Aula 17

Nesta aula continuamos com mais exemplos e aplicações dos conceitos vistos.

1. Exemplos e aplicações - continuação

Exemplo 8

Considere o plano $\pi : -x + y + z = 3$ *e a reta* r *paralela ao vetor* $\overrightarrow{v} = (-1, 2, 1)$ *que passa pelo ponto* $A = (1, 2, 1)$. *Determine as equações das esferas de raio* $\sqrt{5}$ *que são tangentes à reta* r *no ponto* A, *com centro* $C \in \pi$.

Solução.

Seja $\mathcal{S}$ uma das esferas procuradas e seja $C = (x, y, z)$ o centro da esfera $\mathcal{S}$.

Como r é tangente a $\mathcal{S}$ no ponto A, temos que $\overrightarrow{AC} = (x-1, y-2, z-1) \perp \overrightarrow{v} = (-1, 2, 1)$. Logo:

$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{v} \rangle = -x + 1 + 2y - 4 + z - 1 = -x + 2y + z - 4 = 0 \Longrightarrow -x + 2y + z = 4\,.$$

Isto é, $C \in \overline{\pi} : -x + 2y + z = 4$ e, portanto, C pertence à reta $\ell = \pi \cap \overline{\pi}$.

Determinemos a reta ℓ.

Como ℓ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 1)$, normal ao plano π, e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (-1, 2, 1)$, normal ao plano $\overline{\pi}$, temos que

$$\ell \parallel \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-1, 0, -1) \parallel (1, 0, 1)$$

Para determinar um ponto de ℓ, tomamos $x = 0$ nas equações de π e $\overline{\pi}$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} y + z = 3 \\ 2y + z = 4\,. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $y = 1$. Substituindo o valor $y = 1$ na primeira equação, obtemos $z = 2$.

Portanto, $P = (0, 1, 2) \in \ell$ e $\ell = \{(t, 1, t + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Assim, como $C \in \ell$, temos $C = (t, 1, t+2)$, para algum valor $t \in \mathbb{R}$, que determinaremos sabendo que $d(C, A)^2 = 5$:

$$\begin{aligned} d(C,A)^2 &= (t-1)^2 + (1-2)^2 + (t+2-1)^2 = t^2 - 2t + 1 + 1 + t^2 + 2t + 1 = 2t^2 + 3 = 5 \\ &\Longrightarrow \quad t^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = \pm 1\,. \end{aligned}$$

Para $t = 1$, obtemos $C = C_1 = (1, 1, 3)$ e a esfera $\mathcal{S}_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5$.

Para $t = -1$, obtemos $C = C_2 = (-1, 1, 1)$ e a esfera $\mathcal{S}_2 : (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$. □

Exemplo 9

Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases} \qquad e \qquad r_2 : x = y - 1 = z - 2\,.$$

(a) *Mostre que* r_1 *e* r_2 *são paralelas.*

(b) *Determine a equação cartesiana do plano que contém as retas* r_1 *e* r_2*.*

(c) *Calcule* $d(r_1, r_2)$.

Solução.

(a) Basta mostrar que as retas r_1 e r_2 são paralelas a uma mesma direção e que um ponto de uma das retas não pertence à outra.

Como $r_1 = \pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1 : 2x - y - z = 8$ e $\pi_2 : -x + y = -4$, temos que $r_1 \perp \overrightarrow{v_1} = (2, -1, -1)$ e $r_1 \perp \overrightarrow{v_2} = (-1, 1, 0)$.

Logo $r_1 \parallel \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, onde:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, 1)\,.$$

Da forma simétrica da equação de r_2, vemos que, também, $r_2 \parallel \overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.

Portanto, $r_1 \parallel r_2$ ou $r_1 = r_2$.

Determinemos um ponto $A \in r_1$.

Tomando $y = 0$ nas equações dos planos que definem r_1 obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - z = 8 \\ -x = -4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 4 \text{ e } z = 2 \cdot 4 - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = (4, 0, 0) \in r_1\,.$$

Para mostrar que $r_1 \parallel r_2$ vamos verificar que $A \notin r_2$. De fato, substituindo as coordenadas de A na equação de r_2, obtemos a identidade impossível $4 = 0 - 1 = 0 - 2$.

