# Aula 19

Continuamos com o nosso estudo da equação

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

## 1. Hipérbole

### Definição 1

*Uma **hipérbole**, $\mathcal{H}$, de **focos** $F_1$ e $F_2$, é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos $P$ tais que o módulo da diferença das distâncias a $F_1$ e $F_2$ é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c \geq 0$.*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{H} = \{\, P \mid |\, d(P, F_1) - d(P, F_2) \,| = 2a \,\} \\ 0 \leq a < c\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

### Observação 1

*Para todo ponto $P$ do plano, temos que*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| \leq d(F_1, F_2)\,,$$

*e a igualdade ocorre se, e somente se, $P$ pertence à semi-reta de origem $F_1$ que não contém $F_2$, ou à semi-reta de origem $F_2$ que não contém $F_1$. Em particular, como $2a < 2c$, nenhum ponto sobre as semi-retas acima pertence à hipérbole.*


Fig. 1: Semi-retas que contêm apenas um dos focos.

*De fato, pela desigualdade triangular, temos que*

$$d(P, F_1) \leq d(P, F_2) + d(F_2, F_1),$$

*e*

$$d(P, F_2) \leq d(P, F_1) + d(F_1, F_2).$$

*Logo,*

$$-d(F_1,F_2) \le d(P,F_1) - d(P,F_2) \le d(F_1,F_2)\,,$$

*ou seja,*

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| \le d(F_1,F_2)\,.$$

*Além disso, temos que* $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = d(F_1,F_2)$ *se, e só se,* $d(P,F_1) - d(P,F_2) = d(F_1,F_2)$ , *ou seja,* $d(P,F_1) = d(P,F_2) + d(F_1,F_2)$, **ou** $d(P,F_1) - d(P,F_2) = -d(F_1,F_2)$ , *isto é,* $d(P,F_2) = d(P,F_1) + d(F_1,F_2)$ .

*Se* $d(P,F_1) = d(P,F_2) + d(F_2,F_1)$, *temos que* $F_2 \in F_1P$, *ou seja,* $P$ *pertence à semi-reta de origem* $F_2$ *que não contém* $F_1$.

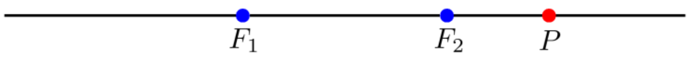


*Fig. 2:* $F_2$ *entre* $F_1$ *e* $P$.

*Se* $d(P,F_2) = d(P,F_1) + d(F_1,F_2)$, *temos que* $F_1 \in PF_2$, *isto é,* $P$ *pertence à semi-reta de origem* $F_1$ *que não contém* $F_2$.

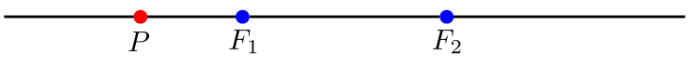


*Fig. 3:* $F_1$ *entre* $P$ *e* $F_2$.

*Por isso, tomamos* $c > a$ *na definição da hipérbole, pois se* $c < a$ *e* $d(F_1,F_2) = 2c$, *o conjunto*

$$\{P \,|\, |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$$

*representaria o conjunto vazio, e se* $c = a$, *o conjunto acima representaria a união da semi-reta de origem* $F_1$ *que não contém* $F_2$ *com a semi-reta de origem* $F_2$ *que não contém* $F_1$.

## Terminologia

• Os pontos $F_1$ e $F_2$ são os **focos** da hipérbole.

• A reta $\ell$ que contém os focos é a **reta focal** (Fig. 1).

• A intersecção da hipérbole com a reta focal $\ell$ consiste de exatamente dois pontos, $A_1$ e $A_2$, chamados **vértices** da hipérbole. De fato, pela observação 1, temos que se $A \in \mathcal{H} \cap \ell$, então $A \in F_1F_2$. Seja $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathcal{H}$ tal que $d(A_1,F_1) = x$.

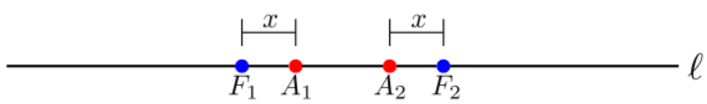


Fig. 4: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

Como $d(F_1,F_2) = 2c$, temos

$$\begin{aligned} |d(A_1,F_1) - d(A_1,F_2)| = 2a &\iff |x - (2c - x)| = 2a \iff |2x - 2c| = 2a \\ &\iff 2c - 2x = 2a \iff x = c - a\,. \end{aligned}$$

Logo o ponto $A_1$ de $F_1F_2$ distante $c - a$ de $F_1$ pertence à hipérbole.

