada do ponto $C = (-1,4,2)$ sobre a reta r.

Determinar o ponto N significa achar o valor $s \in \mathbb{R}$,tal que $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$, ou seja, $\langle \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$.

Como $\overrightarrow{CN} = (s+2, 2s-2, s)$ e $\overrightarrow{AB} = (1,2,1)$, temos:

$$\langle \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle (s+2, 2s-2, s), (1,2,1) \rangle = s+2+2(2s-2)+s = 6s-2 = 0 \quad \iff \quad \boxed{s = \frac{1}{3}}.$$

Logo $N = \left(1+\dfrac{1}{3}, 2+2\cdot\dfrac{1}{3}, 2+\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

Seja C' o simétrico de C em relação à reta r. Como $N = \dfrac{1}{2}(C+C')$, temos que:

$$C' = 2N - C = 2\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (-1,4,2) = \left(\frac{8}{3}+1, \frac{16}{3}-4, \frac{14}{3}-2\right).$$

Portanto, $C' = \left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

(j) Para determinar a intersecção das retas

$$r = \{(1+s, 2+2s, 2+s) \mid s \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \ell = \{(7t-7, t-1, 2t-1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

devemos resolver o sistema obtido igualando as coordenadas dos pontos de r e de ℓ:

$$r \cap \ell : \begin{cases} 1+s = 7t-7 \\ 2+2s = t-1 \\ 2+s = 2t-1 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do dobro da terceira, obtemos:

$$\begin{array}{rl} & 4+2s = 4t-2 \\ - & 2+2s = t-1 \\ \hline & 2 \qquad = 3t-1 \end{array}$$

Ou seja, $t = 1$. Substituindo esse valor na terceira equação, obtemos $s = 2t-3 = 2(1)-3 = -1$.

Conferindo na primeira equação: $1+s = 1+(-1) = 0 = 7(1)-7 = 7t-7$.

Então, $r \cap \ell = \{(0,0,1)\}$. $\square$

Exemplo 2

Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{17}$ que contêm os pontos $A = (2,3,1)$ e $B = (4,1,3)$, com centro no plano $\pi : 2x+y+z = 3$.

Solução.

O centro das esferas procuradas deve ser um ponto eqüidistante de A e B. Seja $\overline{\pi}$ o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B. Isto é,

$$\overline{\pi} = \{P \mid d(P,A) = d(P,B)\}$$

é o plano que passa pelo ponto médio $M = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}(6,4,4) = (3,2,2)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} = (2,-2,2)$, ou seja, $\pi \perp (1,-1,1)$.

Assim, a equação de $\overline{\pi}$ é da forma $x-y+z = d$, onde d se calcula sabendo que $M \in \overline{\pi}$. Logo $d = 3-2+2 = 3$ e

$$\overline{\pi} : x-y+z = 3\,.$$

Então o centro C das esferas procuradas deve pertencer à reta $r = \pi \cap \overline{\pi}$. Determinemos a reta r:

$$r : \begin{cases} x-y+z = 3 \\ 2x+y+z = 3\,. \end{cases}$$

Como $r \perp \overrightarrow{v} = (1,-1,1)$ e $r \perp \overrightarrow{w} = (2,1,1)$, temos $r \parallel \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (-2,1,3)$. Além disso, $P = (0,0,3) \in r$.

Portanto, $r = \{(-2t, t, 3t+3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Sendo $C \in r$, temos $C = (-2t, t, 3t+3)$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Como $d(C, A)^2 = 17$,

$$(-2t-2)^2 + (t-3)^2 + (3t+2)^2 = 17\,.$$

Desenvolvendo os binômios do lado esquerdo dessa identidade, obtemos:

$$4t^2 + 8t + 4 + t^2 - 6t + 9 + 9t^2 + 12t + 4 = 17 \Longrightarrow 14t^2 + 14t = 0 \Longrightarrow t(t+1) = 0$$

Portanto, $t = 0$ ou $t = -1$.

Para $t = 0$, obtemos o centro $C_1 = (0, 0, 3)$ e a esfera $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 17$.

Para $t = -1$, obtemos o centro $C_2 = (2, -1, 0)$ e a esfera $\mathcal{S}_2 : (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 17$. □

Exemplo 3

Considere os planos

$$\pi_1 : mx - ny + z = 2 \qquad e \qquad \pi_2 : nx - my + nz = 4,$$

onde $m, n \in \mathbb{R}$.

(a) *Determine* $m, n \in \mathbb{R}$ *de modo que* π_1 *e* π_2 *sejam paralelos.*

(b) *Determine* $m, n \in \mathbb{R}$ *de modo que* $\pi_1 \cap \pi_2$ *seja uma reta perpendicular ao vetor* $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$ *que passa pelo ponto* $A = (0, 0, 2)$.

