# Capítulo 2

# Retas no plano

O objetivo desta aula é determinar a equação algébrica que representa uma reta no plano. Para isso, vamos analisar separadamente dois tipos de reta: *reta vertical* e *reta não-vertical*.

## 1. Retas verticais e não-verticais

### Definição 1

*Uma reta $r$ é* **vertical** *quando coincide com o eixo−$OY$ ou quando é paralela ao eixo−$OY$ (isto é, $r \cap \text{eixo} - OY = \varnothing$).*

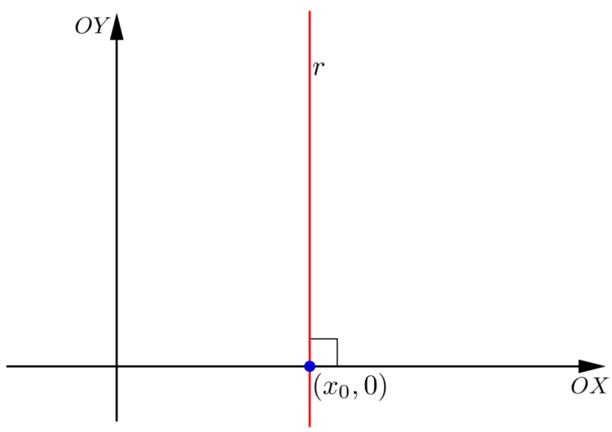


Fig. 1: $r$ é vertical e a sua equação é $r : x = x_0$.

Observe que todos os pontos pertencentes à reta vertical $r$ têm a mesma abscissa, ou seja, se $r \cap \text{eixo} - OX = \{(x_0, 0)\}$, então

$$r = \{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Neste contexto, dizemos que $x = x_0$ é a equação da reta $r = r_{x_0}$ e escrevemos

$$\boxed{r_{x_0} : x = x_0}$$

## Definição 2

*Seja $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto dos números reais.*

*Uma* **função** *$f : D \to \mathbb{R}$ de $D$ em $\mathbb{R}$ é uma lei que a cada número $x \in D$ associa um* **único** *número real $f(x)$, chamado a imagem de $x$ pela função $f$.*

*O* **gráfico** *da função $f : D \to \mathbb{R}$ é o subconjunto $\mathbf{G}(f)$ do plano $\mathbb{R}^2$ definido por:*

$$\boxed{\mathbf{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \ \ e \ \ y = f(x)\}}$$

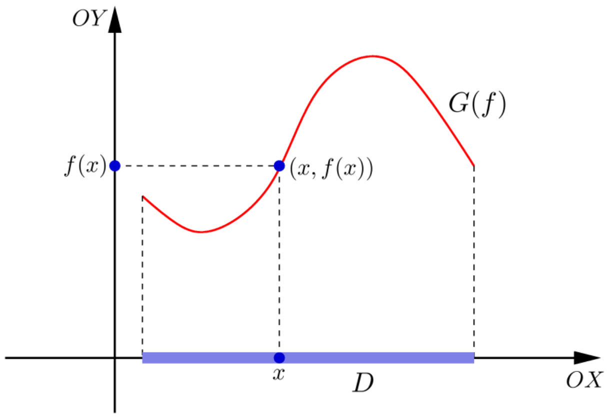


*Fig. 2: Gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$.*

Um critério para verificar se uma curva $C$ no plano é o gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:

> Uma curva $C$ no plano é o gráfico de uma função $f$ se, e somente se, as retas verticais intersectam $C$ em no máximo um ponto. Isto é:
> $C$ é gráfico de uma função $\iff$ $C \cap r_{x_0} = \emptyset$ ou $C \cap r_{x_0} = \{P\}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Ou, de modo equivalente:

$C$ não é gráfico de uma função se, e só se, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, $C \cap r_{x_0}$ consistede dois ou mais pontos.

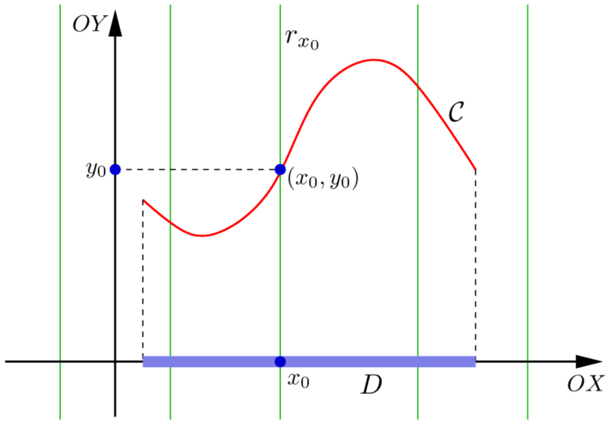


Fig. 3: A curva $C$ é gráfico de uma função, pois as retas verticais intersectam a curva em exatamente um ponto ou em nenhum ponto.

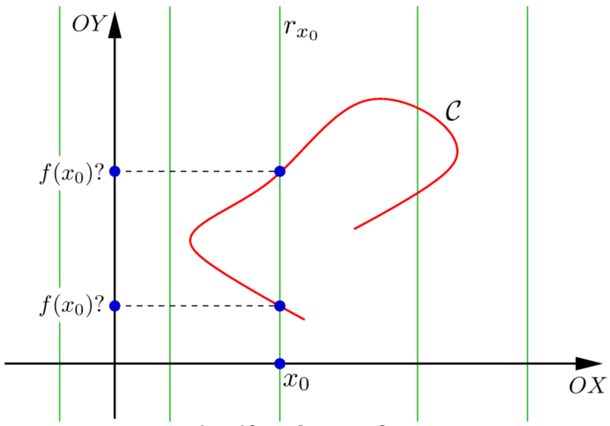


Fig. 4: A curva $C$ **não** é gráfico de uma função, pois existem retas verticais que intersectam a curva em mais de um ponto.