Analogamente, temos que o ponto $A_2$ de $F_1F_2$ distante $c - a$ de $F_2$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$

• O segmento $A_1A_2$ é denominado **eixo focal** da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.

• O ponto médio $C$ do eixo focal $A_1A_2$ é o **centro** da hipérbole. Esse ponto é, também, o ponto médio do segmento $F_1F_2$, delimitado pelos focos: $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$.

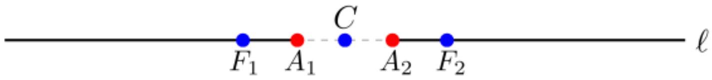


Fig. 5: Posicionamento dos focos, vértices e centro da hipérbole na reta focal.

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

• A reta $\ell'$ que passa pelo centro $C$ e é perpendicular à reta focal $\ell$ é a **reta não-focal** da hipérbole. Como $\ell'$ é a mediatriz do segmento $F_1F_2$, a hipérbole não intersecta a reta não-focal $\ell'$, pois se $P \in \ell'$, temos

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a.$$

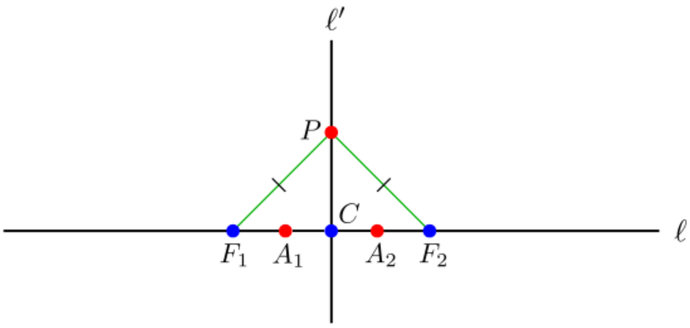


Fig. 6: Pontos do eixo não-focal não pertencem à hipérbole.

• O segmento $B_1B_2$ perpendicular ao eixo focal que tem $C$ como ponto médio e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado **eixo não-focal** da hipérbole, e $B_1$ e $B_2$ são os vértices imaginários da hipérbole

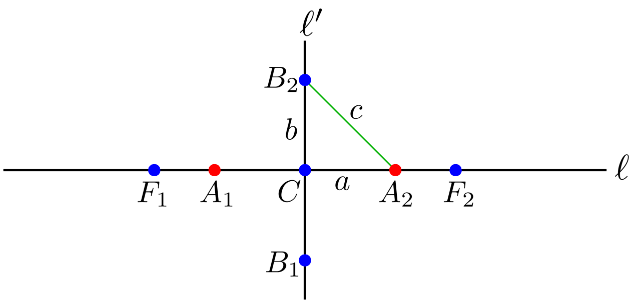


Fig. 7: Relação dos comprimentos $a$, $b$ e $c$.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado a **excentricidade** da hipérbole. Note que $e > 1$, pois $c > a$.

• O **retângulo de base** da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo que tem os pontos $A_1$, $A_2$, $B_1$ e $B_2$ como pontos médios de seus lados e as retas que contêm as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ são as **assíntotas** de $\mathcal{H}$.

Portanto as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal.

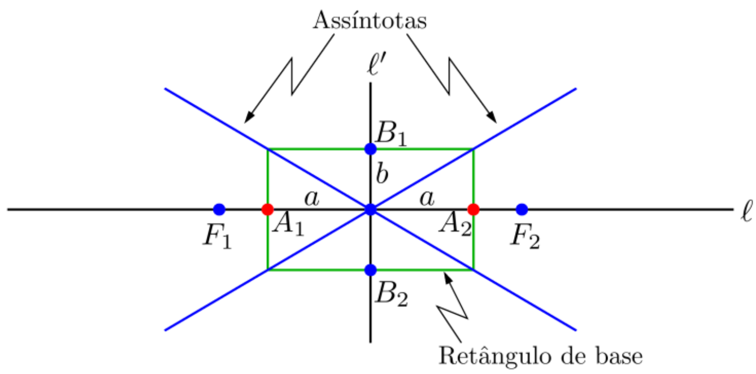


Fig. 8: Retângulo de base e assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base de $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$ e a distância do centro de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a $c$.

• Dizemos que uma hipérbole é **equilátera** se o comprimento do eixo focal é igual ao comprimento do eixo não-focal, isto é, $a = b$.