Solução.

(a) Das equações dos planos, temos: $\overrightarrow{v_1} = (m, -n, 1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (n, -m, n) \perp \pi_2$.

Logo $\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são colineares $\Longleftrightarrow \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$.

Isto é, se, e somente se,

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} -n & 1 \\ -m & n \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m & 1 \\ n & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -n \\ n & -m \end{vmatrix} \right) = (-n^2 + m, -mn + n, -m^2 + n^2) = (0, 0, 0)$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -n^2 + m = 0 \\ -nm + n - 0 \\ -m^2 + n^2 = 0\,. \end{cases}$$

Da terceira identidade, obtemos $n^2 = m^2$, ou seja, $n = \pm m$. Substituindo na primeira identidade, temos $-m^2 + m = 0$, isto é, $m(-m+1) = 0$ e, portanto, $m = 0$ ou $m = 1$.

Se $m = 0$, temos $n = m = 0$ e o vetor $\overrightarrow{v_2}$ seria o vetor nulo, uma contradição.

Assim, devemos ter, necessariamente, $m = 1$ e, portanto, $n = \pm 1$.

As soluções são: $\begin{cases} m = 1 \quad \text{e} \quad n = 1; \\ m = 1 \quad \text{e} \quad n = -1. \end{cases}$

(b) Seja $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Como $A = (0, 0, 2) \in r$, temos $A \in \pi_1$ e $A \in \pi_2$.

Em particular, $A \in \pi_2 \Longrightarrow n \cdot 0 + m \cdot 0 + n \cdot 2 = 4 \Longrightarrow n = 2$.

Logo $\overrightarrow{v}_1 = (m, -2, 1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (2, -m, 2) \perp \pi_2$.

Como $r \perp \overrightarrow{v_1}$ e $r \perp \overrightarrow{v_2}$, temos $r \parallel \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, onde:

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -m & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -2 \\ 2 & -m \end{vmatrix} \right) = (-4 + m, -2m + 2, -m^2 + 4)$$

Como também $r \perp \overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$, devemos ter $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \rangle = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \rangle \\ &= \langle (2, 1, -1), (-4 + m, -2m + 2, -m^2 + 4) \rangle \\ &= -8 + 2m - 2m + 2 + m^2 - 4 \\ &= m^2 - 10\,. \end{aligned}$$

Portanto, $m = \pm\sqrt{10}$. $\square$

Exemplo 4

Determine as equações paramétricas das retas paralelas ao plano $\pi_1 : x + 3y - z = 3$, contidas no plano $\pi_2 : 2x + y + z = 5$, que distam $\sqrt{300}$ da reta $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$.

Solução.

Sejam $\overrightarrow{v_1} = (1, 3, -1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, 1) \perp \pi_2$.

Seja r uma reta contida em π_2 e paralela ao plano π_1. Então $r \parallel \ell = \pi_1 \cap \pi_2$.

Como $\ell \perp \overrightarrow{v_1}$ e $\ell \perp \overrightarrow{v_2}$, devemos ter $\ell \parallel \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, onde:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4, -3, -5)\,.$$

Esse vetor é a direção da reta ℓ. Determinemos um ponto $A \in \ell$.

Sabemos que

$$\ell = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

Fazendo $x = 0$ nessas equações, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3y - z = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos $4y = 8$, ou seja, $y = 2$. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $2 + z = 5 \Longrightarrow z = 3$.

Portanto, $A = (0, 2, 3) \in \ell$.

Seja, agora, $\overline{\ell}$ a reta perpendicular a ℓ, passando pelo ponto A, e contida no plano π_2.

Como $\overline{\ell} \subset \pi_2$, temos $\overline{\ell} \perp \overrightarrow{v_2}$, e, como $\overline{\ell} \perp \ell$, temos $\overline{\ell} \perp \overrightarrow{v}$.

Portanto $\overline{\ell} \parallel \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v}$, onde

$$\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-2, 14, -10) \parallel \overrightarrow{w} = (-1, 7, -5)\,.$$

Assim, $\overline{\ell} = \{(-t, 2+7t, 3-5t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Na reta $\overline{\ell}$ determinemos os pontos que estão a uma distância de $\sqrt{300}$ do ponto A.

Seja $P = (-t, 2+7t, 3-5t) \in \overline{\ell}$ tal que $d(P,A)^2 = 300$.

Temos

$$d(P,A)^2 = (-t)^2 + (2+7t-2)^2 + (3-5t-3)^2 = t^2 + 49t^2 + 25t^2 = 75t^2 = 300\,.$$

Logo $t^2 = \dfrac{300}{75} = 4$ e, portanto, $t = \pm 2$.

