Aula 18

Nosso objetivo agora é estudar a **equação geral do segundo grau em duas variáveis**:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,, \quad \text{onde} \quad A \neq 0 \quad \text{ou} \quad B \neq 0 \quad \text{ou} \quad C \neq 0}$$

Vamos considerar primeiro os casos em que $B = 0$. Isto é, vamos estudar a equação:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

1. Elipse

Definição 1

*Uma **elipse**, $\mathcal{E}$, de **focos** F_1 e F_2, é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja:*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{E} = \{\, P \,|\, d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \,\}\,, \\ 0 \leq c < a\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.

• A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal**.

Fig. 1: Posicionamento dos focos da elipse na reta focal.

• A intersecção da elipse com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da elipse sobre a reta focal.

De fato, seja $A \in \mathcal{E} \cap \ell$. Então $A \notin F_1F_2$, pois se $A \in F_1F_2$, teríamos

$$2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a\,,$$

isto é, $2c = 2a$, o que é impossível, já que, por definição, $2c < 2a$.

Seja $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell - F_1F_2$ tal que $x = d(A_2, F_2)$.

Como $2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x$, pois $A_2 \in \mathcal{E}$, temos que $x = a - c$.

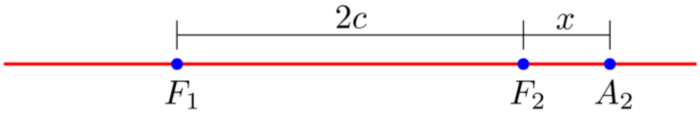

Fig. 2: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da elipse na reta focal.

Logo o ponto A_2 pertencente a $\ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2, pertence à elipse $\mathcal{E}$. De modo análogo, temos que o ponto A_1 pertencente a $\ell - F_1F_2$ que dista $a - c$ do foco F_1, pertence à elipse $\mathcal{E}$.

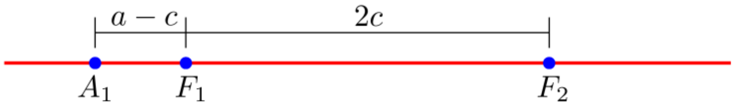

Fig. 3: Determinação da distância dos vértices aos focos da elipse.

- O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da elipse. O seu comprimento é $2a$.

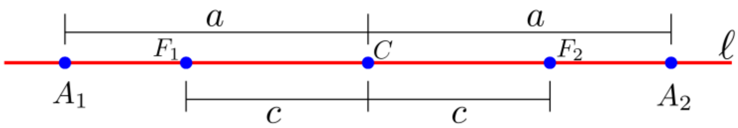

Fig. 4: Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse na reta focal.

- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da elipse. Esse ponto é, também, o ponto médio do segmento F_1F_2, delimitado pelos focos.

- A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não-focal**.

- A elipse intersecta a reta não-focal ℓ' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2, denominados **vértices da elipse sobre a reta não-focal**.

De fato, como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, temos que $\mathcal{B} \in \ell' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos que $\ell' \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos, B_1 e B_2, em ℓ', que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

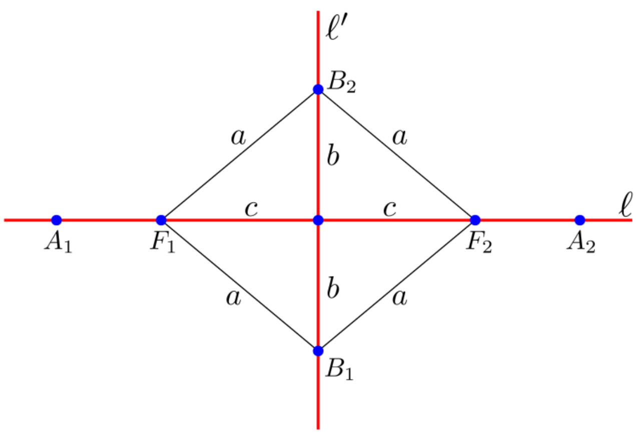

Fig. 5: Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse nas retas focal e não-focal.

• O segmento B_1B_2 é denominado **eixo não-focal** da elipse e seu comprimento é $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$.

• O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado a **excentricidade** da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.

• O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não-focal e c é a distância do centro aos focos.