Então, o retângulo de base de uma hipérbole equilátera é, na realidade, um quadrado. Em particular, as retas que contêm as suas diagonais, isto é, suas assíntotas, intersectam-se perpendicularmente.

• Duas hipérboles tais que o eixo focal de cada uma é igual ao eixo não-focal da outra são denominadas **hipérboles conjugadas**. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, mesmas assíntotas e os focos a uma mesma distância do centro.

## Observação 2

**1.** *A hipérbole $\mathcal{H}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não-focal e ao centro.*

*De fato, se $P \in \mathcal{H}$ e $P'$ é o simétrico de $P$ em relação à reta focal, então*

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad e \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

*Em particular, $F_2P \equiv F_2P'$ e $F_1P \equiv F_1P'$. Logo*

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P',F_1) - d(P',F_2)| \Longrightarrow P' \in \mathcal{H}\,.$$

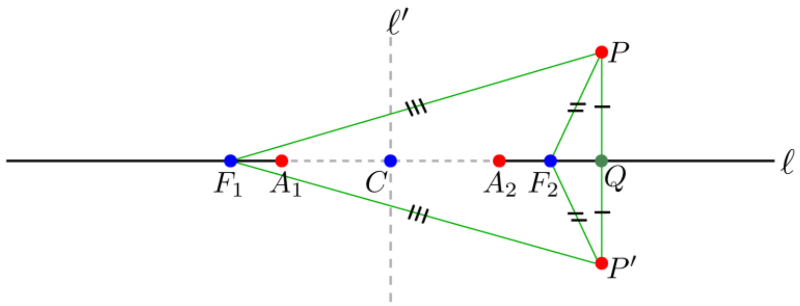


*Fig. 9: Simetria da hipérbole em relação à reta focal.*

*Se $P \in \mathcal{H}$ e $P''$ é o simétrico de $P$ em relação ao centro, então*

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad e \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle P''CF_2\,.$$

*Em particular, $F_2P \equiv F_1P''$ e $F_1P \equiv F_2P''$. Logo,*

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P'', F_2) - d(P'', F_1)| \Longrightarrow P'' \in \mathcal{H}\,.$$

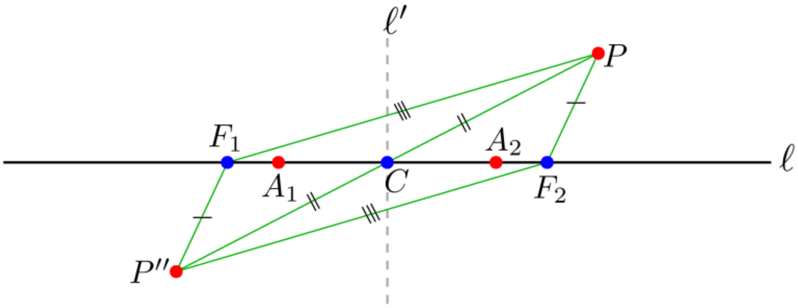


*Fig. 10: Simetria da hipérbole em relação ao centro.*

*A simetria em relação à reta não-focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.*

## 2. Forma canônica da hipérbole

Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXY$ em alguns casos especiais.

### Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Nesse caso, temos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$, $B_2 = (0, b)$ e $C = (0, 0)$. Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \quad \text{(ramo direito de } \mathcal{H}\text{)} \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a \quad \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}\text{)} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{(ramo direito de } \mathcal{H}\text{)} \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \quad \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}\text{).} \end{cases}$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos a:

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Longleftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\,.$$

Portanto, $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se, e somente se, as coordenadas $x$ e $y$ satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

chamada **forma canônica da equação da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo**$-OX$.

As assíntotas dessa hipérbole são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação ao eixo$-OX$ (reta focal). Logo, as assíntotas são as retas $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$, ou seja,

$$bx - ay = 0 \qquad \text{e} \qquad bx + ay = 0\,.$$

## Esboço da Hipérbole

Como $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} - 1 = \dfrac{x^2 - a^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, onde $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Sendo $y' = \dfrac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$ (crescente) e $y'' = \dfrac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0$ (côncava), para todo $x \in (a, +\infty)$, temos que o gráfico da função $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty)$ é da forma:

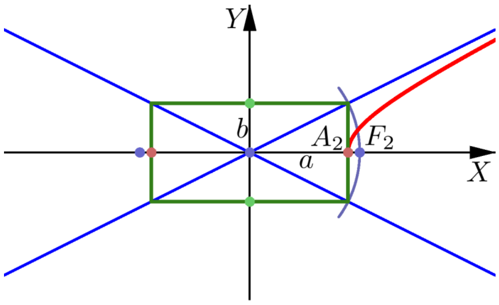


Fig. 11: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty]$.