De fato, se $C = \mathbf{G}(f)$, onde $f$ é uma função de $D$ em $\mathbb{R}$, então, para todo $x_0 \in D$, $r_{x_0} \cap C = \{(x_0, f(x_0))\}$, e para $x_0 \notin D$, $r_{x_0} \cap C = \varnothing$.

Reciprocamente: **se** $C$ é uma curva que intersecta as verticais em no máximo um ponto e $D = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid r_{x_0} \cap C \neq \varnothing\}$, **então** $C$ é o gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_0) = y_0$, onde $(x_0, y_0)$ é o ponto de interseção de $C$ com $r_{x_0}$, para todo $x_0 \in D$ (veja a figura 3).

## Exemplo 1

*Um círculo $C$ de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$* **não é** *o gráfico de uma função.*

*De fato, a interseção $C \cap r_a = \{(a, b - r), (a, b + r)\}$ do círculo $C$ com a reta vertical $x = a$ possui dois pontos distintos.*

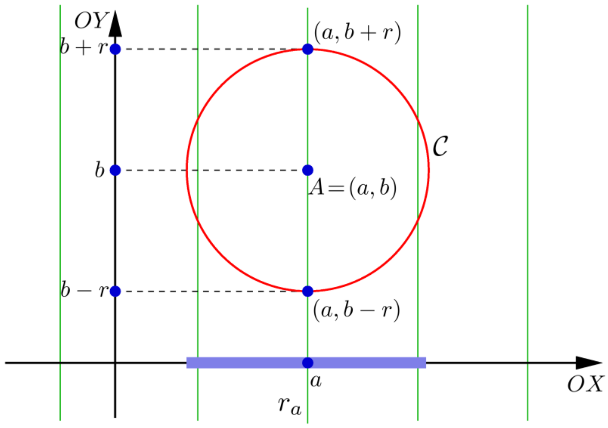


*Fig. 5: Vertical $r_a : x = a$ intersectando $C$ em mais de um ponto.*

## Exemplo 2

*Uma reta vertical $r_{x_0} : x = x_0$ também não é gráfico de uma função, pois a interseção $r_{x_0} \cap r_{x_0} = r_{x_0} = \{(x_0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ possui uma quantidade infinita de pontos.*

## Exemplo 3

*Uma reta não-vertical $r$ é o gráfico de uma função $f$ definida em todo o conjunto $D = \mathbb{R}$ dos números reais.*

*De fato, para qualquer número $x_0 \in \mathbb{R}$, a interseção $r \cap r_{x_0}$ possui um único ponto, pois, caso contrário, $r = r_{x_0}$ ou $r \cap r_{x_0} = \varnothing$, ou seja, $r$ seria uma reta vertical.*

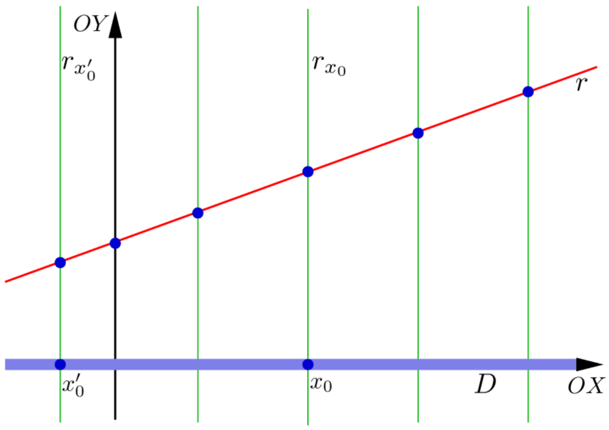


Fig. 6: Cada vertical intersecta a reta não-vertical $r$ em um único ponto.

## Definição 3

*Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se* **afim**, *se para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$, onde $a$ e $b$ são números reais. Quando $b = 0$, a função diz-se também* **linear**.

## Teorema 1

*O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical e, reciprocamente, toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.*

**Prova.**

• Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, uma função afim e $\mathbf{G}(f) = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ seu gráfico.

Para provar que $\mathbf{G}(f)$ é uma reta, basta verificar que três pontos quaisquer de $\mathbf{G}(f)$ são colineares.

Sejam

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)\,, \qquad P_2 = (x_2, ax_2 + b) \qquad \text{e} \qquad P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

três pontos de $\mathbf{G}(f)$ tais que $x_1 < x_2 < x_3$.

Como

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
d(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_2 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 - ax_2)^2} \\
&= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}, \\
d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2} \\
&= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},
\end{aligned}$$

obtemos que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Portanto, $P_1$, $P_2$ e $P_3$ são colineares.

• Considere, agora, uma reta $r$ não-vertical.

Devemos verificar que existem números reais $a$ e $b$ tais que $r = \mathbf{G}(f)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para isso, tome $b$ como sendo a ordenada do único ponto $(0, b)$ onde a reta $r$ (que não é vertical) intersecta o eixo$-OY$ e seja $a = \dfrac{y_0 - b}{x_0}$, onde $(x_0, y_0)$ é um ponto qualquer de $r$ distinto de $(0, b)$.