Observação 1

1. *Se $c = 0$, a elipse se reduz ao círculo de centro C e raio a pois, nesse caso, $F_1 = F_2 = C$ e, portanto,*

$$\mathcal{E} = \{P \mid 2d(P, C) = 2a\} = \{P \mid d(P, C) = a\}$$

Em particular, a excentricidade $e = 0$ se, e somente se, a elipse é um círculo.

2. *Pela desigualdade triangular, temos que se $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, então $2c = d(F_1, F_2) \leq d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Isto é, $2c \leq 2a$.*

Além disso, $2c = 2a \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a = 2c = d(F_1, F_2) \iff P \in F_1F_2$. Ou seja, se $c = a$, então

$$\{\, P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = a \,\} = F_1F_2.$$

Por isso, na definição da elipse, tomamos $2c < 2a$.

3. *A elipse $\mathcal{E}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não-focal e ao centro.*

De fato, se $P \in \mathcal{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

Em particular, $F_1P \equiv F_1P'$ e $F_2P \equiv F_2P'$. Logo,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2) \Longrightarrow P' \in \mathcal{E}\,.$$

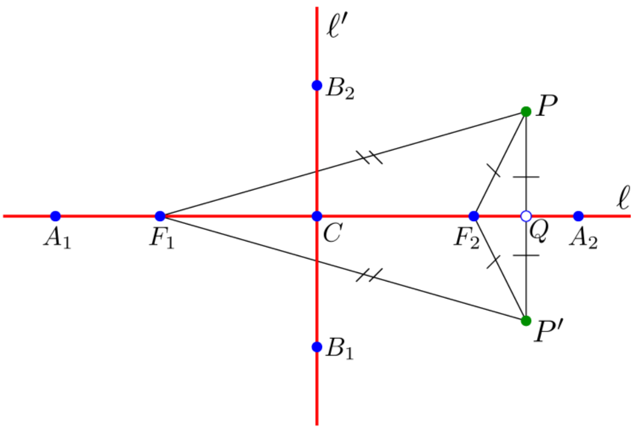

Fig. 6: Simetria da elipse em relação à reta focal.

Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle P''CF_2\,.$$

Em particular, $F_1P \equiv F_2P''$ e $F_2P \equiv F_1P''$. Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \Longrightarrow P'' \in \mathcal{E}\,.$$

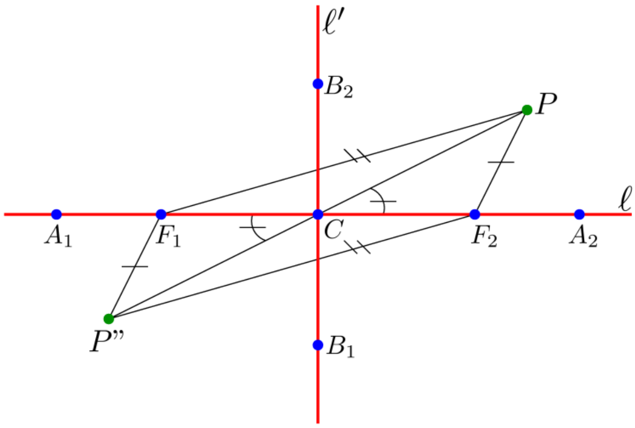

Fig. 7: Simetria da elipse em relação ao centro.

A simetria em relação à reta não-focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

2. Forma canônica da elipse

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. Vamos obter a equação da elipse em relação a esse sistema de eixos para alguns casos especiais.

Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Nesse caso, temos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
& P = (x, y) \in \mathcal{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
\iff\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
\iff\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\iff\ & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
\iff\ & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
\iff\ & a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
\iff\ & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
\iff\ & b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
\iff\ & \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}
\end{aligned}
$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

Esboço da Elipse

Como $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Consideremos o gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$. Como para $x = 0$ e $x = a$, temos $y = b$ e $y = 0$, respectivamente; $y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$ (decrescente) e $y'' = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0$ (côncava), para $x \in (0, a)$, o gráfico da função é da forma:

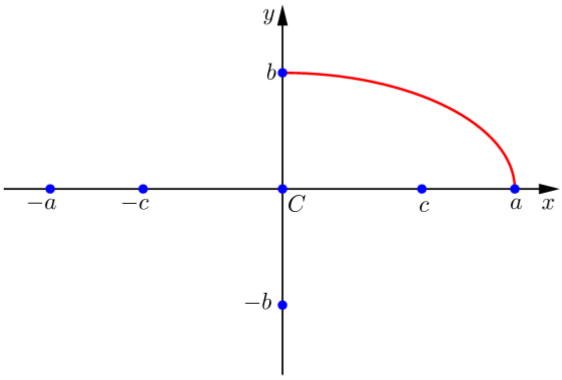

Fig. 8: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$.