Pela simetria da hipérbole em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e em relação ao eixo$-OY$ (reta não-focal), obtemos o seu gráfico:

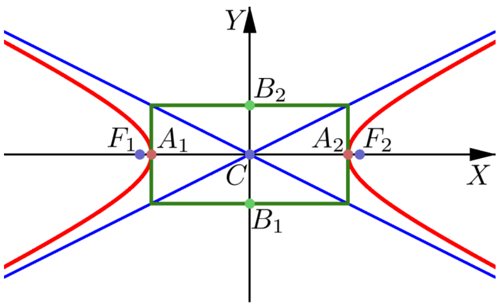


Fig. 12: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Podemos, agora, explicar o porquê do nome **assíntota** para as retas que contêm as diagonais do retângulo de base.

Sejam $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole, isto é, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, e $r_+ : bx - ay = 0$ uma de suas assíntotas. Então,

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{1}{|bx + ay|} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{1}{|bx + ay|}. \end{aligned}$$

Logo $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to -\infty$.

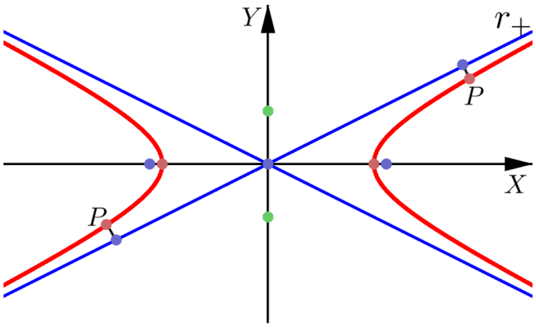


Fig. 13: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty$.

De modo análogo, podemos verificar que $d(P, r_-) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to -\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to +\infty$, onde $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ e $r_- : bx + ay = 0$ é a outra assíntota da hipérbole.

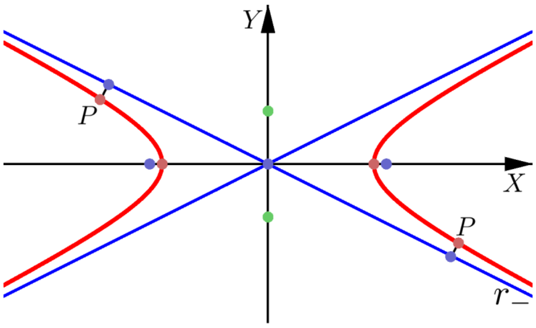


Fig. 14: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \mp\infty$.

## Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Procedendo como no caso anterior, obtemos que a equação da hipérbole é:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

**Forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo−$OY$.**

onde $b^2 = c^2 - a^2$. Neste caso, as assíntotas são as retas $x = \pm\frac{b}{a}y$, ou seja,

$$ax - by = 0 \qquad \text{e} \qquad ax + by = 0\,.$$

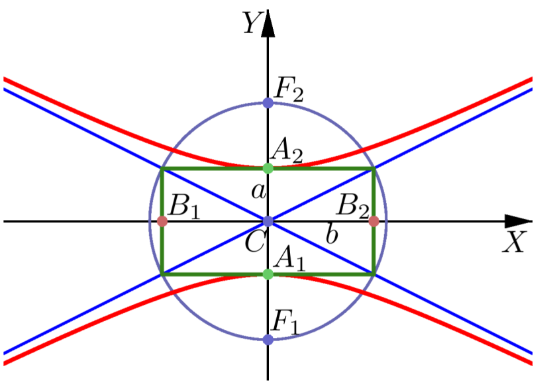


Fig. 15: Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

# 3. Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

## Caso I. Reta focal paralela ao eixo$-OX$

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c,$$

onde $F_1$ e $F_2$ são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde

$$x = \overline{x} + x_0\,, \quad y = \overline{y} + y_0\,,$$

são suas coordenadas no sistema $OXY$ e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido transladando o sistema $OXY$ para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, $P$ pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\iff |d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) - d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0))| = 2a \\
&\iff |d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) - d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0))| = 2a \\
&\iff \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto $(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$ é**

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não-focal é $\ell' : x = x_0$; os vértices imaginários são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$, e as assíntotas são as retas $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$ e $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0\,$.