Observe que $x_0 \neq 0$, pois, caso contrário, $(x_0, y_0)$ pertenceria ao eixo $-OY$ e $r$ seria, então, uma reta vertical.

Já provamos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, é uma reta não-vertical.

Como $f(0) = b$ e $f(x_0) = ax_0 + b = \dfrac{y_0 - b}{x_0} x_0 + b = y_0$, obtemos que $(0, b) \in \mathbf{G}(f)$ e $(x_0, y_0) \in \mathbf{G}(f)$.

Logo $r = \mathbf{G}(f)$, pois $r$ e $\mathbf{G}(f)$ são duas retas que contêm os pontos $(0, b)$ e $(x_0, y_0)$. ■

## Observação 1

*Toda reta $r$ não-vertical se representa por uma equação do 1º grau da forma $y = ax + b$, onde:*

• *$b$ é a ordenada do ponto onde $r$ intersecta o eixo$-OY$. Se $b = 0$, então $r$ passa pela origem.*

• *$a$ é a razão entre o acréscimo de $y$ e o acréscimo de $x$ quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = ax_0 + b$ e $y_1 = ax_1 + b$, então*

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a\,.$$

• *O número $a$ chama-se* **inclinação da reta** $r : y = ax + b$.

*Além disso,*

◇ **Se** $a > 0$, *a função* $y = ax + b$ *é* **crescente**, *isto é, se* $x_1 < x_2$, *então* $y_1 = ax_1 + b < y_2 = ax_2 + b$.

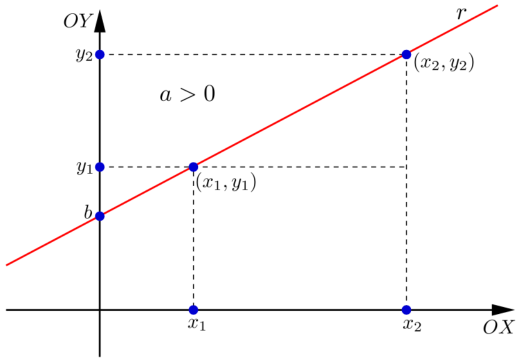


*Fig. 7: Para* $a > 0$, $y = ax + b$ *é crescente.*

◇ **Se** $a < 0$, *a função* $y = ax + b$ *é* **decrescente**, *isto é, se* $x_1 < x_2$, *então* $y_1 = ax_1 + b > y_2 = ax_2 + b$.

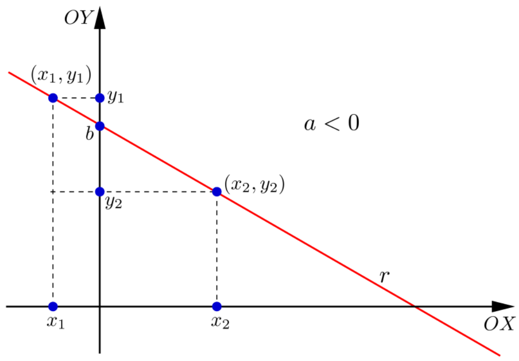


*Fig. 8: Para* $a < 0$, $y = ax + b$ *é decrescente.*

◇ **Se** $a = 0$, *a função* $y = ax + b$ *é* **constante**, *pois* $y = b$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Neste caso, dizemos que* $r : y = b$ *é uma* **reta horizontal**.

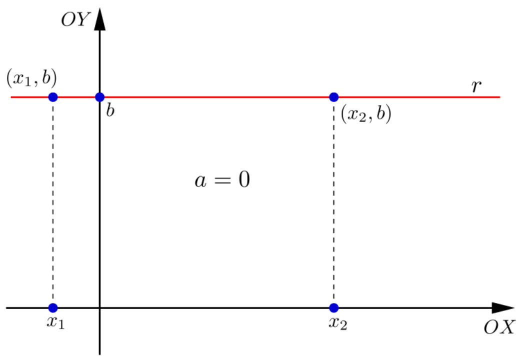


*Fig. 9: Para* $a = 0$, $y = ax + b$ *é constante.*

• *Seja $\theta$ o ângulo que a reta $r : y = ax + b$ faz com o semi-eixo$-OX$ positivo. Então,*

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = a}$$

*De fato, veja as figuras 10, 11 e 12:*

$$a = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta.$$

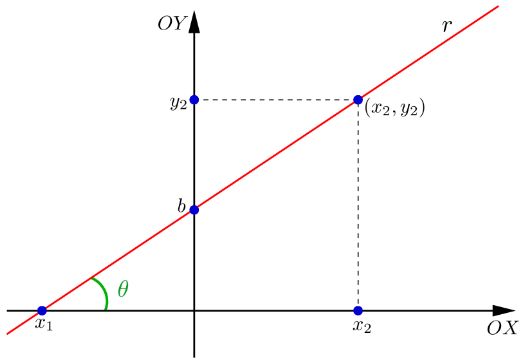


*Fig. 10: Caso* $0 < \theta < \frac{\pi}{2} = 90^o$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{0 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= -\operatorname{tg}(\pi - \theta)\ \cdot \\ &= \operatorname{tg}\theta \end{aligned}$$