Logo $A \notin r_2$ e, portanto, $r_1 \parallel r_2$.

(b) Para determinar a equação cartesiana do plano π que contém as retas r_1 e r_2 devemos conhecer um ponto de π e um vetor perpendicular a π.

Como $r_1 \subset \pi$ e $A = (4, 0, 0) \in r_1$, obtemos que $A \in \pi$.

Também, como $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$ é um vetor paralelo a r_1 e a r_2, obtemos $\overrightarrow{v} \parallel \pi$.

Já que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$, se $B \in r_2$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor paralelo a π que não é colinear com $\overrightarrow{v}$.

Tomando $x = 0$ na equação de r_2, obtemos $y - 1 = 0$ e $z - 2 = 0$, ou seja, $y = 1$ e $z = 2$. Isto é, $B = (0,1,2) \in r_2$ e, portanto, $\overrightarrow{AB} = (-4,1,2) \parallel \pi$.

Como $\pi \parallel \overrightarrow{v}$ e $\pi \parallel \overrightarrow{AB}$, concluímos que $\pi \perp \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{AB}$, onde:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1,-6,5)\,.$$

Portanto, $\pi : x - 6y + 5z = d$, onde $d = 4 - 6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 4$, pois $A = (4,0,0) \in \pi$. Assim,

$$\pi : x - 6y + 5z = 4.$$

(c) Como $r_1 \parallel r_2$, temos que $d(r_1, r_2) = (B, r_1)$, onde $B = (0,1,2) \in r_2$.

Seja $Q = (t+4, t, t) \in r_1$ o pé da perpendicular a r_1 baixada do ponto B.

Então $d(B, r_1) = d(B, Q)$.

Como $\overrightarrow{BQ} = (t+4, t-1, t-2) \perp r_1$, temos $\overrightarrow{BQ} = (t+4, t-1, t-2) \perp \overrightarrow{v} = (1,1,1)$, ou seja, $\langle \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

Sendo

$$\langle \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{v} \rangle = t + 4 + t - 1 + t - 2 = 3t + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -\frac{1}{3}\,,$$

obtemos $\overrightarrow{BQ} = \left(-\frac{1}{3} + 4, -\frac{1}{3} - 1, -\frac{1}{3} - 2\right) = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ e, portanto,

$$d(r_1, r_2) = d(B, Q) = \|\overrightarrow{BQ}\| = \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{121 + 16 + 49} = \frac{1}{3}\sqrt{186}\,.$$

□

Exemplo 10

Determine as equações das esferas $\mathcal{S}$ de raio $\sqrt{30}$, tais que $\mathcal{S} \cap \pi$ é um círculo de raio 3 e centro C sobre a reta r, onde

$$\pi : x + 2y - 4z = 4 \qquad e \qquad r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2z = 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A reta r é a intersecção dos planos

$$\pi_1 : x + y + z = 1 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : -x + 2z = 2\,.$$

Como $r \perp \overrightarrow{v_1} = (1,1,1)$ e $r \perp \overrightarrow{v_2} = (-1,0,2)$, temos $r \parallel \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (2,-3,1)$.

Fazendo $x = 0$ nas equações que definem a reta r, temos

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2z = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 - z = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = (0,0,1) \in r$$

Então,

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = t + 1 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como o centro $C \in r$, temos que $C = (2t, -3t, t+1)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Então,

$$2t - 6t - 4t - 4 = 4 \iff -8t = 8 \iff t = -1.$$

já que $C \in \pi : x + 2y - 4z = 4$.

Logo $C = (-2, 3, 0)$ é o centro da circunferência $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi$.

Como $\mathcal{C}$ tem raio 3 e $\mathcal{S}$ tem raio $\sqrt{30}$, temos que

$$d(A, C) = \sqrt{30 - 9} = \sqrt{21},$$

onde A é o centro da esfera $\mathcal{S}$.