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo$-$OX (reta focal) e em relação ao eixo$-$OY (reta não-focal), seu gráfico tem a forma:

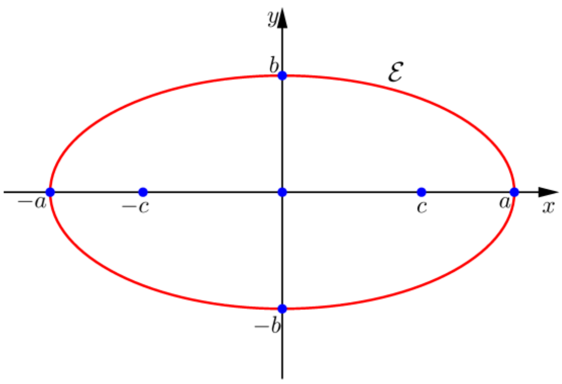

Fig. 9: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Desenvolvendo como no caso anterior, podemos verificar que a equação da elipse é:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

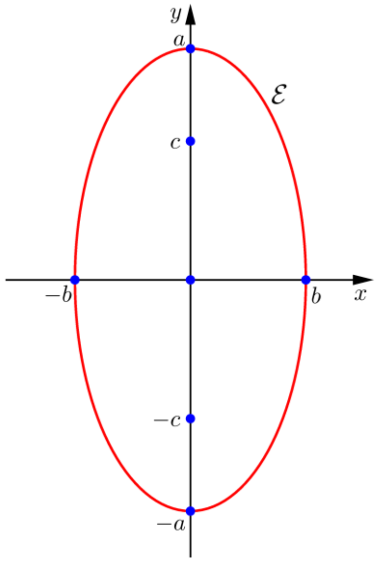

Fig. 10: Elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 1

Os vértices de uma elipse são os pontos $(4, 0)$ *e* $(-4, 0)$*, e seus focos são os pontos* $(3, 0)$ *e* $(-3, 0)$*. Determine a equação da elipse.*

Solução.

Como $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, a reta focal é o eixo$-OX$, e $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$ são os vértices sobre a reta focal ℓ.

Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse, $a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$. □

Exemplo 2

Dois vértices de uma elipse $\mathcal{E}$ *são os pontos* $(0, 6)$ *e* $(0, -6)$*, e seus focos são os pontos* $(0, 4)$ *e* $(0, -4)$*. Determine a equação da elipse* $\mathcal{E}$*.*

Solução.

Temos $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$. Então a reta focal (que contém os focos) é o eixo OY, os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (0, -6)$ e $A_2 = (0, 6)$, e o centro da elipse $\mathcal{E}$ é a origem, pois $C = \dfrac{(0, 4) + (0, -4)}{2} = (0, 0)$. Como $a = d(C, A_1) = 6$ e $c = d(C, F_1) = 4$, temos que $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Portanto, a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. □

Exemplo 3

Os focos de uma elipse são os pontos $(2,0)$ *e* $(-2,0)$*, e sua excentricidade é* $\frac{2}{3}$*. Determine a equação da elipse.*

Solução.

Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da elipse é a origem $C=(0,0)$, $c=d(C,F_1)=2$ e $e=\frac{2}{3}=\frac{c}{a}=\frac{2}{a} \Longrightarrow a=3$. Logo, $b^2=a^2-c^2=9-4=5$.

Portanto, a equação da elipse é $\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. □

Exemplo 4

Uma elipse $\mathcal{E}$ *tem seu centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é* $(0,7)$*. Se a elipse passa pelo ponto* $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$*, determine sua equação, seus vértices, seus focos e sua excentricidade. Faça, também; um esboço da elipse.*

Solução.