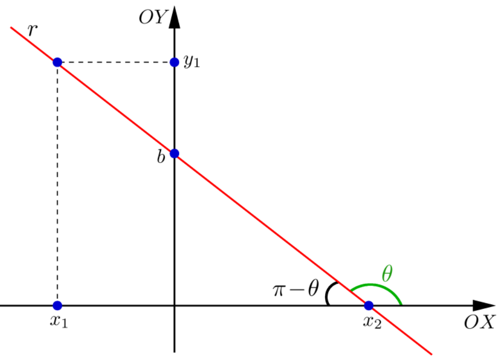


*Fig. 11: Caso* $\frac{\pi}{2} = 90^o < \theta < \pi = 180^o$.

$$\theta = 0 \Longrightarrow a = 0 = \operatorname{tg}\theta.$$

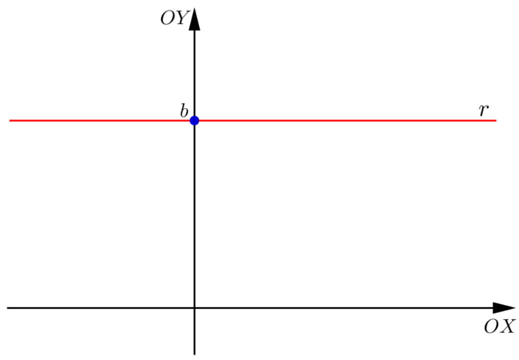


*Fig. 12: Caso* $\theta = 0 = 0^o$.

## Exemplo 4

*Determine as equações das retas que contêm os lados do triângulo de vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ e $C = (1, 3)$.*

*Solução.*

• A reta $r_1$ que contêm o lado $AC$ é vertical, pois $A$ e $C$ têm a mesma abscissa 1. Assim, $r_1 : x = 1$.

• A reta $r_2$ que contêm o lado $AB$ é horizontal, pois $A$ e $B$ têm a mesma ordenada 1. Portanto, $r_2 : y = 1$.

• A reta $r_3$ que contêm o lado $BC$ tem inclinação $a = \dfrac{3-1}{1-4} = -\dfrac{2}{3}$. Assim, a equação de $r_3$ é da forma:

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + b.$$

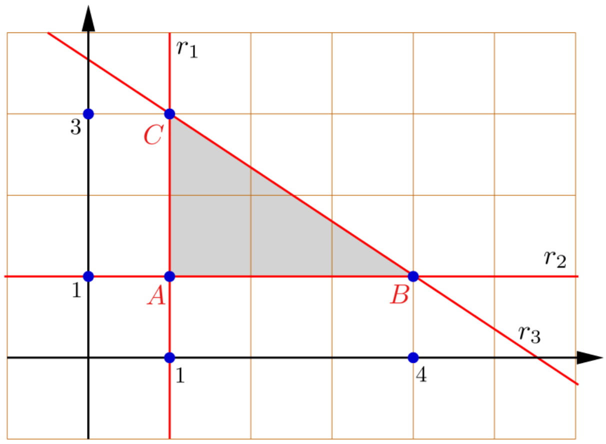


Fig. 13: Triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$.

*Determinemos o valor de b:* como $B = (4, 1) \in r_3$, temos, substituindo $x$ por 4 e $y$ por 1 na equação anterior:

$$1 = -\frac{2}{3} \times 4 + b \Longrightarrow b = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}.$$

Portanto,

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3},$$

é a equação da terceira reta. □

# 2. Retas paralelas

Duas retas $r$ e $r'$ são **paralelas** quando não se intersectam, isto é, $r \cap r' = \varnothing$.

Se $r$ e $r'$ são retas paralelas, escrevemos $r \parallel r'$.

Note que se $r \parallel r'$, então $r$ é vertical se, e somente se, $r'$ é vertical.

## Proposição 1

*Sejam $r : y = ax + b$ e $r' : y = a'x + b'$ duas retas não-verticais.*

*Então $r \parallel r'$ se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.*

*Isto é, duas retas não-verticais são paralelas se, e somente se, têm a mesma inclinação e cortam o eixo$-OY$ em pontos diferentes.*

**Prova.**

**(a)** Verifiquemos primeiro que se $r \parallel r'$, então $a = a'$ e $b \neq b'$.

Se $r \parallel r'$, então $b \neq b'$, pois, caso contrário, $(0, b) = (0, b') \in r \cap r'$, uma contradição, já que $r \cap r' = \varnothing$.

Além disso, $a = a'$, pois se $a \neq a'$, as ordenadas $ax_0 + b$ e $a'x_0 + b'$ dos pontos sobre as retas $r$ e $r'$ de abscissa $x_0 = \dfrac{b' - b}{a - a'}$, seriam iguais e, conseqüentemente, $r \cap r' \neq \varnothing$. De fato,

$$\begin{aligned}
ax_0 + b &= a\frac{b' - b}{a - a'} + b = \frac{a(b' - b) + b(a - a')}{a - a'} = \frac{ab' - ab + ab - a'b}{a - a'} \\
&= \frac{ab' - a'b}{a - a'} = \frac{ab' + a'b' - a'b' - a'b}{a - a'} = \frac{-a'b + a'b' + ab' - a'b'}{a - a'} \\
&= \frac{a'(b' - b) + b'(a - a')}{a - a'} = a'\frac{b' - b}{a - a'} + b'\frac{a - a'}{a - a'} \\
&= a'\frac{b' - b}{a - a'} + b' = a'x_0 + b'
\end{aligned}$$

**(b)** Suponhamos, agora, que $a = a'$ e $b \neq b'$, e verifiquemos que $r \parallel r'$.

Como $b \neq b'$, temos $ax + b \neq ax + b'$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $r \cap r' = \varnothing$, isto é, $r$ e $r'$ são paralelas. ■

## Exemplo 5

*Determine a equação da reta $r'$ que passa pelo ponto $A = (1,4)$ e é paralela à reta*

$$r : y = 3x + 2.$$

*Solução.*

Como $r'$ é paralela à reta não-vertical $r$, temos que $r'$ é, também, não-vertical.