Seja ℓ a reta perpendicular a π que passa pelo centro $\mathcal{C} = (-2, 3, 0)$ de $\mathcal{C}$. Então,

$$\ell : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t + 3 \\ z = -4t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}, \text{ pois } (1, 2, -4) \perp \pi.$$

Como $A \in \ell$, temos que $A = (t-2, 2t+3, -4t)$, para algum valor $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$d(A, C)^2 = t^2 + 4t^2 + 16t^2 = 21 \iff t^2 = 1 \iff t = \pm 1.$$

Para $t = 1$ obtemos o centro $A_+ = (-1, 5, -4)$ que corresponde à esfera

$$\mathcal{S}_+ : (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = 30.$$

Para $t = -1$ obtemos o centro $A_- = (-3, 1, 4)$ que corresponde à esfera

$$\mathcal{S}_- : (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30.$$

□

Exemplo 11

Considere os pontos $A = (1, 2, 1)$ *e* $B = (3, 4, 3)$*, e o plano*

$$\pi : x - y + z = 1.$$

(a) *Determine o conjunto dos pontos eqüidistantes de* A *e* B.

(b) *Determine o ponto* $C = (x, y, z) \in \pi$ *tal que* $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{11}$ *e* $x + y - 2z < 0$.

(c) *Determine a área do triângulo de vértices* A, B *e* C*, e o plano que contém esse triângulo.*

Solução.

(a) Seja $\overline{\pi} = \{P \mid d(P, A) = d(P, B)\}$. Então, $\overline{\pi}$ é o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2) \parallel (1, 1, 1)$, que passa pelo ponto $\dfrac{A+B}{2} = (2, 3, 2)$. Logo

$$\overline{\pi} : x + y + z = 7.$$

(b) Seja $\mathcal{C} = (x, y, z) \in \pi : x - y + z = 1$ tal que $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{11}$ e $x + y - 2z < 0$.

Como $d(C,A) = d(C,B)$, temos $C \in \overline{\pi}$.

Logo $C \in \pi \cap \overline{\pi} = r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 7\,. \end{cases}$

Como $r \perp \overrightarrow{v} = (1,-1,1)$ e $r \perp \overrightarrow{w} = (1,1,1)$, temos que $r \parallel \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (-2,0,2) \parallel (-1,0,1)$.

Fazendo $x = 0$ nas equações que definem r, temos

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 7 \end{cases} \Longrightarrow 2z = 8 \Longrightarrow z = 4 \Longrightarrow y = 7 - z = 3 \Longrightarrow P_0 = (0,3,4) \in r\,.$$

Logo as equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = 3 \\ z = t + 4 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $C \in r$, temos que $C = (-t, 3, t+4)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Além disso $d(C,A)^2 = 11$.

Assim,

$$(-t-1)^2 + (3-2)^2 + (t+4-1)^2 = 11 \Longleftrightarrow t^2 + 2t + 1 + 1 + t^2 + 6t + 9 = 11$$
$$\Longleftrightarrow 2t^2 + 8t = 0 \Longleftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Longleftrightarrow t(t+4) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = -4 \end{cases}$$

Substituindo esses valores de t, vemos que $C = (0,3,4)$ ou $C = (4,3,0)$. Mas como as coordenadas de C devem satisfazer a desigualdade $x + y - 2z < 0$, devemos ter $C = (0,3,4)$.

(c) Sabemos que

$$\text{Área}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|\,.$$

Como

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (2,2,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,3) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4,-8,4)\,,$$

obtemos

$$\text{Área}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|(4,-8,4)\| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \frac{1}{2}\sqrt{96} = \frac{4}{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}\,.$$

Consideremos agora o plano π que contém o triângulo $\triangle ABC$. Então $\pi \perp \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4,-8,4)$, isto é, $\pi \perp (1,-2,1)$. Logo

$$\pi : x - 2y + z = 0 - 6 + 4 = -2\,,$$

pois $C = (0,3,4) \in \pi$. $\square$

Exemplo 12

Considere o ponto $A = (a, 2a, a)$, *onde* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *e as retas*

$$r_1 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3s + 1 \\ z = s + 1 \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R} \qquad e \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) *Determine* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *e* $C \in r_1$ *de modo que* $\overrightarrow{AC}$ *seja perpendicular à reta* r_2 *e* $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$.