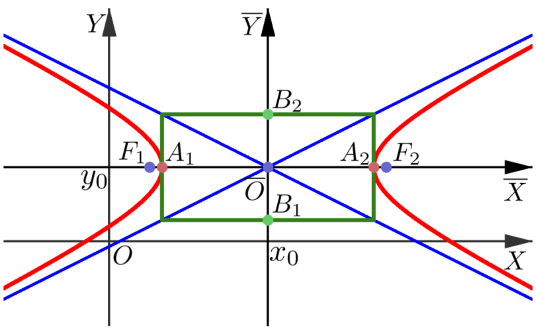


Fig. 16: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,$.

### Caso II. Reta focal paralela ao eixo$-OY$

Procedendo como no caso anterior, se verifica que **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto $(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$ é**

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; os vértices são $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$; a reta não focal é $\ell' : y = y_0$; os vértices imaginários são $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$, e as assíntotas são as retas $a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

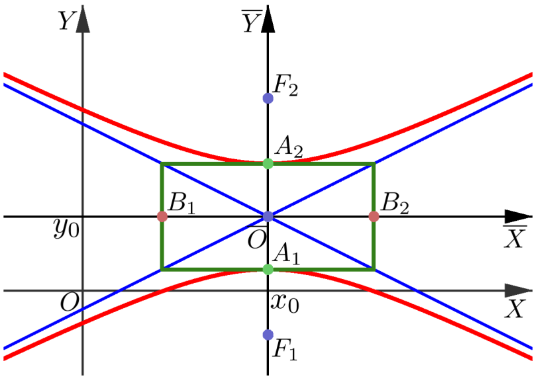


Fig. 17: Gráfico da elipse $\mathcal{H} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

## 4. Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$.

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole com centro no ponto $(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2x_0b^2x + 2y_0a^2y + x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2x_0b^2$, $E = 2y_0a^2$, $F = x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$. Em particular, **os coeficientes $A$ e $C$ têm sinais opostos e $B = 0$**. Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

### Proposição 1

*Se os coeficientes $A$ e $C$ na equação*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (\star)$$

*têm sinais opostos, então a equação representa:*

- *uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;*

*ou*

- *um par de retas concorrentes.*

*Prova.*
Suponhamos que $A > 0$ e $C < 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F\,,\\
&\frac{\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right)}{A} = \frac{F}{AC}\,,\\
&\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}\,,\\
&\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}\,,
\end{aligned}$$

Logo a equação $(\star)$ representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados se $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$, e $(\star)$ representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right)\,,$$

se $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$ ■

O caso em que a equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC < 0$, representa um par de retas concorrentes, é chamado de **caso degenerado da hipérbole**.

## Exemplo 1

*Determine se as equações abaixo representam uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.*

**(a)** $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$.

Solução.
*Como* $9x^2 - 25y^2 = 225$, *obtemos, dividindo por* $225$, *a equação*

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1\,,$$

*que representa uma hipérbole com:*

- $a = 5$, $b = 3$ *e* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$.
- *centro:* $C = (0, 0)$.
- *reta focal:* $\ell =$ *eixo*$-OX : y = 0$.
- *reta não-focal:* $\ell' =$ *eixo*$-OY : x = 0$.

- *vértices:* $A_1 = (-5, 0)$ *e* $A_2 = (5, 0)$.
- *vértices imaginários (na reta não-focal):* $B_1 = (0, -3)$ *e* $B_2 = (0, 3)$.
- *focos:* $F_1 = (-\sqrt{34}, 0)$ *e* $F_2 = (\sqrt{34}, 0)$.
- *assíntotas:* $y = \pm\frac{3}{5}x$, *ou seja* $3x \pm 5y = 0$. □

**(b)** $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.

Solução.
*Completando os quadrados, obtemos:*

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x - 2(y^2 - 2y) = -9 \\ \iff\ & (x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 2y + 1) = -9 + 9 - 2 \\ \iff\ & (x+3)^2 - 2(y-1)^2 = -2 \\ \iff\ & (y-1)^2 - \frac{(x+3)^2}{2} = 1\,. \end{aligned}$$

*Logo, a equação representa uma hipérbole com:*

- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ *e* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.
- *centro:* $C = (-3, 1)$.
- *reta focal:* $\ell : x = -3$, *paralela ao eixo*$-OY$.
- *reta não-focal:* $\ell' : y = 1$, *paralela ao eixo*$-OX$.
- *vértices:* $A_1 = (-3, 0)$ *e* $A_2 = (-3, 2)$.
- *vértices imaginários (na reta não-focal):* $B_1 = (-3 - \sqrt{2}, 1)$ *e* $B_2 = (-3 + \sqrt{2}, 1)$.
- *focos:* $F_1 = (-3, 1 - \sqrt{3})$ *e* $F_2 = (-3, 1 + \sqrt{3})$.
- *assíntotas* $(x+3) = \pm\sqrt{2}(y-1)$, *ou seja,* $x + \sqrt{2}y = -3 + \sqrt{2}$ *e* $x - \sqrt{2}y = -3 - \sqrt{2}$. □