A equação de $r'$ é da forma $r' : y = 3x + b'$, pois $r$ e $r'$ têm a mesma inclinação $a = 3$.

Além disso, como $A = (1,4) \in r'$, as coordenadas $x = 1$ e $y = 4$ desse ponto devem satisfazer a equação de $r'$ , isto é, $4 = 3 \times 1 + b'$. Portanto, $b' = 4 - 3 = 1$ e $r' : y = 3x + 1$ é a equação procurada. $\square$

# 3. Retas perpendiculares

Duas retas são **perpendiculares** quando o ângulo entre elas é de $90^o$ (ou $\dfrac{\pi}{2}$ radianos).

Quando $r$ e $r'$ são retas perpendiculares escrevemos $r \perp r'$.

Sejam $r$ e $r'$ retas perpendiculares. Se $r$ é horizontal, $r : y = b$, então $r'$ é vertical, $r' : x = c$, e vice-versa.

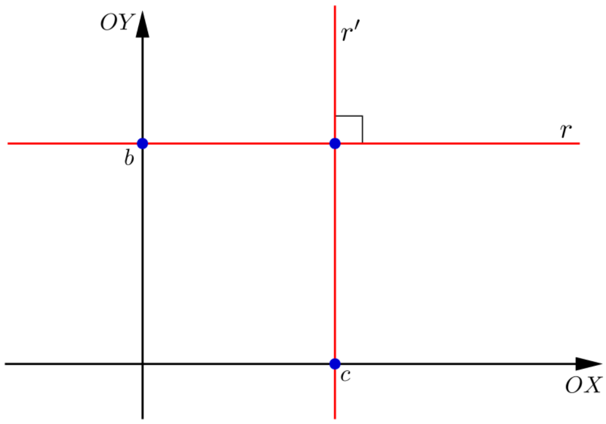


Fig. 14: Retas horizontais e verticais são perpendiculares.

## Proposição 2

*Sejam $r$ e $r'$ retas não-verticais e não-horizontais. Isto é, $r : y = ax + b$ e $r' : y = mx + n$, com $a \neq 0$ e $m \neq 0$.*

*Então $r$ e $r'$ são perpendiculares se, e somente se, $ma = -1$.*

**Prova.**

- *Caso particular:* Suponhamos que $r$ e $r'$ passam pela origem, isto é, $r : y = ax$ e $r' : y = mx$.

Seja $P = (1, a) \in r$.

Observe que, fazendo uma rotação de $90^o$ em torno da origem, no sentido positivo, o ponto $P$ vai cair sobre o ponto $P' = (-a, 1)$.

Logo as retas são perpendiculares se, e só se, o ponto $P'$ pertence a $r'$, isto é, as coordenadas de $P'$ satisfazem a equação de $r'$. Assim,

$$r \perp r' \iff 1 = m\,(-a) \iff ma = -1.$$

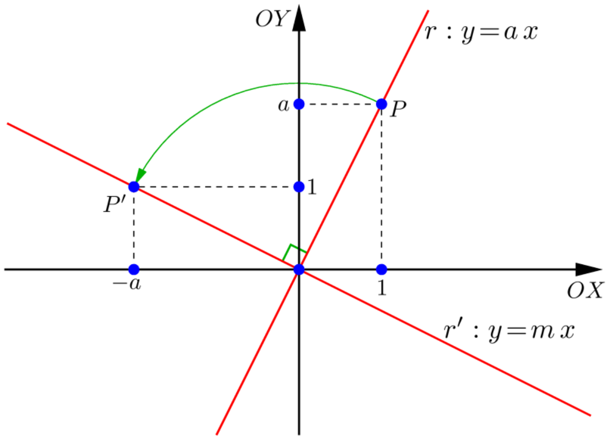


Fig. 15: Retas perpendiculares que se intersectam na origem.

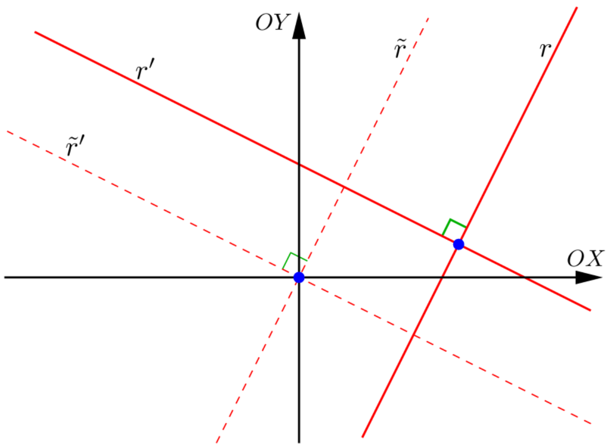


Fig. 16: Retas perpendiculares que não se intersectam na origem.

- *Caso geral:* Sejam $r : y = ax + b$ e $r' : y = mx + n$ retas perpendiculares.