(b) *Mostre que os pontos* A *e* C*, do item anterior, e a reta* r_2 *não são coplanares.*

Solução.

(a) Seja $C = (2s, 3s+1, s+1) \in r_1$. Então $\overrightarrow{AC} = (2s - a, 3s + 1 - 2a, s + 1 - a)$.

Como $\overrightarrow{AC} \perp r_2$, temos que $\overrightarrow{AC} \perp (2, 1, -1)$, isto é,

$$\langle \overrightarrow{AC}, (2,1,-1) \rangle = 4s - 2a + 3s + 1 - 2a - s - 1 + a = 0 \iff 6s - 3a = 0 \iff a = 2s\,.$$

Além disso, como $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$, temos que

$$|(0, 3s+1-4s, s+1-2s)| = \sqrt{2} \iff |(0, 1-s, 1-s)| = \sqrt{2} \iff (1-s)^2 + (1-s)^2 = 2$$

$$\iff 2(1-s)^2 = 2 \iff (1-s)^2 = 1 \iff 1 - s = \pm 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} s = 2 \\ \text{ou} \\ s = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ \text{ou} \\ a = 0 \end{array} \right.$$

$$\implies a = 4 \ (\text{pois } a \in \mathbb{R} - \{0\}) \text{ e, portanto, } C = (4, 7, 3)\,.$$

(b) Seja π o plano que contém a reta r_2 e o ponto $A = (4, 8, 4)$.

Seja $B = (1, 2, 2) \in r_2$. Como $\pi \parallel \overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$ e $\pi \parallel \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = (-3, -6, -2)$, temos que

$$\pi \perp \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \right) = (-8, 7, -9).$$

Logo $\pi : -8x + 7y - 9z = -8 + 14 - 18 = -12$, pois $B = (1, 2, 2) \in \pi$.

Para mostrar que A, C e r_2 não são coplanares, basta verificar que $C = (4, 7, 3) \notin \pi$.

De fato, substituindo as coordenadas de C no lado esquerdo da equação de π, obtemos

$$-8 \times 4 + 7 \times 7 - 9 \times 3 = -32 + 49 - 27 = -59 + 49 = -10 \neq -12\,,$$

mostrando, assim, que $C \notin \pi$. □

Exemplo 13

Considere os planos

$$\pi_1 : x + 2y + 2z = 5 \qquad e \qquad \pi_2 : x + 2y + 2z = 11\,.$$

(a) *Determine a equação da esfera* $\mathcal{S}$ *tangente ao plano* π_2 *tal que* $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi_1$ *é um círculo de centro* $A = (1, 0, 2)$ *e raio* 4.

(b) *Determine* $\pi \cap \mathcal{C}$*, onde* $\pi : -2x + y + z = 0$.

Solução.

(a) A reta $r \perp \pi_1$ que passa pelo ponto A, contém o centro C da esfera $\mathcal{S}$. Isto é,

$$C = (t + 1, 2t, 2t + 2)\,, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{R}.$$

Como $d(C, \pi_2) = R$ e $d(C, A)^2 + 16 = R^2$, temos

$$t^2+4t^2+4t^2 = \frac{|t+1+4t+4t+4-11|^2}{(\sqrt{1+4+4})^2} - 16 \implies 9t^2 = \frac{(9t-6)^2}{9} - 16$$
$$\implies 9t^2 = \frac{9(3t-2)^2}{9} - 16 \implies 9t^2 = (3t-2)^2 - 16$$
$$\implies 9t^2 = (9t^2-12t+4) - 16 \implies 0 = -12t - 12 \implies t = -1$$

Logo $C = (0,-2,0)$ é o centro da esfera $\mathcal{S}$.

Além disso,

$$R^2 = d(C,A)^2 + 16 = 9 + 16 = 25 \implies R = 5 \text{ é o raio de } \mathcal{S}.$$

Portanto, $S : x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.