Substituindo esses valores de t na expressão do ponto P, obtemos os pontos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-2, 2+7\cdot 2, 3-5\cdot 2) = (-2, 16, -7) \\ P_2 &= (-(-2), 2+7\cdot(-2), 3-5\cdot(-2)) = (2, -12, 13)\,. \end{aligned}$$

As retas procuradas são paralelas à reta ℓ, e, portanto, ao vetor $\overrightarrow{v} = (4, -3, -5)$, e passam pelos pontos P_1 e P_2. Essas retas são:

$$\begin{aligned} r_1 &: \{(-2+4t, 16-3t, -7-5t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,, \\ r_2 &: \{(2+4t, -12-3t, 13-5t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5

Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t+3 \\ y = t+4 \\ z = -t-1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \qquad \textit{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = s+4 \\ y = -s \\ z = -3s-1 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

(a) *Mostre que r_1 e r_2 são reversas.*

(b) *Determine a reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.*

(c) *Determine o plano π tal que $d(\pi, r_1) = \dfrac{1}{3}\, d(r_1, r_2)$ e $d(\pi, r_2) = \dfrac{2}{3}\, d(r_1, r_2)$.*

Solução.

(a) Temos que $r_1 \parallel \overrightarrow{v_1} = (1, 1, -1)$ e $r_2 \parallel \overrightarrow{v_2} = (1, -1, -3)$.

As retas r_1 e r_2 são reversas, pois:

A. $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ não são colineares.

De fato,

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -2) \neq (0, 0, 0)\,.$$

B. $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

De fato,

$$\begin{cases} t+3 &= s+4 \\ t+4 &= -s \\ -t-1 &= -3s-1 \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos $2t+7=4 \Longrightarrow t=-\frac{3}{2}$.

Substituindo na segunda equação, $-s=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2} \Longrightarrow s=-\frac{5}{2}$.

No entanto, substituindo $t=-\frac{3}{2}$ e $s=-\frac{5}{2}$ em ambos os lados da terceira equação, vemos que

$$-t-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2} \quad \text{e } -3s-1=-3\left(-\frac{5}{2}\right)-1=\frac{13}{2}\,.$$

Como esses números são diferentes, concluímos que o sistema não tem solução. Isto é, nenhum ponto de r_1 pertence a r_2 e vice-versa. Ou seja, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

Portanto, r_1 e r_2 são retas reversas.

(b) Vamos determinar números $t, s \in \mathbb{R}$ de modo que $P_1=(t+3, t+4, -t-1) \in r_1$ e $P_2=(s+4, -s, -3s-1)$ satisfazem:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{v_1}\,, \qquad \overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{v_2}\,,$$

onde $\overrightarrow{P_1P_2}=(s+4-t-3, -s-t-4, -3s-1+t+1)=(s-t+1, -s-t-4, -3s+t)$.

Logo

- $$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle &= \langle (s-t+1, -s-t-4, -3s+t), (1,1,-1) \rangle = 0 \\ \Longleftrightarrow &\quad s-t+1-s-t-4+3s-t=0 \\ \Longleftrightarrow &\quad 3s-3t=3 \Longleftrightarrow s-t=1\,, \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle &= \langle (s-t+1, -s-t-4, -3s+t), (1,-1,-3) \rangle = 0 \\ \Longleftrightarrow &\quad s-t+1+s+t+4+9s-3t=0 \\ \Longleftrightarrow &\quad 11s-3t=-5\,. \end{aligned}$$

Temos, então, o sistema:

$$\begin{cases} s-t=1 \\ 11s-3t=-5 \end{cases}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} -11s+11t=-11 \\ 11s-3t=-5 \end{cases}$$

Somando essas equações, obtemos: $8t=-16$, ou seja $t=-2$.

Substituindo $t=-2$ na primeira equação, obtemos $s-(-2)=1$, isto é, $s=-1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} P_1 &= (t+3, t+4, -t-1) = (-2+3, -2+4, 1) = (1,2,1)\,, \\ P_2 &= (s+4, -s, -3s-1) = (-1+4, -(-1), -3(-1)-1) = (3,1,2)\,, \\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (2,-1,1)\,. \end{aligned}$$

Logo

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

é a única reta que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

(c) Como $d(r_1, r_2) = d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, temos que $d(\pi, r_1) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ e $d(\pi, r_2) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Então, $\pi \parallel r_1$ e $\pi \parallel r_2$, pois $d(\pi, r_1) \neq 0$ e $d(\pi, r_1) \neq 0$.