Consideremos as retas $\tilde{r} : y = ax$ e $\tilde{r}' : y = mx$ que passam pela origem e são paralelas, respectivamente, às retas $r$ e $r'$.

Então, $r \perp r' \iff \tilde{r} \perp \tilde{r}' \iff ma = -1$. ■

## Exemplo 6

*Determine a equação da reta $r'$ que passa pelo ponto $A$ e é perpendicular à reta $r$, onde:*

**(a)** $r : x = 2\,,\quad A = (5,3)\,;$ **(b)** $r : y = 4x + 5\,,\quad A = (4,1)\,.$

*Solução.*

**(a)** Como $r$ é vertical, $r'$ deve ser horizontal e a sua equação da forma $r' : y = b$.

Sendo que $A = (5,3) \in r'$, devemos ter $3 = b$ e, portanto, $r' : y = 3$.

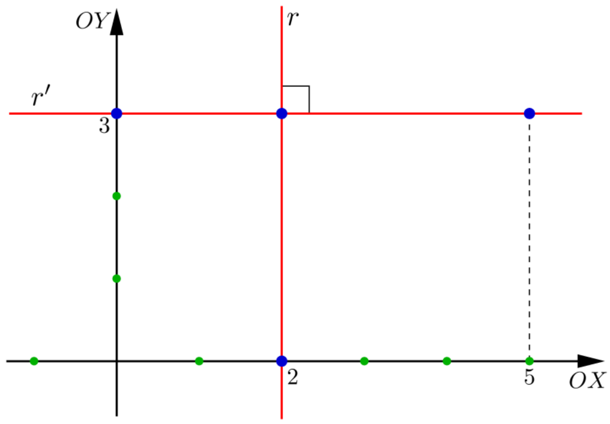


Fig. 17: Reta $r'$ horizontal, $r' \perp r$, $A = (5,3) \in r'$.

**(b)** Como $r$ é não-vertical e não-horizontal, a equação de $r'$ deve ser da forma $r' : y = ax + b$, com $4a = -1$ e $b$ por determinar. Isto é, $a = -\dfrac{1}{4}$ e $r' : y = -\dfrac{1}{4}x + b$.

Para determinar o valor de $b$ usamos que $A = (4,1) \in r'$. Ou seja, as coordenadas de $A$ devem satisfazer a equação de $r'$:

$$1 = -\frac{1}{4} \times 4 + b \Longrightarrow b = 2\,.$$

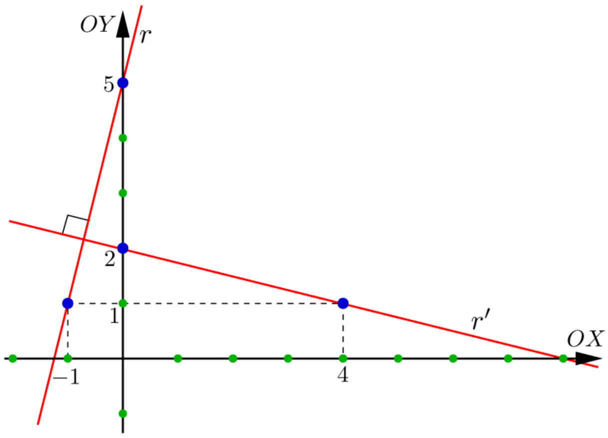


Fig. 18: Reta $r : y = 4x + 5$, $r' \perp r$, $A = (4, 1) \in r'$.

Assim, $r' : y = -\dfrac{1}{4}x + 2$ é a equação procurada de $r'$. □

## Exemplo 7

*Determine a mediatriz do segmento AB, onde* $A = (1, 5)$ *e* $B = (5, 3)$

*Solução.*

A reta $r$ que passa pelos pontos $A$ e $B$ é não-vertical e tem inclinação

$$a = \frac{3-5}{5-1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}..$$

Então $r : y = -\dfrac{1}{2}x + b$.

Como $A = (1, 5) \in r$, temos $5 = -\dfrac{1}{2} \times 1 + b$, isto é, $b = 5 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2}$.

Portanto, $r : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta $r'$ que passa pelo ponto médio $M$ de $AB$ e é perpendicular a $r$. Então a reta $r'$ tem inclinação $m = -\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{-1/2} = 2$ e sua equação é $r' : y = 2x + b$. Além disso, como $M = \left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{5+3}{2}\right) = (3, 4) \in r'$, $4 = 2 \times 3 + b$, ou seja, $b = 4 - 6 = -2$.

Portanto, a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é $r' : y = 2x - 2$. □

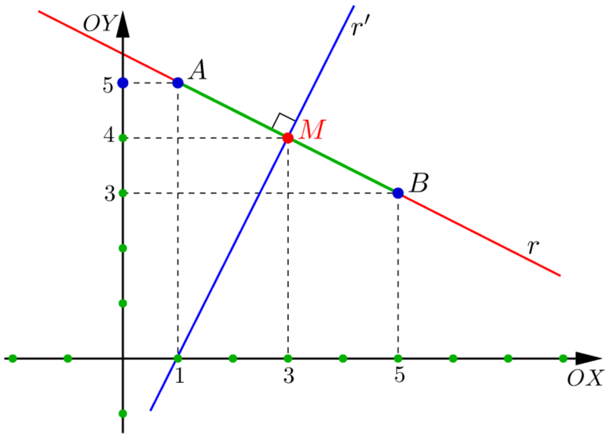


Fig. 19: Mediatriz $r'$ do segmento $AB$.