**(c)** $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$.

Solução.
*Completando os quadrados, obtemos:*

$$\begin{aligned} & 9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) = 31 \\ \iff\ & 9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 + 8y + 16) = 31 + 9 \times 25 - 16 \times 16 \\ \iff\ & 9(x+5)^2 - 16(y+4)^2 = 0 \\ \iff\ & 9(x+5)^2 = 16(y+4)^2 \\ \iff\ & 3(x+5) = \pm 4(y+4) \\ \iff\ & 3(x+5) \pm 4(y+4) = 0\,. \end{aligned}$$

*Logo, a equação representa o par de retas,* $3x + 4y = -31$ *e* $3x - 4y = 1$, *que se cortam no ponto* $(-5, -4)$. □

## Exemplo 2

*Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos* $(-\sqrt{8}, 0)$ *e* $(\sqrt{8}, 0)$.

*Solução.*

Como $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$, temos que o centro da hipérbole é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (0, 0)$ e a reta focal é o eixo$-OX$. Sendo a hipérbole equilátera, temos $a = b$. Como $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$. Logo, $a = b = 2$ e

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1\,,$$

é a equação da hipérbole.

Além disso, $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$ são os vértices, $B_1 = (0, -2)$ e $B_2 = (0, 2)$ são os vértices imaginários e $x = \pm y$ são as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$. □

## Exemplo 3

*Mostre que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é* $\sqrt{2}$.

*Solução.*

Como $a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Logo, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$. □

## Exemplo 4

*Os vértices de uma hipérbole são os pontos* $(0, 3)$ *e* $(0, -3)$*, e um de seus focos é o ponto* $(0, 5)$. *Determine a equação da hipérbole, o comprimento do seu eixo focal e suas assíntotas.*

*Solução.*

A hipérbole tem centro $C = \dfrac{(0, 3) + (0, -3)}{2} = (0, 0)$; reta focal=eixo$-OY$; $c = d((0, 0), (0, 5)) = 5$; $a = d((0, 0), (0, 3)) = 3$; $(0, -5)$ é o outro foco; $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$.

Então $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ é a equação da hipérbole, $y = \pm\dfrac{4}{3}y$ são as suas assíntotas e $2a = 6$ o comprimento do seu eixo focal. □

## Exemplo 5

*O centro de uma hipérbole é a origem, sua reta focal é um dos eixos coordenados e uma de suas assíntotas é a reta* $2x - 5y = 0$. *Determine a equação da hipérbole* $\mathcal{H}$*, supondo que o ponto* $(4, 6) \in \mathcal{H}$.

*Solução.*

Como o centro é a origem e a reta focal (eixo$-OX$ ou eixo$-OY$) é uma bissetriz das assíntotas, a reta $2x + 5y = 0$ é a outra assíntota. Vamos analisar os dois casos possíveis:

• Reta focal $=$ eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{5}$, isto é, $b = \dfrac{2}{5}a$ . Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{36}{\frac{4a^2}{25}} = 1$, ou seja, $0 > 16 \times 4 - 25 \times 36 = 4a^2$, o qual é absurdo, pois $4a^2 \geq 0$.

• Reta focal $=$ eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$, isto é, $a = \dfrac{2}{5}b$ . Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{36}{\frac{4b^2}{25}} - \dfrac{16}{b^2} = 1$, ou seja, $36 \times 25 - 16 \times 4 = 4b^2$. Logo, $b^2 = 9 \times 25 - 16 = 209$, $a^2 = \dfrac{836}{25}$ e

$\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{\frac{856}{25}} - \dfrac{x^2}{209} = 1$ é a equação da hipérbole. □

## Exemplo 6

*Determine os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole conjugada da hipérbole*

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

*Solução.*

A hipérbole $\mathcal{H} : 9x^2 - 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita na forma $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, tem centro na origem, reta focal $=$ eixo$-OX$, $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

Então a hipérbole $\mathcal{H}'$, conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, tem centro na origem, $a' = b = 3$, $b' = a = 2$, $c' = c = \sqrt{13}$ e reta focal $=$ eixo$-OY$.