(b) Como $\mathcal{C} \subset \pi_1$ temos $\pi \cap \mathcal{C} = \pi_1 \cap \pi \cap \mathcal{C}$.

Seja $r = \pi \cap \pi_1$. Então, $r \perp (-2,1,1)$ e $r \perp (1,2,2)$. Logo $r \parallel (-2,1,1) \times (1,2,2) = (0,5,-5)$, ou seja, $r \parallel (0,1,-1)$.

Fazendo $x = 1$ nas equações de π e π_1, obtemos

$$\begin{cases} 2y + 2z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases} \implies (1,1,1) \in r \implies r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos $r \cap \mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{C}$. Temos

$$P \in r \cap \mathcal{C} \iff \begin{cases} P = (1, t+1, -t+1) \\ \text{e} \\ d(P,A)^2 = 16 \end{cases} \iff (1-1)^2 + (t+1)^2 + (-t+1-2)^2 = 16$$

$$\iff (t+1)^2 + (-t-1)^2 = 16 \iff 2(t+1)^2 = 16 \iff (t+1)^2 = 8 \iff t+1 = \pm 2\sqrt{2}.$$

Logo $t = -1 + 2\sqrt{2}$ ou $t = -1 - 2\sqrt{2}$.

Portanto, $\pi \cap \mathcal{C} = \{(1, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}+2), (1, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+2)\}$. $\square$

Exemplo 14

Considere os pontos $A = (2,3,1)$, $B = (1,4,2)$ e $C = (3,1,2)$ e a reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,-1,3)$ que passa pelo ponto $P = (1,3,0)$.

(a) *Verifique que A, B e C não são colineares.*

(b) *Determine a equação paramétrica e a equação cartesiana do plano π que contém os pontos A, B e C.*

(c) *Determine os vértices R, S e T de um triângulo tal que $\{R\} = \pi \cap r$, $S \in r$, $T \in \pi$, $\|\overrightarrow{ST}\| = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$ e $\overrightarrow{ST} \perp \pi$.*

Solução.

(a) Temos $\overrightarrow{AB} = (-1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,-2,1)$.

Os pontos A, B e C não são colineares pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplo um do outro. De fato,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3, 2, 1) \neq (0, 0, 0).$$

(b) A equação paramétrica do plano π que passa pelo ponto $A = (2, 3, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 3 + t - 2s \; ; \quad t, s \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t + s \end{cases}$$

Como o plano π é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ e passa pelo ponto A, a sua equação cartesiana é

$$\pi : 3x + 2y + z = 6 + 6 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi : 3x + 2y + z = 13.$$

(c) A equação paramétrica da reta r é

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \; ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

Como R é o ponto de intersecção de r com o plano π, temos $R = (1 + t, 3 - t, 3t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que as coordenadas de R satisfazem a equação cartesiana de π:

$$\begin{aligned} 3(1+t) + 2(3-t) + 3t = 13 &\Longrightarrow 3 + 3t + 6 - 2t + 3t = 13 \Longrightarrow 9 + 4t = 13 \\ &\Longrightarrow 4t = 4 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow R = (2, 2, 3). \end{aligned}$$

Sejam $S = (1 + t, 3 - t, 3t) \in r$ e $T \in \pi$, tais que $\overrightarrow{ST} \perp \pi$ e $\|\overrightarrow{ST}\| = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

Então,

$$\begin{aligned} d(S, \pi) = \|\overrightarrow{ST}\| = \frac{4}{\sqrt{14}} &\Longrightarrow \frac{|3(1+t) + 2(3-t) + 3t - 13|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \\ &\Longrightarrow \frac{|4t - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \\ &\Longrightarrow |t - 1| = 1 \Longrightarrow t - 1 = \pm 1 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \Longrightarrow S = S_1 = (3, 1, 6) \\ \text{ou} \\ t = 0 \Longrightarrow S = S_2 = (1, 3, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, os pontos S_1 e S_2 são os pontos da reta r que estão a distância $\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ do plano π.