# 4. Equação cartesiana da reta

Consideremos o plano munido de um sistema de eixos ortogonais $OXY$.

Uma reta $r$ no plano pode ser:

• *Vertical* quando coincide com o eixo$-OY$ ou é paralela a esse eixo. Nesse caso, a equação de $r$ é $x = d$, onde $d \in \mathbb{R}$ é uma constante. Mais precisamente, a reta $r$, caracterizada pelo número $d \in \mathbb{R}$, é o conjunto

$$\boxed{r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = d\}}$$

• *Não-vertical*. Nesse caso, existem $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $r : y = mx + n$, ou seja, a reta $r$ é o conjunto

$$\boxed{r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid mx - y = -n\}}$$

Assim, é fácil verificar que toda reta $r$ do plano se expressa na forma:

$$\boxed{r : ax + by = c} \qquad (1)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a$ e $b$ não ambos iguais a zero. Essa equação é chamada a **equação cartesiana** da reta $r$.

Reciprocamente, dada a equação (1), onde $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos, temos que:

**(a)** se $b = 0$, então $r$ é uma reta vertical e sua equação é $r : x = \frac{c}{a}$ (lembre que se $b = 0$, então, necessariamente, $a \neq 0$).

Note que, se fizermos variar $c$ em $\mathbb{R}$, mantendo $a \neq 0$ fixo na equação $x = \frac{c}{a}$, obtemos todas as retas verticais possíveis.

**(b)** se $b \neq 0$, então a equação (1) representa uma reta não-vertical e se escreve na forma:

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\,.$$

Isto é, $r$ é não-vertical, tem inclinação $m = -\frac{a}{b}$ e corta o eixo$-OY$ no ponto $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

Observe que, variando $a$ e $c$ em $\mathbb{R}$ e mantendo $b \neq 0$ fixo, a equação $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ representa todas as retas não-verticais do plano.

Assim, *a equação (1), onde pelo menos um dos coeficientes a ou b é diferente de zero, representa todas as retas do plano.*

## Exemplo 8

*Determine a equação cartesiana das retas perpendiculares à reta $r$ que passa pelos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 3)$.*

*Solução.*

A reta $r$ tem inclinação $m = \dfrac{3-0}{-1-1} = -\dfrac{3}{2}$. As retas perpendiculares a $r$ devem, portanto, ter inclinação $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{-3/2} = \dfrac{2}{3}$. Logo a equação de uma reta perpendicular a $r$ é

$$r'_d : y = \frac{2}{3}x + d\,.$$

Variando $d \in \mathbb{R}$ obtemos a equação de qualquer reta perpendicular à reta $r$.

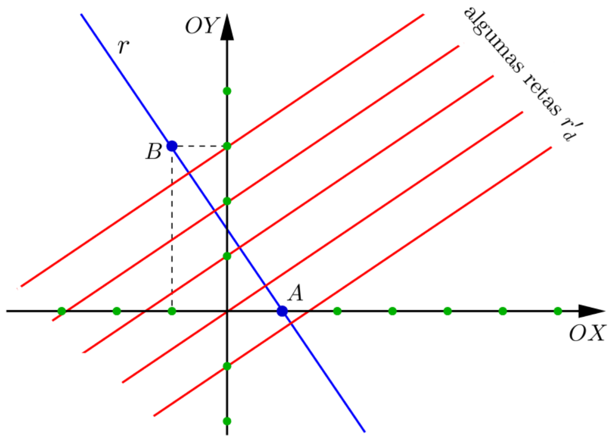


Fig. 20: Reta passando pelos pontos $A$ e $B$ e algumas retas da família $r'_d : 2x - 3y = c$ , (exemplo 8).

Escrevemos o valor $d$ como sub-índice em $r'_d$ para indicar que a reta em questão depende do valor $d$. Ou seja, mudar o valor de $d$ significa considerar outra reta, também perpendicular a $r$.

A equação da reta $r'_d$ se escreve na forma cartesiana como:

$$r'_d : -\frac{2}{3}x + y = d\,, \qquad \text{ou, ainda,} \qquad r'_d : 2x - 3y = -3d\,.$$

Nessa equação, $d$ é um número real qualquer, assim como $-3d$. Portanto, fazendo $c = -3d$, a equação da reta pode ser escrita na forma:

$$r'_d : 2x - 3y = c\,,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. □

## Observação 2

• *A condição de que pelo menos um dentre dois números $a$ e $b$ seja diferente de zero é equivalente a $a^2 + b^2 \neq 0$.*

• *Se $ax + by = c$ é uma reta, e $\lambda \neq 0$ é um número real, então $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ representa a mesma reta, pois, se um ponto $(x, y)$ do plano verifica uma dessas equações, então, necessariamente, verifica a outra.*

## Observação 3

*A equação cartesiana da reta $r$ que corta o eixo-horizontal no ponto de abscissa $a$ e o eixo-vertical no ponto de ordenada $b$, com $a$ e $b$ diferentes de zero, é $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.*

*De fato, como os pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ são distintos e a equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ representa uma reta que passa por $A$ e $B$, concluimos que $r : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, pois por dois pontos distintos passa uma única reta.*