Logo $\mathcal{H}' : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ é a equação da hipérbole conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, $F_1 = (0, -\sqrt{13})$ e $F_2 = (0, \sqrt{13})$ são seus focos, $A_1 = (0, -3)$ e $A_2 = (0, 3)$ são seus vértices e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$ é a sua excentricidade. □

## Exemplo 7

*Determinar o ângulo agudo de interseção das assíntotas da hipérbole* $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

*Solução.*

A equação da hipérbole se escreve na forma:

$$\begin{aligned}
&9(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -44 \\
&9(x-2)^2 - (y+1)^2 = -44 + 36 - 1 = -9 \\
&\frac{(y+1)^2}{9} - (x-2)^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Então $C = (2, -1)$ é o centro, a reta focal é $\ell : x = 2$ (paralela ao eixo$-OY$), $a = 3$, $b = 1$; $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10}$ e as assíntotas são: $x - 2 = \pm\frac{1}{3}(y+1)$, ou seja, $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$.

Logo tg $\beta = 3$, tg $\alpha = -3$, $\theta = \alpha - \beta$ e

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\ \text{tg}\,\beta} = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}\,,$$

onde $\beta$ e $\alpha$ são os ângulos que as retas $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$, respectivamente, fazem com o semi-eixo $OX$ positivo, e $\theta$ é o ângulo agudo entre as assíntotas. □

## Exemplo 8

*As retas* $r : 2x + y = 3$ *e* $s : 2x - y = 1$ *são as assíntotas de uma hipérbole que passa pelo ponto* $(6, 2)$*. Determine sua equação.*

*Solução.*

O centro $C = (x, y)$ da hipérbole é o ponto de interseção das assíntotas, isto é, $(x, y)$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 1\,. \end{cases}$$

Logo $C = (1, 1)$ é o centro, e a reta focal é a reta $x = 1$ ou a reta $y = 1$, que são as retas bissetrizes das assíntotas. Vamos analisar os dois casos possíveis.

• Reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$ e $\frac{b}{a} = 2$, ou seja, $b = 2a$. Como $b^2 = 4a^2$ e $(6, 2) \in \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 4a^2$ e $4 \times 25 - 1 = 99 = 4a^2$.

Portanto, $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99$, ou seja, $\mathcal{H} : \frac{(x-1)^2}{\frac{99}{4}} - \frac{(y-1)^2}{99} = 1$.

• Reta focal $\ell : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \frac{(y-1)^2}{a^2} - \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1$ e $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, ou seja, $a = 2b$. Como $a^2 = 4b^2$ e $(6, 2) \in \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : (y-1)^2 - 4(x-1)^2 = 4b^2$ e $1 - 4 \times 25 = 4b^2 = -99 < 0$, o que é absurdo.

Assim, a equação procurada corresponde ao primeiro caso: $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99$. □

## Exemplo 9

*Mostre que as assíntotas de uma hipérbole não a intersectam.*

*Solução.*

Podemos supor, sem perda de generalidade (escolhendo o sistema de coordenadas de maneira adequada), que a hipérbole é dada pela equação:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou seja, $\mathcal{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Como $r_+ : bx - ay = 0$ e $r_- : bx + ay = 0$ são as assíntotas da hipérbole e

$$\mathcal{H} : (bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2,$$

temos que $r_+ \cap \mathcal{H} = \varnothing$ e $r_- \cap \mathcal{H} = \varnothing$, pois $(bx - ay)(bx + ay) = 0 \neq a^2b^2$ se $(x, y) \in r_- \cup r_+$. □

## Exemplo 10

*Mostre que uma reta $r$ paralela a uma assíntota de uma hipérbole intersecta a curva em apenas um ponto.*

*Solução.*

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a hipérbole é dada pela equação:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Como $bx \pm ay = 0$ são as assíntotas da hipérbole, temos que $r$ é da forma $r : bx \pm ay = m$, onde $m \neq 0$.

Seja $r : bx + ay = m$. Então, $P = (x, y) \in r \cap \mathcal{H}$ se, e somente se, $bx + ay = m$ e

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2 = (bx + ay)(bx - ay) = m(bx - ay),$$

isto é, se, e somente se, $bx + ay = m$ e $bx - ay = \dfrac{a^2b^2}{m}$.

Como as retas $\ell_1 : bx+ay = m$ e $\ell_2 : bx-ay = \dfrac{a^2b^2}{m}$ são concorrentes, pois $\begin{vmatrix} b & a \\ b & -a \end{vmatrix} = -2ab \neq 0$, temos que $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto, dado pela interseção das retas $\ell_1$ e $\ell_2$.