Logo $\pi \perp \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -2) \parallel (-2, 1, -1)$.

Isto é, $\pi : 2x - y + z = d$.

Como,

- $d(\pi, r_1) = d(P_1, \pi) = \dfrac{|2 - 2 + 1 - d|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow |d - 1| = \dfrac{6}{3} = 2 \Longrightarrow d - 1 = \pm 2 \Longrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ \text{ou} \\ d = -1 \end{cases}$,
- $d(\pi, r_2) = d(P_2, \pi) = \dfrac{|6 - 1 + 2 - d|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow |d - 7| = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = 4 \Longrightarrow d - 7 = \pm 4 \Longrightarrow \begin{cases} d = 11 \\ \text{ou} \\ d = 3 \end{cases}$,

concluímos que $d = 3$ e, portanto, $\pi : 2x - y + z = 3$. □

Exemplo 6

Considere os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 2, 2)$ *e* $C = (4, 5, 3)$, *e a reta*

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z - 1 .$$

(a) *Determine a equação cartesiana do plano* π *que contém os pontos* A, B *e* C.

(b) *Mostre que a reta* r *é paralela ao plano* π.

(c) *Calcule* $d(r, \pi)$

Solução.

(a) Como $A, B, C \in \pi$, temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (3, 4, 1)$ são vetores paralelos ao plano π. Logo

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, 5)$$

é perpendicular ao plano π.

Assim, $\pi : x - 2y + 5z = d$, onde $d = 1 - 2 + 10 = 9$, pois $A = (1, 1, 2) \in \pi$. Isto é,

$$\pi : x - 2y + 5z = 9.$$

(b) Como $r \parallel \overrightarrow{v} = (3, 4, 1)$, $\pi \perp \overrightarrow{w} = (1, -2, 5)$ e $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 3 - 8 + 5 = 0$, temos que

$$r \parallel \pi \quad \text{ou} \quad r \subset \pi.$$

Para mostrar que $r \parallel \pi$, basta verificar que o ponto $P = (1, 2, 1) \in r$ não pertence ao plano π.

De fato, substituindo as coordenadas de P na equação do plano π, obtemos:

$$1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 2 \neq 9 \quad \Longrightarrow \quad P \notin \pi\,.$$

(c) Calculando, temos: $d(r, \pi) = d(P, \pi) = \dfrac{|1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 25}} = \dfrac{7}{\sqrt{30}}$. □

Exemplo 7

Considere a esfera

$$\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25\,.$$

(a) *Determine os centros dos círculos de raio* 4*, contidas em* $\mathcal{S}$*, com centro sobre a reta*

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = -t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(b) *Determine, também, os planos que contêm os círculos encontradas no item anterior.*

Solução.

(a) A esfera $\mathcal{S}$ tem centro $C = (1, -2, -3)$ e raio $R = 5$.

Seja $A = (2t + 1, t - 2, -t) \in r$ o centro de um círculo de raio 4 contida em $\mathcal{S}$.

Então,

$$\begin{aligned}
d(C, A) &= \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \\
\Longleftrightarrow\ & d(C, A)^2 = 9 \\
\Longleftrightarrow\ & (2t + 1 - 1)^2 + (t - 2 + 2)^2 + (-t + 3)^2 = 9 \\
\Longleftrightarrow\ & 4t^2 + t^2 + t^2 - 6t + 9 = 9 \\
\Longleftrightarrow\ & 6t^2 - 6t = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 6t(t - 1) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & t = 1 \quad \text{ou} \quad t = 0\,.
\end{aligned}$$

Substituindo esses valores de t na expressão do ponto A, obtemos que:

$$A = A_1 = (3, -1, -1) \quad \text{e } A = A_2 = (1, -2, 0)$$

são os centros dos círculos de raio 4 contidas em $\mathcal{S}$ com centro sobre a reta r.

(b) Seja $\mathcal{C}_1$ o círculo de centro $A_1 = (3, -1, -1)$ e raio 4.

Como $\overrightarrow{A_1C} = (-2, -1, -2)$ é perpendicular ao plano π_1 que contém $\mathcal{C}_1$, temos que:

$$\pi_1 : 2x + y + 2z = 6 - 1 - 2 = 3, \text{ já que } A_1 \in \pi_1.$$

Seja $\mathcal{C}_2$ o círculo de centro $A_2 = (1, -2, 0)$ e raio 4.

Como $\overrightarrow{A_2C} = (0, 0, -3)$ é perpendicular ao plano π_2 que contém $\mathcal{C}_2$, temos que $\pi_2 : z = 0$, já que $A_2 = (1, -2, 0) \in \pi_2$. □