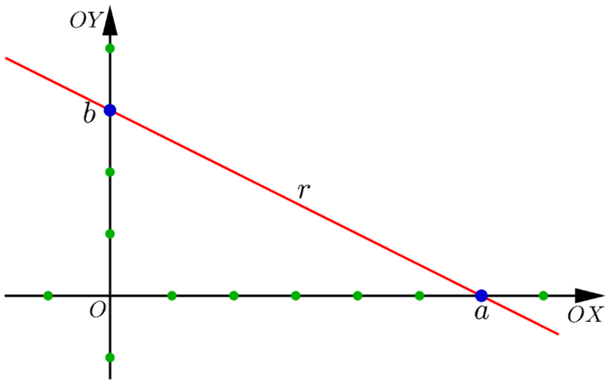


*Fig. 21: Reta passando pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.*

## Exemplo 9

*Uma reta $r$ que passa pelo ponto $P = (2, 4/3)$ forma com os semi-eixos coordenados positivos um triângulo de perímetro 12. Determine sua equação.*

*Solução.*

Sejam $a$ e $b$ números reais positivos tais que

$$\{(a, 0)\} = r \cap \text{eixo} - OX \quad \text{e} \quad \{(0, b)\} = r \cap \text{eixo} - OY.$$

Pela observação anterior, $r : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ é a equação cartesiana de $r$.

Como o ponto $P = (2, 4/3)$ pertence a $r$,

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{3b} = 1 \iff 6a + 4a = 3ab.$$

Além disso, o perímetro do triângulo $\triangle AOB$ é 12, ou seja:

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12,$$

onde $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$.

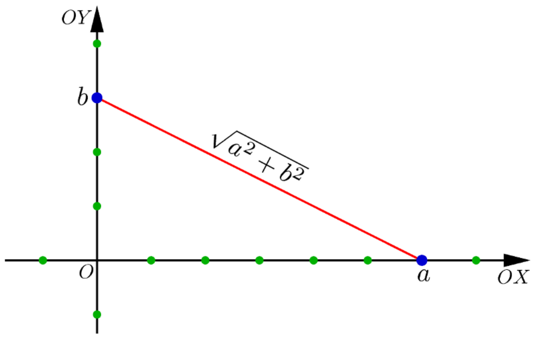


Fig. 22: Reta passando pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Temos então, que resolver o sistema

$$\begin{cases} 6a + 4b = 3ab \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12\,. \end{cases} \tag{2}$$

Elevando ao quadrado a segunda equação, obtemos que:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = (12 - (a+b))^2 \\ \iff & a^2 + b^2 = 144 - 24(a+b) + (a^2 + 2ab + b^2) \\ \iff & 24(a+b) = 144 + 2ab \\ \iff & 12(a+b) = 72 + ab\,. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (2) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 12(a+b) = 72 + ab \\ 4a + 6b = 32ab\,. \end{cases} \iff \begin{cases} -36(a+b) = -3 \times 72 - 3ab \\ 4a + 6b = 3ab \end{cases} \tag{3}$$

Somando as duas equações, obtemos que:

$$-32a - 30b = -3 \times 72 \iff 16a + 15b = 108 \iff b = \frac{108 - 16a}{15} \tag{4}$$

Substituindo $b = \dfrac{108 - 16a}{15}$ na equação $6b + 4a = 3ab$, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{15}(108 - 16a) + 4a = \frac{3}{15}a(108 - 16a) \\ \iff & 6(108 - 16a) + 60a = 3a(108 - 16a) \\ \iff & 2(108 - 16a) + 20a = -16a^2 + 108a \\ \iff & 16a^2 - 108a - 32a + 20a + 216 = 0 \\ \iff & 16a^2 - 120a + 216 = 0 \\ \iff & 2a^2 - 15a + 27 = 0 \\ \iff & a = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{4} \\ \iff & a = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \text{ ou } a = 3\,. \end{aligned}$$

Portanto, se $a_1 = 9/2$, então, por (4),

$$b_1 = \frac{108 - 16 \times 9/2}{15} = \frac{108 - 72}{15} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5},$$

e a equação da reta $r_1$ é $\frac{2x}{9} + \frac{5y}{12} = 1 \iff 8x + 15y = 36$.

Se $a_2 = 3$, então $b_2 = \frac{108 - 16 \times 3}{15} = \frac{60}{15} = 4$, e a equação da reta $r_2$ é $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \iff 4x + 3y = 12$.

Assim, o problema tem duas soluções:

$$r_1 : 8x + 15y = 16 \quad \text{e} \quad r_2 : 4x + 3y = 12. \;\square$$

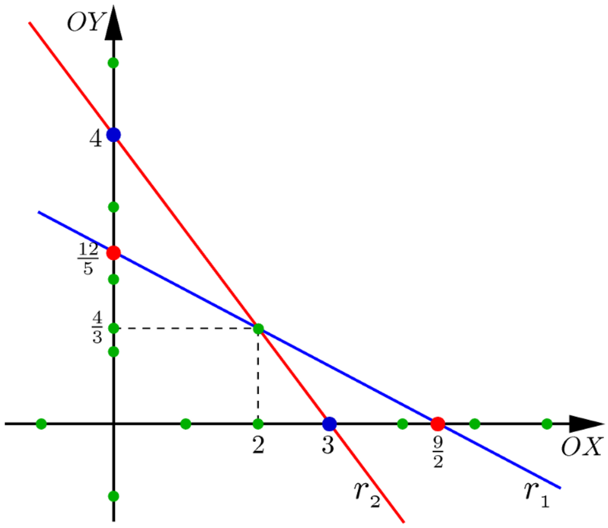


Fig. 23: Retas $r_1$ e $r_2$.