De modo análogo, podemos provar que $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto se $r$ é da forma $bx - ay = m$, $m \neq 0$. □

## Exemplo 11

*A reta tangente a uma hipérbole $\mathcal{H}$ num ponto $P \in \mathcal{H}$ é a única reta não paralela às assíntotas que intersecta $\mathcal{H}$ só nesse ponto.*

*Mostre que a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, em um ponto $P = (x_0, y_0)$ sobre a curva, tem por equação*

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2 .$$

*Solução.*

Seja

$$r : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{H}$.

Então, $Q = (x_0 + mt, y_0 + nt) \in \mathcal{H} \cap r$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} & b^2(x_0+mt)^2 - a^2(y_0+nt)^2 = a^2b^2 \\ \iff & b^2(x_0^2 + 2mx_0t + m^2t^2) - a^2(y_0^2 + 2ny_0t + n^2t^2) = a^2b^2 \\ \iff & (b^2m^2 - a^2n^2)t^2 + (2x_0mb^2 - 2y_0na^2)t + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0 \\ \iff & (b^2m^2 - a^2n^2)t^2 + (2x_0mb^2 - 2y_0na^2)t = 0\,, \end{aligned}$$

já que $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$.

Como $b^2m^2 - a^2n^2 = (bm - an)(bm + an)$, temos que $b^2m^2 - a^2n^2 = 0$ se, e somente se, $bm - an = 0$ ou $bm + an = 0$, se, e somente se, $\begin{vmatrix} m & n \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ ou $\begin{vmatrix} m & n \\ -a & b \end{vmatrix} = 0$ se, e somente se, $(m, n) \parallel (a, b)$ ou $(m, n) \parallel (-a, b)$.

Além disso, como as assíntotas $r_+ : bx - ay = 0$ e $r_- : bx + ay = 0$ são perpendiculares, respectivamente, aos vetores $(b, -a)$ e $(b, a)$, temos que $(a, b)$ e $(-a, b)$ são vetores paralelos às retas $r_+$ e $r_-$, respectivamente.

Logo $b^2m^2 - a^2n^2 = 0$ se, e somente se, $r$ é paralela à assíntota $r_+$ ou à assíntota $r_-$ da hipérbole. Então $b^2m^2 - a^2n^2 \neq 0$, já que, por definição, $r$ não é paralela às assíntotas.

Sendo que $b^2m^2 - a^2n^2 \neq 0$ e $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto, temos que

$$2x_0b^2m - 2y_0a^2n = 0\,,$$

ou seja, $(m, n) \perp (2x_0b^2, -2y_0a^2)$.

Logo o vetor $(x_0b^2, -y_0a^2)$ é perpendicular à reta $r$. Assim,

$$r : b^2x_0x - a^2y_0y = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

já que $P = (x_0, y_0) \in r$ e $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. $\square$

## Exemplo 12

*Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais as retas da família $r_m : y = mx - 1$ são tangentes à hipérbole $\mathcal{H} : 4x^2 - 9y^2 = 36$.*

*Solução.*

A reta $r_m$ é tangente a $\mathcal{H}$ se, e somente se, $r_m \cap \mathcal{H}$ consiste apenas de um ponto e $r_m$ não é paralela às assíntotas.

Como a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ tem centro na origem, reta focal $=$ eixo$-OX$, $a = 3$ e $b = 2$, suas assíntotas, $y = \pm\dfrac{2}{3}x$, têm inclinação $\pm\dfrac{2}{3}$ em relação ao eixo$-OX$. Logo $m \neq \pm\dfrac{2}{3}$, ou seja, $9m^2 - 4 \neq 0$.

Além disso, $r_m \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto. Isto é, a equação

$$4x^2 - 9(mx-1)^2 = 36 \iff (4-9m^2)x^2 + 18mx - 45 = 0$$

tem apenas uma solução.

Logo a equação acima tem discriminante

$$\begin{aligned}
\Delta = \; & (18m)^2 + 4 \times 45(4-9m^2) = 0 \\
\iff \; & 18m^2 + 10(4-9m^2) = 0 \\
\iff \; & -72m^2 + 40 = 0 \\
\iff \; & m^2 = \frac{40}{72} \iff m^2 = \frac{5}{9} \iff m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\,.
\end{aligned}$$

Assim, $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x - 1$ e $y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x - 1$ são as retas tangentes à hipérbole que pertencem à família de retas $r_m$. $\square$