A reta focal, que contém o centro e o vértice dado, é o eixo OY. A distância do centro $C=(0,0)$ ao vértice $A_2=(0,7)$ é $a=d(C,A_2)=7$ e o outro vértice na reta focal é $A_1=(0,-7)$.

Logo, a equação da elipse $\mathcal{E}$ é da forma:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \qquad \text{ou seja,} \qquad \mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{7^2}=1\,.$$

Como $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right) \in \mathcal{E}$, temos:

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{b^2}+\frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{49}=1\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{5}{b^2}+\frac{2^2\,7^2}{3^2\,7^2}=1.$$

Isto é, $\frac{5}{b^2}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$. Assim, $b^2=9$ e a equação da elipse é

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1.$$

Como a reta não-focal é o eixo OX e $b=3$, os vértices na reta não-focal são $B_1=(-3,0)$ e $B_2=(3,0)$.

Temos, também, que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Logo, os focos são $F_1=(0,-2\sqrt{10})$ e $F_2=(0,2\sqrt{10})$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$. □

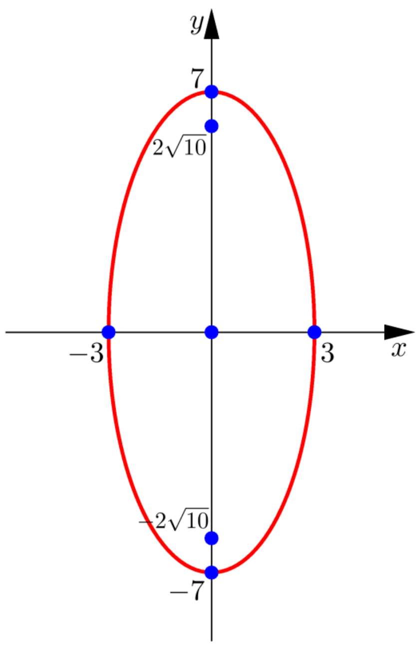

Fig. 11: Gráfico da elipse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$.

3. Translação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano.

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema cujos eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm, respectivamente, o mesmo sentido que esses eixos.

Sejam $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ e sejam (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

Então, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ são relacionadas por:

$$\boxed{\begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \end{cases}}$$

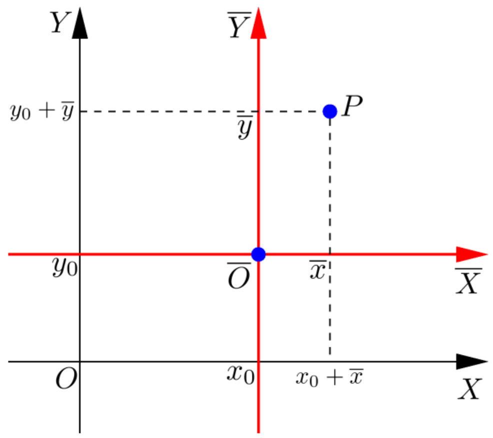

Fig. 12: Ponto $P = (\overline{x}, \overline{y})_{\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}} = (x_0 + \overline{x}, y_0 + \overline{y})_{OXY}$.

Exemplo 5

Faça um esboço da curva

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,.$$

Para isso, escreva a equação nas coordenadas $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ *do sistema de eixos* $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$*, com origem* $\overline{O} = (1, 2)$*, obtido transladando o sistema* OXY *para a origem* $\overline{O}$*.*

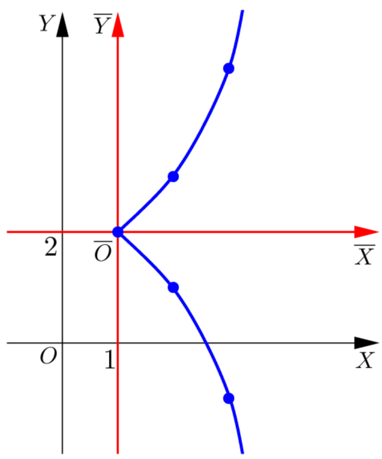

Fig. 13: Gráfico da curva $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,.$

Solução.