Para achar os correspondentes pontos T_1 e T_2 tais que $\triangle RT_1S_1$ e $\triangle RT_2S_2$ são triângulos retângulos em T_1 e T_2, respectivamente, projetamos os pontos S_1 e S_2 perpendicularmente sobre o plano π.

• Seja ℓ_1 a reta perpendicular ao plano π que passa por S_1. Então

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 2t \; ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \{T_1\} = \ell_1 \cap \pi.$$

Como $T_1 \in \ell_1$, temos $T_1 = (3+3t, 1+2t, 6+t)$ e, como $T_1 \in \pi$, obtemos

$$3(3+3t)+2(1+2t)+(6+t)=13 \Longrightarrow 14t+17=13 \Longrightarrow t=-\frac{2}{7}$$
$$\Longrightarrow \quad T_1=\left(3-\frac{6}{7}, 1-\frac{4}{7}, 6-\frac{2}{7}\right) \Longrightarrow T_1=\left(\frac{15}{7}, \frac{3}{7}, \frac{40}{7}\right).$$

• Seja ℓ_2 a reta perpendicular ao plano π que passa por S_2. Então

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 3+2t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \{T_2\} = \ell_2 \cap \pi.$$

Como $T_2 \in \ell_1$, temos $T_2 = (1+3t, 3+2t, t)$ e, como $T_2 \in \pi$, obtemos

$$3(1+3t)+2(3+2t)+t=13 \Longrightarrow 14t+9=13 \Longrightarrow t=\frac{2}{7}$$
$$\Longrightarrow \quad T_2=\left(1+\frac{6}{7}, 3+\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right) \Longrightarrow T_2=\left(\frac{13}{7}, \frac{25}{7}, \frac{2}{7}\right).$$

□

Exemplo 15

Considere o ponto $A = (1,2,1)$ *e a reta*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) *Determine a equação paramétrica da reta* r.

(b) *Determine a equação cartesiana do plano* π *que contém a reta* r *e o ponto* A.

(c) *Determine as retas paralelas à reta* r *contidas no plano* π *que distam* $\sqrt{6}$ *de* r.

Solução.

(a) Temos

$$\left.\begin{array}{r} r \perp (1,-1,1) \\ r \perp (2,1,0) \end{array}\right\} \Longrightarrow r \parallel (1,-1,1) \times (2,1,0) = (-1,2,3) = \overrightarrow{v}.$$

Tomando $y = 0$ nas equações que definem r, obtemos:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Longrightarrow B = (1,0,0) \in r.$$

Logo a equação paramétrica de r é:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Temos $\pi \parallel \overrightarrow{v} = (-1,2,3)$ e $\pi \parallel \overrightarrow{BA} = (0,2,1)$. Logo $\pi \perp \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{BA} = (-4,1,-2)$.

Como $B = (1,0,0) \in \pi$, obtemos

$$\pi : 4x - y + 2z = 4.$$

(c) Seja $\ell \subset \pi$ tal que $\ell \perp r$ e $B \in \ell$. Temos,

$\ell \perp (4,-1,2)$ e $\ell \perp (-1,2,3) \Longrightarrow \ell \parallel (4,-1,2) \times (-1,2,3) = (-7,-14,7) \Longrightarrow \ell \parallel (1,2,-1)$.

Como $B = (1, 0, 0) \in \ell$, obtemos:

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (1 + t, 2t, -t) \in \ell$ tal que $d(P, B) = \sqrt{6}$. Então

$$d(P, B)^2 = 6 \Longrightarrow t^2 + 4t^2 + t^2 = 6 \Longrightarrow t^2 = 1 \Longrightarrow t = \pm 1 \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 & \Longrightarrow \quad P = P_1 = (2, 2, -1) \\ \text{ou} & \\ t = -1 & \Longrightarrow \quad P = P_2 = (0, -2, 1). \end{cases}$$

Para $P_1 = (2, 2, -1)$, obtemos a reta

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $P_2 = (0, -2, 1)$, obtemos a reta

$$r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

As retas r_1 e r_2 são as retas paralelas à reta r contidas no plano π que distam $\sqrt{6}$ de r. $\square$