Fazendo $x = \overline{x} + 1$ e $y = \overline{y} + 2$ na equação dada, obtemos:

$$(\overline{x} + 1)^3 - 3(\overline{x} + 1)^2 - (\overline{y} + 2)^2 + 3(\overline{x} + 1) + 4(\overline{y} + 2) - 5 = 0\,.$$

Simplificando essa identidade, obtemos $\overline{x}^3 = \overline{y}^2$.

Então, $\overline{y} = \pm\overline{x}^{3/2}$ e $\overline{x} \geq 0$.

Fazer, agora, o esboço da curva é bem mais simples. $\square$

4. Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

Caso I. Reta focal paralela ao eixo OX

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à elipse, onde x, y são suas coordenadas no sistema OXY e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido transladando o sistema OXY para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\iff d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a \\
&\iff d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) + d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0)) = 2a \\
&\iff \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é**

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não-focal é $\ell' : x = x_0$ e os vértices sobre a reta não-focal são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

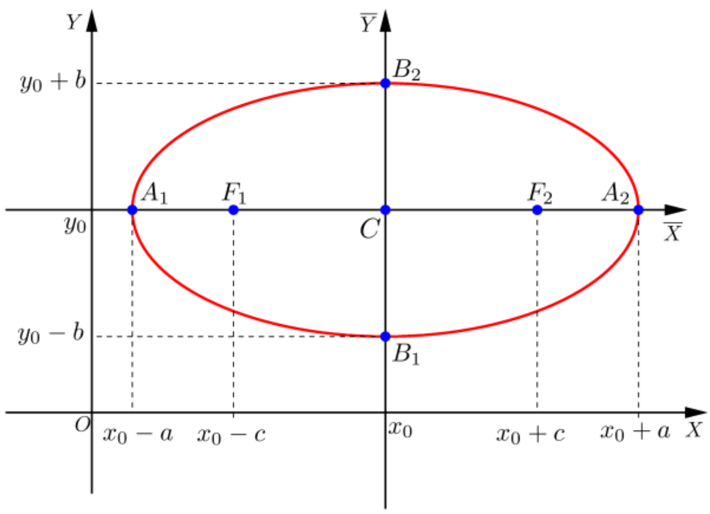

Fig. 14: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$

Caso II. Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, pode-se verificar que **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$; a reta não-focal é $\ell' : y = y_0$ e os vértices sobre a reta não-focal são $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

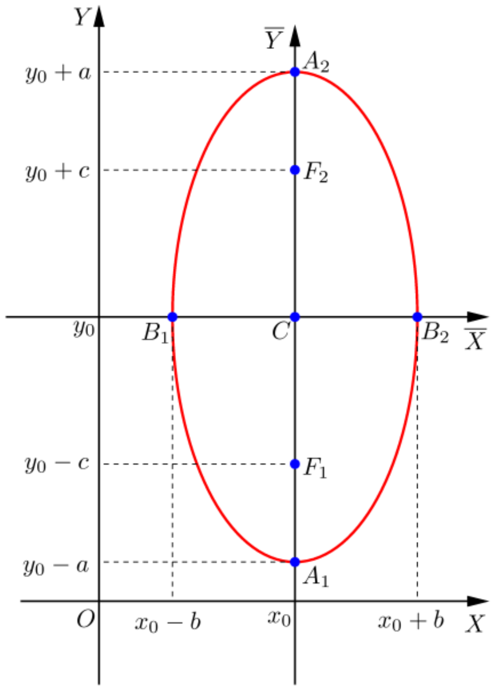

Fig. 15: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 6

Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $(3, 8)$ e $(3, 2)$, e o comprimento do seu eixo não-focal é 8. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$, os seus vértices e a sua excentricidade.

Solução.

Como $F_1 = (3, 2)$ e $F_2 = (3, 8)$ são os focos da elipse, a reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : x = 3$ (paralela ao eixo OY) e o centro de $\mathcal{E}$ é $C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (3, 5)$. Além disso, $2b = 8$, isto é, $b = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, isto é, $a = 5$. Portanto, $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$; $A_1 = (3, 0)$ e $A_2 = (3, 10)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta focal; $\ell' : y = 5$ é a reta não-focal; $B_1 = (-1, 5)$ e $B_2 = (7, 5)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta não-focal e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1\,.$$

é a equação da elipse. □

Exemplo 7

A equação de uma elipse é $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. *Determine a equação da elipse na forma canônica, o seu centro, os seus vértices, os seus focos e a sua excentricidade.*

Solução.
Completando os quadrados na equação de $\mathcal{E}$, temos:

$$\mathcal{E} : (x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$
$$\mathcal{E} : (x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 4 \times \frac{9}{4} = 4$$
$$\mathcal{E} : (x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$
$$\mathcal{E} : \frac{(x+1)^2}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1\,,$$

sendo esta última equação a forma canônica de $\mathcal{E}$. Dessa equação obtemos que o centro da elipse é $C = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $a = 2$, $b = 1$ e, portanto, $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, ou seja $c = \sqrt{3}$.

A reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : y = \frac{3}{2}$, paralela ao eixo OX, e a reta não-focal é a reta vertical $\ell' : x = -1$, paralela ao eixo$-OY$.

Os focos da elipse são $F_1 = \left(-1 - \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ e $F_2 = \left(-1 + \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = \left(-1 - 2, \frac{3}{2}\right) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$ e $A_2 = \left(-1 + 2, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ e os vértices sobre a reta não-focal são $B_1 = \left(-1, \frac{3}{2} - 1\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(-1, \frac{3}{2} + 1\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

5. Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse $\mathcal{E}$ de centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Desenvolvendo, obtemos a equação:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, **$B = 0$ e A e C têm o mesmo sinal**. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.

Reciprocamente, temos:

Proposição 1

Suponha que os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,, \qquad (\star)$$

têm o mesmo sinal. Seja $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.

Então, a equação $(\star)$ representa:

- *uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $M > 0$.*
- *um ponto, se $M = 0$.*
- *o conjunto vazio, se $M < 0$.*

Prova.

Dividindo a equação $(\star)$ por AC, obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0\,,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}\,.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3}\,. \qquad (\star\star)$$

Se $M = 0$, a equação $(\star\star)$ representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação $(\star\star)$ na forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1\,. \qquad (\triangle)$$

Como $AC > 0$, a equação $(\triangle)$ representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação $(\triangle)$ representa o conjunto vazio, pois $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\frac{M}{4ACC^2} < 0$. ■

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC > 0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são chamados de **casos degenerados da elipse**.

Exemplo 8

Determine se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

(a) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$.

Solução.

Como $25x^2 + 9y^2 = 225$*, obtemos, dividindo por* 225*, que a equação* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ *representa uma elipse com:*

- $a = 5$, $b = 3$ *e* $c = \sqrt{25 - 9} = 4$.
- *centro:* $C = (0, 0)$.
- *reta focal:* $\ell =$ *eixo* $- OY : x = 0$.
- *reta não-focal:* $\ell' =$ *eixo* $- OX : y = 0$.
- *vértices sobre a reta focal:* $A_1 = (0, -5)$ *e* $A_2 = (0, 5)$.
- *vértices sobre a reta não-focal:* $B_1 = (-3, 0)$ *e* $B_2 = (3, 0)$.
- *focos:* $F_1 = (0, -4)$ *e* $F_2 = (0, 4)$. $\square$

(b) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

Solução.
Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100 \\ \iff\ & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) = -100 + 4 \times 25 + 9 \times 4 \\ \iff\ & 4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 36 \\ \iff\ & \frac{(x - 5)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a = 3$, $b = 2$ *e* $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.
- *centro:* $C = (5, -2)$.
- *reta focal:* $\ell : y = -2$*, paralela ao eixo*$-OX$.
- *reta não-focal:* $\ell' : x = 5$*, paralela ao eixo*$-OY$.
- *vértices sobre a reta focal:* $A_1 = (2, -2)$ *e* $A_2 = (8, -2)$.
- *vértices sobre a reta não-focal:* $B_1 = (5, -4)$ *e* $B_2 = (5, 0)$.
- *focos:* $F_1 = (5 - \sqrt{5}, -2)$ *e* $F_2 = (5 + \sqrt{5}, -2)$. $\square$

(c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0.$

Solução.

Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} & 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82 \\ \iff \quad & 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36 \times \frac{9}{4} + 9 \times \frac{1}{9} \\ \iff \quad & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1 \\ \iff \quad & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Apenas o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ *satisfaz a equação dada, isto é, a equação representa um ponto.* □

(d) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0.$

Solução.

Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} & 9(x^2 + 2x) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) = -25 \\ \iff \quad & 9(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{81}{64}\right) = -25 + 9 \times 1 + 4 \times \frac{81}{64} \\ \iff \quad & 9(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = -16 + 4 \times \frac{81}{16} = -\frac{175}{16}\,. \end{aligned}$$

Como $-\frac{175}{16} < 0$, *não existe nenhum ponto do plano que satisfaz a equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio.* □

Exemplo 9

Dizemos que uma reta r *é* **tangente** *a uma elipse* $\mathcal{E}$ *num ponto* P *se* r *intersecta* $\mathcal{E}$ *só nesse ponto, isto é, se* $r \cap \mathcal{E} = \{P\}$.

Mostre que a reta r *tangente à elipse* $\mathcal{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *em um ponto* $P = (x_0, y_0)$ *sobre a curva tem por equação*

$$r : x_0 b^2 x + y_0 a^2 y = a^2 b^2\,.$$

Solução.

Seja

$$r : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.

Então $Q = (x_0 + mt, y_0 + nt) \in \mathcal{E} \cap r$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& b^2(mt+x_0)^2 + a^2(nt+y_0)^2 = a^2b^2 \\
\Longleftrightarrow\ & b^2(m^2t^2 + 2x_0mt + x_0^2) + a^2(n^2t^2 + 2y_0nt + y_0^2) = a^2b^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (b^2m^2 + a^2n^2)t^2 + (2x_0mb^2 + 2y_0na^2)t + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0
\end{aligned}$$

Como $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$, já que $P \in \mathcal{E}$, temos que $Q = (x_0 + mt, y_0 + nt) \in \mathcal{E} \cap r$ se, e somente se,

$$t\left[(b^2m^2 + a^2n^2)t + (2x_0mb^2 + 2y_0na^2)\right] = 0\,.$$

Sendo $b^2m^2 + a^2n^2 > 0$ e como $r \cap \mathcal{E}$ consiste de um único ponto, temos:

$$2x_0mb^2 + 2y_0na^2 = 0,$$

ou seja, $(m, n) \perp (2x_0b^2, 2y_0a^2)$. Logo, o vetor (x_0b^2, y_0a^2) é perpendicular a r, isto é,

$$r : b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

já que $P = (x_0, y_0) \in r$ e $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$. □

Exemplo 10

Determine as equações cartesianas das retas tangentes à elipse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

que passam pelo ponto $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Solução.

Sendo $a^2 = 20$ e $b^2 = 5$ temos, pelo exercício anterior, que a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ que passa por Q tem a forma $r : b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, ou seja, $r : 5x_0x + 20y_0y = 100$, onde $P = (x_0, y_0)$ é o ponto de tangência.

Como $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) \in r$, temos que:

$$5x_0 \times \frac{10}{3} + 20y_0 \times \frac{5}{3} = 100 \Longleftrightarrow 50x_0 + 100y_0 = 300 \Longleftrightarrow x_0 = 6 - 2y_0\,.$$

Além disso, $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, isto é, $5x_0^2 + 20y_0^2 = 100$. Logo,

$$\begin{aligned}
5(6-2y_0)^2 + 20y_0^2 = 100 \Longleftrightarrow\ & 5(36 - 24y_0 + 4y_0^2) + 20y_0^2 = 100 \\
\Longleftrightarrow\ & 180 - 120y_0 + 20y_0^2 + 20y_0^2 = 100 \\
\Longleftrightarrow\ & 40y_0^2 - 120y_0 + 80 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & y_0^2 - 3y_0 + 2 = 0 \Longleftrightarrow y_0 = 1 \quad \text{ou} \quad y_0 = 2.
\end{aligned}$$

Se $y_0 = 1$, então $x_0 = 6 - 2y_0 = 4$ e $r : 20x + 20y = 100$, ou seja, $r_1 : x + y = 5$ é a reta tangente a $\mathcal{E}$ no ponto $(4, 1)$ que passa pelo ponto $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Se $y_0 = 2$, então $x_0 = 6 - 2y_0 = 2$ e $r : 10x + 40y = 100$, ou seja $r_2 : x + 4y = 10$ é a reta tangente a $\mathcal{E}$ no ponto $(2, 2)$ que passa pelo ponto $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$. □